THÉORÈMES DE CONNEXITÉ ET VARIÉTÉS ABÉLIENNES

Olivier DEBARRE (*)

Cet article est consacré à la démonstration d'un théorème de connexité pour les variétés abéliennes, ainsi qu'à l'exposition de quelques corollaires. Les résultats analogues pour les espaces projectifs et leurs conséquences sont connus depuis un moment déjà ([FH], [FL], [F1]) et fournissent un guide qu'il n'y a qu'à suivre.

Le théorème principal (3.6) donne des conditions suffisantes pour que, étant donnés une variété abélienne X et deux morphismes $V \to X$ et $W \to X$, l'espace $V \times_X W$ soit *connexe*. Les conséquences de ce résultat sont nombreuses. En voici quelques cas particuliers ; nous renvoyons le lecteur au texte pour des énoncés plus précis.

On montre au § 4 que le groupe fondamental algébrique d'une sous-variété *normale* d'une variété abélienne *simple* X, de dimension $> \frac{1}{2}\dim(X)$, est isomorphe à celui de X (cela résulte de [So] lorsque la sous-variété est lisse).

On étend au § 5 certains résultats de Nori ([N]) : si D est un diviseur dans une variété abélienne X, dont aucune composante n'est une variété abélienne, et qui est à croisements normaux en dehors d'un fermé de codimension 2 dans D, alors le noyau du morphisme surjectif $\pi_1(X-D) \to \pi_1(X)$ est abélien libre de type fini, et l'on détermine son rang.

Des résultats analogues à ceux de [L1] sont obtenus au § 6, comme par exemple que le groupe fondamental algébrique d'une variété *normale* V qui est revêtement fini de degré $\leq \dim(V)$ d'une variété abélienne simple X, est isomorphe à celui de X. La même conclusion subsiste pour un revêtement qui induit une bijection ensembliste au-dessus d'une courbe, sans condition sur son degré.

On termine avec une conjecture, analogue d'un résultat démontré pour les espaces projectifs par Lazarsfeld. Nous renvoyons le lecteur au § 7 pour son énoncé, un peu technique.

1. Rappels et notations

Dans tout cet article, on travaille sur un corps algébriquement clos k *de caractéristique nulle*. Une *variété* est un schéma projectif réduit de type fini sur k, pas nécessairement irréductible, mais qu'on supposera toujours non vide.

Comme nous ne considérerons que des espaces connexes, nous écrirons simplement $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$ pour le groupe fondamental algébrique d'une variété connexe X, tel qu'il est défini dans [G1], Exp. V (*cf.* aussi [Mu1], p. 169).

(*) Financé en partie par N.S.F. Grant DMS 92-03919 et le Projet Européen Science "Geometry of Algebraic Varieties", Contract no. SCI-0398-C (A).

Lorsque $k = \mathbf{C}$, le groupe $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X})$ est le complété du groupe fondamental topologique $\pi_1(\mathrm{X})$ pour la topologie des sous-groupes d'indices finis ([G1], Exp. XII, cor. 5.2).

(1.1) On note $\mathrm{Pic}(\mathrm{X})$ le schéma de Picard de X et $\mathrm{Pic}^0(\mathrm{X})$ sa composante neutre. Lorsque X est normal, $\mathrm{Pic}^0(\mathrm{X})_{\mathrm{red}}$ est une variété abélienne ([G2], Exp. VI, cor. 3.2).

Soient V et X deux variétés connexes. Tout morphisme $f : \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ induit un morphisme $f_* : \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{V}) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X})$ ([G1], Exp. V, p. 142) et :

(1.2) f_* est surjectif si et seulement si pour tout revêtement étale connexe $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$, le revêtement étale $\mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}' \to \mathrm{V}$ est connexe ([G1], Exp. V, prop. 6.9) ;

(1.3) f_* est injectif si et seulement si pour tout revêtement étale $\mathrm{V}' \to \mathrm{V}$, il existe un revêtement étale $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ et un V-morphisme d'une composante connexe de $\mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}'$ dans V'. C'est le cas en particulier si tout revêtement étale connexe de V est isomorphe à un revêtement du type $\mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}' \to \mathrm{V}$ ([G1], Exp. V, cor. 6.8 et remarque 6.12) ;

(1.4) si f est étale, alors f_* est injectif ([G1], Exp. V, p. 142).

(1.5) Supposons V (géométriquement) *unibranche,* c'est-à-dire que pourtnut poin t v de V, le normalisé de l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathrm{V},v}$ est encore local. Alors, si $\mathrm{V}' \to \mathrm{V}$ est un revêtement étale connexe, V' est irréductible et unibranche ([GD1], 17.5.7). D'autre part, si $\tilde{\mathrm{V}} \to \mathrm{V}$ est la normalisation ; le morphisme induit $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\tilde{\mathrm{V}}) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{V})$ est un isomorphisme ([G1], Exp. IX, th. 4.10).

(1.6) Si X est une variété abélienne, le groupe $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X})$ est isomorphe à $\hat{\mathbf{Z}}^{2\dim(\mathrm{X})}$ ([G1], Exp. XI, th. 2.1). Deux variétés abéliennes isogènes ont donc des groupes fondamentaux algébriques isomorphes. Lorsque $k = \mathbf{C}$, le groupe $\pi_1(\mathrm{X})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^{2\dim(\mathrm{X})}$.

(1.7) Soient X une variété abélienne, V une variété et $f : \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ un morphisme. On appelera factorisation de f la donnée d'une variété abélienne X', d'une isogénie $q : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ et d'un morphisme $f' : \mathrm{V} \to \mathrm{X}'$ tels que $f = qf'$. On dira que f est *minimal* si, pour toute factorisation, q est un isomorphisme. Supposons que $f(\mathrm{V})$ engendre X. Le noyau du morphisme induit $f^* : \mathrm{Pic}^0(\mathrm{X}) \to \mathrm{Pic}(\mathrm{V})$ est alors fini et correspond à une isogénie $q : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ à travers laquelle f se factorise. Le morphisme induit $f' : \mathrm{V} \to \mathrm{X}'$ est alors minimal.

