

Erratum pour “Le lieu des variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier a deux composantes”

Olivier Debarre

15 avril 2008

S. Grushevsky et R. Salvati Manni m’ont fait remarquer une erreur dans l’article [D].

Je rappelle quelques notations :

- \mathcal{A}_g est l’espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées complexes de dimension g ;
- $\mathcal{N}_g \subset \mathcal{A}_g$ est le diviseur de celles dont le diviseur thêta est singulier ;
- $\theta_{\text{null},g} \subset \mathcal{A}_g$ est le diviseur de celles dont le diviseur thêta est de multiplicité paire non nulle en un point d’ordre 2 ;
- $\mathcal{N}'_g \subset \mathcal{A}_g$ est la réunion des composantes irréductibles de \mathcal{N}_g non contenues dans $\theta_{\text{null},g}$.

La structure de diviseur de \mathcal{N}_g est définie dans [M]. Freitag a montré dans [F] que $\theta_{\text{null},g}$ est irréductible, mais il est affirmé à tort à plusieurs reprises dans [D] qu’un résultat de Teixidor ([T]) entraîne que le diviseur thêta d’une variété abélienne correspondant à un point général de $\theta_{\text{null},g}$ a un seul point singulier, qui est double ordinaire (cette référence est inappropriée, puisque [T] considère la restriction de $\theta_{\text{null},g}$ à l’espace des modules des courbes de genre g ; mais pour $g \geq 4$, on sait que les points doubles n’y sont jamais ordinaires).

Cependant, tous les ingrédients nécessaires à la démonstration de ce fait se trouvent dans [D]. Expliquons rapidement comment procéder.

On procède par récurrence sur g , en supposant que

- $\theta_{\text{null},g-1}$ est irréductible et le diviseur thêta d’une variété abélienne correspondant à un point général a un seul point singulier, qui est double ordinaire ;

- \mathcal{N}'_{g-1} est irréductible et un diviseur thêta d'une variété abélienne correspondant à un point général a deux points singuliers, qui sont doubles ordinaires.

On considère pour cela une compactification partielle \mathcal{A}_g^* de \mathcal{A}_g obtenue en ajoutant un diviseur $\partial\mathcal{A}_g$. Il existe un morphisme $p : \partial\mathcal{A}_g \rightarrow \mathcal{A}_{g-1}$, de fibre $A/\{\pm 1\}$ pour (A, Θ) général dans \mathcal{A}_{g-1} . La frontière de \mathcal{N}'_g dans \mathcal{A}_g^* se décompose en :

- $\overline{\theta}_{\text{null},g} \cap \partial\mathcal{A}_g = \partial'\theta_{\text{null},g} \cup p^{-1}(\theta_{\text{null},g-1})$
- et $\mathcal{N}'_g \cap \partial\mathcal{A}_g = \partial'\mathcal{N}'_g \cup p^{-1}(\mathcal{N}'_{g-1})$.

Chacun de ces morceaux est irréductible. Un calcul local montre ensuite que \mathcal{N}'_g est localement irréductible en un point général de $\partial'\theta_{\text{null},g}$ (Lemme 2.2), puis de $p^{-1}(\theta_{\text{null},g-1})$ (il suffit de remplacer la référence à [T] de la ligne 18 de la page 701 par l'hypothèse de récurrence), puis de $\partial'\mathcal{N}'_g \cap p^{-1}(\mathcal{N}'_{g-1})$ (« Cinquième pas », p. 703)¹.

L'argument du « Sixième et dernier pas », p. 706, qui explique pourquoi le diviseur thêta d'une variété abélienne correspondant à un point général de \mathcal{N}'_g a deux points singuliers, qui sont doubles ordinaires, s'applique de la même façon pour montrer que le diviseur thêta d'une variété abélienne correspondant à un point général de $\theta_{\text{null},g}$ a un point singulier, qui est double ordinaire.

Une autre démonstration, indépendante et plus courte, est donnée dans [GSM] (Theorem 3).

Références

- [D] Debarre, O., Le lieu des variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier a deux composantes. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **25** (1992), 687–707.
- [F] Freitag, E., Holomorphic tensors on subvarieties of the Siegel modular variety. *Automorphic forms of several variables (Katata, 1983)*, 93–113, Progr. Math. **46**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1984.
- [GSM] Grushevsky, S., Salvati Manni, R., Singularities of the theta divisor at points of order two, [arXiv :math/0701423v1](https://arxiv.org/abs/math/0701423v1).

¹Notons au passage qu'il y a une faute de frappe dans l'énoncé de la proposition 2.5, qui doit se lire : « Le morphisme $q : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}'_g \cap U$ est de degré 2. ».

- [M] Mumford, D., On the Kodaira dimension of the Siegel modular variety. *Algebraic geometry—open problems (Ravello, 1982)*, 348–375, Lecture Notes in Math. **997**, Springer, Berlin, 1983.
- [T] Teixidor i Bigas, M., Half-canonical series on algebraic curves. *Trans. Amer. Math. Soc.* **302** (1987), 99–115.