Si V est unibranche et $f : \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ minimal, et si $\eta : \tilde{\mathrm{V}} \to \mathrm{V}$ est la normalisation de V, le morphisme composé $\tilde{f} = f\eta$ est encore minimal. En effet, soit $\tilde{\mathrm{V}} \to \mathrm{X}' \xrightarrow{q} \mathrm{X}$ une factorisation de $\tilde{f}$. Le morphisme η se factorise alors en $\tilde{\mathrm{V}} \xrightarrow{g} \mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}' \to \mathrm{V}$. Soit V' la composante connexe de $\mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}'$ qui contient $g(\tilde{\mathrm{V}})$. Par (1.5), V' est irréductible, donc égal à $g(\tilde{\mathrm{V}})$. Le morphisme étale $\mathrm{V}' \to \mathrm{V}$ est donc un isomorphisme ; f se factorise alors à travers q, qui est donc un isomorphisme.

(1.8) Soient X une variété abélienne, V une sous-variété de X, et $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_r$ les composantes irréductibles de V. On appelle sous-variété abélienne engendrée par V, et on note $\langle \mathrm{V} \rangle$, l'intersection des sous-variétés abéliennes de X qui contiennent $\bigcup_{i=1}^r (\mathrm{V}_i - \mathrm{V}_i)$. La variété abélienne $\langle \mathrm{V} \rangle$ est la somme des variétés abéliennes $\langle \mathrm{V}_i \rangle$, pour $1 \leq i \leq r$. On dit que V engendre X si $\langle \mathrm{V} \rangle = \mathrm{X}$.

(1.9) Soient X une variété abélienne et V une sous-variété de X. On suppose qu'il existe un sous-espace linéaire L de T_0X tel que $T_0(V-v) \subset L$ pour v général dans V. Alors $T_0\langle V\rangle \subset L$. En effet, on peut supposer que V est irréductible et contient l'origine. Pour r assez grand, l'image du morphisme somme $V^r \to X$ est alors $\langle V\rangle$ et la conclusion découle du fait que le morphisme induit $V^r \to \langle V\rangle$ est lisse en un point général de V^r.

(1.10) Soient X une variété abélienne et $V_1,\dots,V_r$ des sous-variétés de X. On dit que $(V_1,\dots,V_r)$ *remplit* X si, pour toute sous-variété abélienne K de X, on a :

$$\sum_{i=1}^{r} \dim\bigl(\pi(V_i)\bigr) \geq (r-1)\dim(X/K) ,$$

où $\pi : X \to X/K$ est la surjection canonique.

(1.11) Soient X une variété abélienne et V une sous-variété irréductible de X. On dit que V est *géométriquement non-dégénérée* ([R], lemma II.12) si pour toute sous-variété abélienne K de X, on a :

$$\dim(V+K) = \min\bigl(\dim(X), \dim(V)+\dim(K)\bigr) .$$

En d'autres termes, si $\pi : X \to X/K$ est la surjection canonique, $\pi(V)$ est soit égal à X/K, soit de même dimension que V. En particulier, toute sous-variété irréductible d'une variété abélienne *simple* est géométriquement non-dégénérée. Si V est géométriquement non-dégénérée, et si W est une sous-variété de X, on vérifie que (V,W) remplit X si et seulement si $\dim(V)+\dim(W) \geq \dim(X)$.

2. Intersection de sous-variétés

Les premiers résultats sur l'intersection de deux sous-variétés quelconques d'une variété abélienne sont dus à Barth, qui a démontré dans [B1] le corollaire 2.4 ci-dessous lorsque X est simple et $r=2$.

Théorème 2.1. – *Soient X une variété abélienne et $V_1,\dots,V_r$ des sous-variétés irréductibles de X. Alors le morphisme :*

$$\begin{array}{rcl} \phi : V_1 \times \cdots \times V_r & \longrightarrow & X^{r-1} \\ (v_1,\dots,v_r) & \longmapsto & (v_2-v_1, v_3-v_1, \dots, v_r-v_1) \end{array}$$

est surjectif si et seulement si $(V_1,\dots,V_r)$ remplit X (cf. (1.10)).

Démonstration. Si $(V_1,\dots,V_r)$ ne remplit pas X, il existe une sous-variété abélienne K de X telle que $\sum_{i=1}^{r}\dim\bigl(\pi(V_i)\bigr) < (r-1)\dim(X/K)$, où $\pi : X \to X/K$ est la projection canonique. On a alors $\dim\bigl(\pi^{r-1}\phi(V_1\times\cdots\times V_r)\bigr) < \dim\bigl((X/K)^{r-1}\bigr)$, de sorte que ϕ n'est pas surjective.

Supposons maintenant que $(V_1,\dots,V_r)$ remplisse X. On raisonne par récurrence sur la dimension de X. Supposons ϕ non surjective et notons Z son image. Soit $a=(a_2,\dots,a_r)$ un point général de Z. Comme $\sum_{i=1}^{r}\dim(V_i) \geq \dim(X^{r-1}) > \dim(Z)$, il existe une sous-variété F_a de V_1 de dimension >0 telle que :

$$\phi^{-1}(a) = \{\, (v_1, v_1+a_2, \dots, v_1+a_r) \mid v_1 \in F_a \,\} .$$

On a alors $(\mathrm{F}_a + a_i) \subset \mathrm{V}_i$ pour $i \geq 2$, de sorte que $a + u_i(\mathrm{F}_a - \mathrm{F}_a) \subset \mathrm{Z}$, où $u_i : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^{r-1}$ est la $(i-1)$-ième injection canonique. Soit $\langle \mathrm{F}_a \rangle$ la sous-variété abélienne de X engendrée par F_a (*cf.* (1.8)).

Lemme 2.2. – *Pour toute sous-variété* F *de* X, *on a* $\mathrm{T}_0(\mathrm{F} - \mathrm{F}) = \mathrm{T}_0\langle \mathrm{F} \rangle$.

Démonstration. Si $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_r$ sont les composantes irréductibles de F et $0 \in (\mathrm{F}_i - \mathrm{F}_j)$, alors $\mathrm{F}_i - \mathrm{F}_j \subset \mathrm{F}_i - \mathrm{F}_i + \mathrm{F}_j - \mathrm{F}_j \subset \langle \mathrm{F} \rangle$, de sorte que $\mathrm{T}_0(\mathrm{F} - \mathrm{F}) \subset \mathrm{T}_0\langle \mathrm{F} \rangle$. Inversement, pour tout $x \in \mathrm{F}$, on a $\mathrm{T}_0(\mathrm{F} - x) \subset \mathrm{T}_0(\mathrm{F} - \mathrm{F})$, de sorte que $\mathrm{T}_0\langle \mathrm{F} \rangle \subset \mathrm{T}_0(\mathrm{F} - \mathrm{F})$ par (1.9). ■

Le lemme entraîne $\mathrm{T}_a\big(a + u_i(\langle \mathrm{F}_a \rangle)\big) \subset \mathrm{T}_a\mathrm{Z}$ pour tout $i \geq 2$, c'est-à-dire $\mathrm{T}_a(a + \langle \mathrm{F}_a \rangle^{r-1}) \subset \mathrm{T}_a\mathrm{Z}$.

Lemme 2.3. – *Soient* X *une variété abélienne et* Z *une sous-variété irréductible de* X. *On suppose que pour* a *général dans* Z, *il existe une sous-variété abélienne* K_a *de* X *telle que* $\mathrm{T}_a(a + \mathrm{K}_a) \subset \mathrm{T}_a\mathrm{Z}$. *Alors, pour tout* a *général dans* Z, *on a* $\mathrm{Z} + \mathrm{K}_a = \mathrm{Z}$.

Démonstration. Comme les sous-variétés abéliennes de X (contenant 0) sont rigides dans X, la famille $\{\mathrm{K}_a\}_{a \in \mathrm{Z}}$ est constante égale à K au-dessus d'un ouvert dense U de Z. Il existe un point (a, x) lisse sur $\mathrm{U} \times \mathrm{K}$ en lequel la différentielle du morphisme d'addition $\mathrm{Z} \times \mathrm{K} \to (\mathrm{Z} + \mathrm{K})$ est surjective. L'image de cette différentielle est par hypothèse $\mathrm{T}_{a+x}(\mathrm{Z} + x)$, de sorte que $\dim(\mathrm{Z} + \mathrm{K}) = \dim(\mathrm{Z})$, ce qui prouve le lemme. ■

Pour a général dans Z, on a donc $\mathrm{Z} + \langle \mathrm{F}_a \rangle^{r-1} = \mathrm{Z}$. Comme les images de $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_r$ dans $\mathrm{X}/\langle \mathrm{F}_a \rangle$ remplissent $\mathrm{X}/\langle \mathrm{F}_a \rangle$, l'hypothèse de récurrence entraîne $\mathrm{Z} + \langle \mathrm{F}_a \rangle^{r-1} = \mathrm{X}^{r-1}$. Cela contredit notre hypothèse $\mathrm{Z} \neq \mathrm{X}^{r-1}$ et entraîne que ϕ est surjectif. ■

Corollaire 2.4. – *Soient* X *une variété abélienne et* $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_r$ *des sous-variétés irréductibles de* X. *On suppose que* $(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_r)$ *remplit* X (*cf.* (1.10)); *alors* $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{V}_i \neq \emptyset$.

Remarque 2.5. La conclusion du corollaire ne subsiste pas en général si les variétés sont réductibles : si Y est une variété abélienne simple de dimension ≥ 2, E une courbe elliptique, C une courbe dans Y ne contenant pas l'origine, et e un point non nul de E, alors $\mathrm{V} = \mathrm{C} \times \{0\}$ et $\mathrm{W} = \big(\{0\} \times \mathrm{E}\big) \cup \big(\mathrm{Y} \times \{e\}\big)$ remplissent $\mathrm{Y} \times \mathrm{E}$, mais ne se rencontrent pas.

Corollaire 2.6. – *Soient* X *une variété abélienne et* V *et* W *deux sous-variétés irréductibles de* X. *Alors* $\mathrm{V} + \mathrm{W} = \mathrm{X}$ *si et seulement si* (V, W) *remplit* X (*cf.* (1.10)).

Corollaire 2.7. – *Soient* X *une variété abélienne et* V *et* W *des sous-variétés irréductibles de* X. *On suppose que* V *est géométriquement non-dégénérée* (*cf.* (1.11)); *alors* $\mathrm{V} + \mathrm{W}$ *est soit égal à* X, *soit de dimension* $\dim(\mathrm{V}) + \dim(\mathrm{W})$.

Démonstration. Lorsque $\dim(\mathrm{V}) + \dim(\mathrm{W}) \geq \dim(\mathrm{X})$, il découle de (1.11) et du corollaire 2.6 que $\mathrm{V} + \mathrm{W} = \mathrm{X}$. Supposons $r = \dim(\mathrm{X}) - \dim(\mathrm{V}) - \dim(\mathrm{W}) > 0$; soit C une courbe qui engendre X. La somme W' de W et de r copies de C est alors de dimension

$\dim(\mathrm{W})+r$, et le premier cas entraîne $\mathrm{V}+\mathrm{W}'=\mathrm{X}$, de sorte que $\dim(\mathrm{V}+\mathrm{W})\geq\dim(\mathrm{X})-r$ $=\dim(\mathrm{V})+\dim(\mathrm{W})$. ∎

Corollaire 2.8. – *Soient* X *une variété abélienne et* V *une sous-variété irréductible de* X *telle que* (V, V) *remplisse* X (*cf.* (1.10)). *Alors le morphisme canonique* $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{V})\to\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X})$ *est surjectif. Lorsque* $k=\mathbf{C}$, *il en est de même du morphisme* $\pi_1(\mathrm{V})\to\pi_1(\mathrm{X})$.

Démonstration. Soit $\mathrm{X}'\to\mathrm{X}$ une isogénie. Par (1.2), il s'agit de montrer que la sous-variété $\mathrm{V}\times_{\mathrm{X}}\mathrm{X}'$ de X' est connexe. Cela résulte du fait que deux quelconques de ses composantes irréductibles remplissent X', donc se rencontrent par le corollaire 2.4. Lorsque $k=\mathbf{C}$, soit Γ le $\mathbf{Z}$–module libre $\pi_1(\mathrm{X})$ (1.6). Pour tout entier $n>0$, le morphisme composé $\pi_1(\mathrm{V})\to\Gamma\to\Gamma/n\Gamma$ est alors surjectif, de sorte que le conoyau Q de $\pi_1(\mathrm{V})\to\Gamma$ est un groupe abélien de type fini qui vérifie $\mathrm{Q}=n\mathrm{Q}$ pour tout $n>0$. Il est donc nul, ce qui termine la démonstration du corollaire. ∎

Remarque 2.9. Sous les hypothèses du corollaire, le morphisme d'inclusion $\mathrm{V}\hookrightarrow\mathrm{X}$ est minimal au sens de (1.7).

3. Théorèmes de connexité

Dans un second article ([B2]), Barth s'est ensuite intéressé à la connexité de l'intersection de deux sous-variétés, soit dans une variété abélienne, soit dans l'espace projectif, obtenant ainsi des résultats qui seront ensuite généralisés et appliqués par Fulton et Hansen dans [FH] dans le cas de l'espace projectif (*cf.* [F1] et [FL] pour des compte-rendus). Notre but est d'obtenir des résultats analogues dans le cas des variétés abéliennes.

(3.1) Soient X une variété abélienne, et V et W deux sous-variétés irréductibles de X. On dira que le couple (V, W) satisfait à la condition $(*)$ si, pour toute sous-variété abélienne K de X, on a :

a) si $\mathrm{K}\neq\mathrm{X}$, alors $\dim\big(\pi(\mathrm{V})\big)+\dim\big(\pi(\mathrm{W})\big)>\dim(\mathrm{X}/\mathrm{K})$;

b) si $\pi(\mathrm{V})\neq\mathrm{X}/\mathrm{K}$, alors $\dim\big(\pi(\mathrm{V})\big)+\dim(\mathrm{W})>\dim(\mathrm{X})$;

c) si $\pi(\mathrm{W})\neq\mathrm{X}/\mathrm{K}$, alors $\dim(\mathrm{V})+\dim\big(\pi(\mathrm{W})\big)>\dim(\mathrm{X})$;

où $\pi:\mathrm{X}\to\mathrm{X}/\mathrm{K}$ est la surjection canonique. Lorsque X est simple, cette condition se réduit à l'inégalité $\dim(\mathrm{V})+\dim(\mathrm{W})>\dim(\mathrm{X})$.

Nous commençons par un résultat technique, dont la démonstration repose sur des idées de Mumford telles qu'elles sont exposées dans [FL], p. 42.

Proposition 3.2. – *Soient* X *une variété abélienne,* V, W *et* Y *des variétés irréductibles normales,* $f:\mathrm{V}\to\mathrm{X}$ *et* $g:\mathrm{W}\to\mathrm{X}$ *deux morphismes et* $p:\mathrm{Y}\to\mathrm{V}\times\mathrm{W}$ *un morphisme étale. On pose* $\mathrm{V}'=f(\mathrm{V})$ *et* $\mathrm{W}'=g(\mathrm{W})$ *et on suppose que* $(\mathrm{V}',\mathrm{W}')$ *satisfait à la condition* $(*)$ *de* (3.1). *Soient* ϕ *le morphisme* $(f,g):\mathrm{V}\times\mathrm{W}\to\mathrm{V}'\times\mathrm{W}'$ *et* $m:\mathrm{V}'\times\mathrm{W}'\to\mathrm{X}$ *le morphisme défini par* $m(v',w')=v'-w'$. *Alors le morphisme* $\mu=m\phi p$ *se factorise en* $\mathrm{Y}\xrightarrow{h}\mathrm{X}'\xrightarrow{q}\mathrm{X}$, *où* X' *est une variété abélienne,* q *une isogénie, et où les fibres de* h *sont connexes.*

Démonstration. La partie a) de la propriété $(*)$ entraîne que $(\mathrm{V}',\mathrm{W}')$ remplit X (*cf.* (1.10)), de sorte que μ est surjectif (théorème 2.1) ; considérons sa factorisation de Stein $\mathrm{Y} \xrightarrow{h} \mathrm{X}' \xrightarrow{q} \mathrm{X}$, où X' est normal, q fini surjectif, et où les fibres de h sont connexes. La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 3.3 – *On garde les notations de la proposition, mais on suppose seulement que* $\dim(\mathrm{V}')+\dim(\mathrm{W}')>\dim(\mathrm{X})$. *Soient* D *un diviseur de* X *et* Z *un diviseur irréductible de* Y *vérifiant* $\mu(\mathrm{Z})=\mathrm{D}$ *sur lequel* μ *ne soit pas lisse. Alors, soit il existe une sous-variété abélienne non nulle* K *de* X *telle que* $\mathrm{D}+\mathrm{K}=\mathrm{D}$, *soit (après échange de* V *et* W *si nécessaire)* $p(\mathrm{Z})=\mathrm{V}\times\mathrm{W}_0$, *où* W_0 *est un diviseur de* W *tel que* $\dim(\mathrm{V}')+\dim\big(g(\mathrm{W}_0)\big)<\dim(\mathrm{X})$.

Démonstration. Soit z un point général de Z ; on pose $p(z)=(v,w)$ et $a=\mu(z)$. Le morphisme $\mathrm{Z}\to\mathrm{D}$ induit par μ est lisse en z, de sorte que l'image de la différentielle $\mathrm{T}_z\mu:\mathrm{T}_z\mathrm{Y}\to\mathrm{T}_a\mathrm{X}$ contient $\mathrm{T}_a\mathrm{D}$. Comme $\mathrm{T}_z\mu$ n'est pas surjective, son image est donc $\mathrm{T}_a\mathrm{D}$.

Comme $p(\mathrm{Z})$ est un diviseur dans $\mathrm{V}\times\mathrm{W}$, on peut supposer par exemple que la projection $p(\mathrm{Z})\to\mathrm{V}$ est surjective. Le morphisme $\mathrm{V}\to\mathrm{V}'$ induit par f est alors lisse en v, donc l'image de la différentielle de ϕp en z contient $\mathrm{T}_{v'}(\mathrm{V}')\times\{0\}$, où $v'=f(v)$. Soit F_a la projection dans V' de $m^{-1}(a)\cap\phi p(\mathrm{Z})$; pour v' général dans F_a, on a alors :

$$\mathrm{T}_a\mathrm{D}=\mathrm{T}_z\mu(\mathrm{T}_z\mathrm{Y})\supset\mathrm{T}_{(v',v'-a)}m(\mathrm{T}_{v'}(\mathrm{V}')\times\{0\})=\mathrm{T}_a(\mathrm{V}'+a-v')\supset\mathrm{T}_a(\mathrm{F}_a+a-v')\,.$$

On déduit alors de (1.9) que $\mathrm{T}_a(a+\langle\mathrm{F}_a\rangle)\subset\mathrm{T}_a\mathrm{D}$. Si $\dim(\mathrm{F}_a)>0$, le lemme 2.3. entraîne qu'il existe une sous-variété abélienne non nulle K de X telle que $\mathrm{D}+\mathrm{K}=\mathrm{D}$. Si F_a est fini, le morphisme $\phi p(\mathrm{Z})\to\mathrm{D}$ induit par m est génériquement fini. On a donc $\dim\big(\phi p(\mathrm{Z})\big)=\dim(\mathrm{D})<\dim(\mathrm{V}'\times\mathrm{W}')-1$. Mais la projection $p(\mathrm{Z})\to\mathrm{V}$ est surjective ; une fibre générale est donc un diviseur de W dont l'image par g est de codimension >1 dans W'. De tels diviseurs sont en nombre fini, de sorte que $p(\mathrm{Z})=\mathrm{V}\times\mathrm{W}_0$, où W_0 est l'un de ces diviseurs, et $\dim(\mathrm{V}')+\dim\big(g(\mathrm{W}_0)\big)=\dim(\mathrm{D})<\dim(\mathrm{X})$. ■

Revenons à la proposition. Supposons q ramifié ; par le théorème de pureté ([Z]), il existe un diviseur irréductible D' de X' contenu dans le lieu de ramification de q. Posons $\mathrm{D}=q(\mathrm{D}')$. Soient Z une composante irréductible dominante de $h^{-1}(\mathrm{D}')$ et $\mathrm{Y}\xrightarrow{h'}\mathrm{Y}'\xrightarrow{q'}\mathrm{V}'\times\mathrm{W}'$ la factorisation de Stein de ϕp ; soient aussi G une composante de $(mq')^{-1}(\mathrm{D})$ qui contienne $h'(\mathrm{Z})$, et Z' une composante irréductible dominante de $h'^{-1}(\mathrm{G})$. Comme $(mq')_*\mathcal{O}_{\mathrm{Y}'}=\mu_*\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$, le morphisme mq' se factorise en $\mathrm{Y}'\xrightarrow{h''}\mathrm{X}'\xrightarrow{q}\mathrm{X}$, avec $h=h''h'$. Alors $h(\mathrm{Z}')=\mathrm{D}'$; de plus, $\phi p(\mathrm{Z}')=q'(\mathrm{G})$ est un diviseur de $\mathrm{V}'\times\mathrm{W}'$. Le lemme 3.3 entraîne que la composante neutre K du stabilisateur de D est non nulle.

Le premier paragraphe de la démonstration du lemme 3.3 montre que pour z' général dans Z', l'application tangente à μ en z' a pour image $\mathrm{T}_{\mu(z')}\mathrm{D}$. Il s'ensuit que la composée $\mathrm{Y}\xrightarrow{\mu}\mathrm{X}\xrightarrow{\pi}\mathrm{X}/\mathrm{K}$ n'est pas lisse sur Z'. Comme $\dim\big(\pi(\mathrm{V}')\big)+\dim\big(\pi(\mathrm{W}')\big)>\dim(\mathrm{X}/\mathrm{K})$ (condition $(*)$), et que le stabilisateur du diviseur D/K est fini, le lemme 3.3 entraîne que l'on a (après échange de V et W si nécessaire) $p(\mathrm{Z}')=\mathrm{V}\times\mathrm{W}_0$, où W_0 est un diviseur de W tel que $\dim\big(\pi(\mathrm{V}')\big)+\dim\big(\pi g(\mathrm{W}_0)\big)<\dim(\mathrm{X}/\mathrm{K})$.

Par construction, $\phi p(\mathrm{Z}') = \mathrm{V}' \times g(\mathrm{W}_0)$ est un diviseur de $\mathrm{V}' \times \mathrm{W}'$, de sorte que :

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{W}') &= \dim\big(g(\mathrm{W}_0)\big) + 1 \\ &\leq \dim\big(\pi g(\mathrm{W}_0)\big) + \dim(\mathrm{K}) + 1 \\ &< \dim(\mathrm{X}/\mathrm{K}) - \dim\big(\pi(\mathrm{V}')\big) + \dim(\mathrm{K}) + 1 \\ &= \dim(\mathrm{X}) - \dim\big(\pi(\mathrm{V}')\big) + 1\ .\end{aligned}$$

Comme $\pi(\mathrm{V}') \neq \mathrm{X}/\mathrm{K}$, cela contredit la partie b) de la condition $(*)$ et termine la démonstration de la proposition. ∎

Le théorème suivant généralise un résultat de Barth ([B2], Satz 2).

Théorème 3.4. – *Soient* X *une variété abélienne simple,* V *une variété irréductible,* $f : \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ *un morphisme et* W *une sous-variété irréductible de* X. *On suppose que* $\dim\big(f(\mathrm{V})\big) + 2\dim(\mathrm{W}) \geq 2\dim(\mathrm{X})$. *Alors* $f^{-1}(\mathrm{W})$ *est connexe et, si* V *est de plus unibranche, le morphisme canonique* $\pi_1^{\mathrm{alg}}\big(f^{-1}(\mathrm{W})\big) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{V})$ *est surjectif.*

Remarque 3.5. La première conclusion du théorème ne subsiste pas lorsqu'on suppose seulement $\dim\big(f(\mathrm{V})\big) + \dim(\mathrm{W}) > \dim(\mathrm{X})$, comme le montre l'exemple suivant dû à Barth ([B2]) : soient X' une variété abélienne simple de dimension 7 et V' une sous-variété de X' lisse connexe de dimension 3. Il existe un sous-groupe fini G non trivial de X' tel que $\mathrm{V}' \cap (\mathrm{V}' + \gamma)$ soit vide pour tout élément non nul γ de G. On pose $\mathrm{X} = \mathrm{X}'/\mathrm{G}$ et on note V l'image de V' dans X par la projection canonique $p : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$. Alors V est lisse et il existe une sous-variété irréductible W' de X' de dimension 5 (intersection complète de deux hypersurfaces), telle que $\mathrm{V} \cap p(\mathrm{W}')$ soit réunion de $\mathrm{Card}(\mathrm{G})$ courbes disjointes. On remarquera que l'inclusion $\mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{X}$ n'est pas *minimale* au sens de (1.7) (*cf.* corollaire 3.9). La même construction donne des exemples avec X simple de dimension quelconque, V lisse de dimension $\big[\big(\dim(\mathrm{X}) - 1\big)/2\big]$ et W de dimension $[[3\dim(\mathrm{X})/2]/2]$. La borne du théorème est donc la meilleure possible.

Démonstration du théorème. On peut supposer $\mathrm{W} \neq \mathrm{X}$, auquel cas, $\big(f(\mathrm{V}), \mathrm{W}\big)$ satisfait à la condition $(*)$ de (3.1). On note $\eta_{\mathrm{V}} : \tilde{\mathrm{V}} \to \mathrm{V}$ et $\eta_{\mathrm{W}} : \tilde{\mathrm{W}} \to \mathrm{W}$ les normalisations. Soit $\tilde{\mathrm{V}} \times \tilde{\mathrm{W}} \xrightarrow{h} \mathrm{X}' \xrightarrow{q} \mathrm{X}$ la factorisation du morphisme $(\tilde{v}, \tilde{w}) \mapsto \big(f\eta_{\mathrm{V}}(\tilde{v}) - g\eta_{\mathrm{W}}(\tilde{w})\big)$ fournie par la proposition 3.2. On note G le noyau de q, on choisit un point $\tilde{v}_0$ de $\tilde{\mathrm{V}}$, un point $\tilde{w}_0$ de $\tilde{\mathrm{W}}$, et on définit des morphismes $f' : \tilde{\mathrm{V}} \to \mathrm{X}'$ et $g' : \tilde{\mathrm{W}} \to \mathrm{X}'$ par $f'(\tilde{v}) = h(\tilde{v}, \tilde{w}_0)$ et $g'(\tilde{w}) = h(\tilde{v}_0, \tilde{w}_0) - h(\tilde{v}_0, \tilde{w})$. L'image du morphisme $(\tilde{v}, \tilde{w}) \mapsto h(\tilde{v}, \tilde{w}) - f'(\tilde{v}) + g'(\tilde{w})$ est alors contenue dans le noyau (fini) de q, donc est réduite à 0. On a donc :

$$h(\tilde{v}, \tilde{w}) = f'(\tilde{v}) - g'(\tilde{w})\ .$$

Remarquons que $f^{-1}(\mathrm{W})$ est l'image par $\eta_{\mathrm{V}} pr_1$ de $(qh)^{-1}(0) = h^{-1}(\mathrm{G})$. Il suffit donc de montrer que $pr_1 h^{-1}(\mathrm{G})$ est connexe. Pour tout $\gamma \in \mathrm{G}$, l'ensemble $pr_1 h^{-1}(\gamma) = f'^{-1}(g'(\tilde{\mathrm{W}}) + \gamma)$ est connexe. Par le corollaire 2.4, l'intersection de $f'(\tilde{\mathrm{V}})$, $g'(\tilde{\mathrm{W}}) + \gamma$ et $g'(\tilde{\mathrm{W}})$ est non vide, de sorte que $pr_1 h^{-1}(\gamma)$ rencontre $pr_1 h^{-1}(0)$. Cela entraîne que $pr_1 h^{-1}(\mathrm{G})$, donc aussi $f^{-1}(\mathrm{W})$, est connexe, ce qui termine la démonstration du premier point du théorème.

Supposons maintenant V unibranche. Soit $\pi : \mathrm{V}' \to \mathrm{V}$ un revêtement étale connexe ; V' est alors irréductible (1.5). Par (1.2), il s'agit de montrer que $f^{-1}(\mathrm{W}) \times_{\mathrm{V}} \mathrm{V}'$ est connexe. Or cela résulte du premier point, puisque cet ensemble est $(f\pi)^{-1}(\mathrm{W})$. ∎

Le théorème suivant (analogue de [FL], th. 4.1) montre que, moyennant des hypothèses supplémentaires sur les singularités des variétés, on peut obtenir des résultats plus forts.

Théorème 3.6. – *Soient* X *une variété abélienne,* V *et* W *deux variétés irréductibles et* $f : \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ *et* $g : \mathrm{W} \to \mathrm{X}$ *deux morphismes. On suppose que* V *est unibranche, que* f *est minimal au sens de* (1.7), *et que* $\big(f(\mathrm{V}), g(\mathrm{W})\big)$ *satisfait à la condition* $(*)$ *de* (3.1). *Alors* $\mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{W}$ *est connexe. Si on suppose de plus* W *unibranche, et si on note* ι *le plongement* $\mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{W} \hookrightarrow \mathrm{V} \times \mathrm{W}$ *et* $\mu : \mathrm{V} \times \mathrm{W} \to \mathrm{X}$ *le morphisme* $(v, w) \mapsto \big(f(v) - g(w)\big)$ *, alors la suite :*

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{W}) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{V} \times \mathrm{W}) \xrightarrow{\mu_*} \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X}) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Remarques 3.7. 1) La première conclusion ne subsiste pas lorsqu'on ne fait aucune hypothèse sur les singularités de V , comme le montre l'exemple de Barth (remarque 3.5).

2) La condition $(*)$ est satisfaite dans chacune des trois situations suivantes :

a) le morphisme f est surjectif et $g(\mathrm{W})$ engendre X ;

b) les sous-variétés $f(\mathrm{V})$ et $g(\mathrm{W})$ sont géométriquement non-dégénérées (*cf.* (1.11)) et $\dim(\mathrm{V}) + \dim(\mathrm{W}) > \dim(\mathrm{X})$;

c) la variété abélienne X est simple et $\dim(\mathrm{V}) + \dim(\mathrm{W}) > \dim(\mathrm{X})$.

3) La partie a) de la condition $(*)$ est évidemment nécessaire ; en revanche, je pense qu'on devrait pouvoir démontrer le théorème sans supposer b) et c).

Démonstration du théorème. Soient $\eta_{\mathrm{V}} : \tilde{\mathrm{V}} \to \mathrm{V}$ et $\eta_{\mathrm{W}} : \tilde{\mathrm{W}} \to \mathrm{W}$ les normalisations et $\tilde{\mathrm{V}} \times \tilde{\mathrm{W}} \xrightarrow{h} \mathrm{X}' \xrightarrow{q} \mathrm{X}$ la factorisation de $\mu \circ (\eta_{\mathrm{V}}, \eta_{\mathrm{W}})$ fournie par la proposition 3.2. Par (1.7), le morphisme $\tilde{\mathrm{V}} \to \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ est encore minimal, de sorte que q est un isomorphisme ; $\mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{W}$ est alors l'image de $h^{-1}(0)$ par une application continue, donc est connexe. Cela montre le premier point.

Lemme 3.8. – *Soient* X *une variété abélienne,* V *une variété irréductible unibranche et* $f : \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ *un morphisme minimal au sens de* (1.7) *dont l'image engendre* X *. Alors, le morphisme canonique* $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{V}) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X})$ *est surjectif.*

Démonstration. Si $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ est une isogénie, ce qui précède, appliqué à f et à l'isogénie $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$, montre que $\mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}'$ est connexe ; le lemme découle alors de (1.2). ∎

Le lemme entraîne que le morphisme $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{V} \times \mathrm{W}) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X})$ est surjectif. D'autre part, $\mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{W}$ est la fibre en 0 de μ , de sorte qu'on a bien un complexe.

Pour montrer l'exactitude en $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{V} \times \mathrm{W})$, on peut supposer V et W normales par (1.5) et (1.7). On se donne un revêtement étale connexe $p : \mathrm{Y} \to \mathrm{V} \times \mathrm{W}$, on pose $\mathrm{Z} = \mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{W}$ et on suppose que le revêtement étale induit $p^{-1}(\mathrm{Z}) \to \mathrm{Z}$ a une section. Par

[G1], Exp. V, prop. 6.11, il s'agit de montrer qu'il existe un revêtement étale $X' \to X$ et un morphisme $(V \times W) \times_X X' \to Y$ au-dessus de $V \times W$. Comme Y est irréductible normale (1.5), la proposition 3.2 fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & X' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ V \times W & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

où les fibres de h sont connexes et où q est une isogénie, dont on note K le noyau et k le degré. Les morphismes p et h se factorisent à travers un morphisme $\rho : Y \to (V \times W) \times_X X'$, qui, puisque $(V \times W) \times_X X'$ est connexe (par le premier point, puisque $V \times W$ est unibranche), est étale surjectif ([G1], Exp. V, prop. 3.5); on peut donc écrire $h = h'\rho$ et $p = p'\rho$. D'autre part, $p^{-1}(Z) = h^{-1}(K)$ a k composantes connexes $Y_1, \ldots, Y_k$ et les composantes connexes de $p'^{-1}(Z) = h'^{-1}(K)$ sont $\rho(Y_1), \ldots, \rho(Y_k)$, avec $\rho^{-1}\big(\rho(Y_i)\big) = Y_i$ pour tout i. Or par hypothèse, un des revêtements étales $\rho^{-1}\big(\rho(Y_i)\big) \to \rho(Y_i)$ a une section; c'est donc un isomorphisme par [G1], Exp. I, cor. 5.3. Comme $V \times W$ et $\rho^{-1}\big(\rho(Y_i)\big)$ sont connexes, cela prouve que ρ est un isomorphisme ([G1], Exp. I, cor. 10.10) et son inverse est le morphisme cherché. ∎

Corollaire 3.9. – *Soient* X *une variété abélienne,* V *une variété irréductible unibranche,* $f : V \to X$ *un morphisme et* W *une sous-variété irréductible unibranche de* X. *On suppose que* $\big(f(V), W\big)$ *satisfait à la condition* $(*)$ *de* (3.1) *et que l'inclusion* $W \hookrightarrow X$ *est minimale au sens de* (1.7). *Alors* $f^{-1}(W)$ *est connexe et le morphisme canonique* $\pi_1^{\mathrm{alg}}\big(f^{-1}(W)\big) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(V)$ *est surjectif.*

Démonstration. Le morphisme $\pi_1^{\mathrm{alg}}(W) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$ est surjectif par le lemme 3.8. Il suffit alors d'appliquer le théorème 3.6 à $W \hookrightarrow X$ et f. ∎

4. Groupe fondamental des sous-variétés

Comme dans [FL] § 5, nous appliquons le théorème de connexité à l'étude du groupe fondamental des sous-variétés d'une variété abélienne.

Proposition 4.1. – *Soient* X *une variété abélienne,* V *une variété irréductible unibranche et* $f : V \to X$ *un morphisme non ramifié. On suppose que* $f(V)$ *est géométriquement non-dégénérée* (*cf.* (1.11)) *et de dimension* $> \frac{1}{2}\dim(X)$. *Alors il existe une variété abélienne* X', *une isogénie* $q : X' \to X$ *et un plongement* $f' : V \to X'$ *tels que* $f = qf'$.

Démonstration. Soit $f : V \xrightarrow{f'} X' \xrightarrow{q} X$ une factorisation de f avec f' minimal (1.7). On suit la démonstration de [FL], p. 46 : le théorème 3.6 s'applique (remarque 3.7) et entraîne que $V \times_{X'} V$ est connexe. Comme f' est non ramifié, la diagonale Δ_V est ouverte dans $V \times_{X'} V$. Etant aussi fermée, on a $\Delta_V = V \times_{X'} V$, de sorte que f' est injective. On conclut en remarquant qu'un morphisme non ramifié injectif est un plongement ([GD2], 8.11.5 et [GD1], 17.2.6). ∎

Corollaire 4.2. – *Soient* X *une variété abélienne et* V *une sous-variété irréductible unibranche géométriquement non-dégénérée (cf.* (1.11)) *de* X *de dimension* $> \frac{1}{2}\dim(\mathrm{X})$. *Alors, le morphisme canonique* $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{V}) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X})$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Par la remarque 2.9, l'inclusion $\iota : \mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{X}$ est minimale. Soit $\pi : \mathrm{V}' \to \mathrm{V}$ un revêtement étale connexe ; V étant irréductible et unibranche, il en est de même de V′ (1.5). La proposition précédente s'applique au morphisme non ramifié $\mathrm{V}' \xrightarrow{\pi} \mathrm{V} \xhookrightarrow{\iota} \mathrm{X}$, qui se factorise donc en :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V}' \arrow[r, hook, "\iota'"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{X}' \arrow[d, "q"] \\ \mathrm{V} \arrow[r, hook, "\iota"] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

où ι' est un plongement et q une isogénie. Le morphisme induit $\mathrm{V}' \to \mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}'$ est alors un plongement étale. Comme $\mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}'$ est connexe (théorème 3.6), c'est un isomorphisme ([G1], Exp. I, cor. 5.2). Par (1.3), ceci montre l'injectivité du morphisme $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{V}) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X})$; celui-ci est d'autre part surjectif par le corollaire 2.8. ∎

Remarques 4.3. 1) J'ignore si la restriction sur les singularités de V est nécessaire.

2) Sommese a obtenu dans [So] des résultats très complets sur les groupes d'homotopie relatifs d'une sous-variété *lisse* d'une variété abélienne complexe X. Les bornes qu'il obtient font intervenir un entier k tel que le fibré normal soit k–*ample.* Ses résultats s'énoncent aisément lorsque X est simple : si V est une sous-variété lisse de X, alors $\pi_q(\mathrm{X},\mathrm{V}) = 0$ pour $q \leq 2\dim(\mathrm{V}) - \dim(\mathrm{X}) + 1$.

5. Le problème de Zariski pour les variétés abéliennes

Soient X une variété abélienne et D un diviseur de X. Le problème de Zariski est l'étude du groupe fondamental algébrique de X−D. En suivant la démarche de [F2], on va voir qu'il est possible de retrouver certains cas particuliers des résultats très généraux de [N].

On dira que le diviseur D de X est *à croisements normaux en codimension* 1 s'il existe un sous-schéma fermé Z de D de codimension 2 dans D tel que D−Z soit un diviseur à croisements normaux dans X−Z.

Théorème 5.1. – *Soient* X *une variété abélienne de dimension* > 1 *et* D *un diviseur de* X *à croisements normaux en codimension* 1. *On suppose qu'aucune composante de* D *n'est une variété abélienne ; alors le noyau du morphisme canonique* $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X}-\mathrm{D}) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X})$ *est abélien.*

Remarque 5.2. Le résultat ne subsiste pas si une composante de D est une sous-variété abélienne K de X. En effet, notons alors E la courbe elliptique X/K ; on a des surjections :

$$\mathrm{Ker}\big(\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X}-\mathrm{D})\to\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X})\big) \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}\big(\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X}-\mathrm{K})\to\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X})\big) \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}\big(\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{E}-\{0\})\to\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{E})\big)$$

Le groupe fondamental algébrique de $\mathrm{E}-\{0\}$ est isomorphe au complété profini de $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$, dont le noyau du morphisme canonique vers $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{E}) \simeq \hat{\mathbf{Z}}$ n'est pas abélien.

Démonstration du théorème. Soient V une variété irréductible normale et $f : \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ un revêtement Galoisien de groupe G, dont le discriminant est contenu dans D. Il existe une factorisation $f : \mathrm{V} \xrightarrow{f'} \mathrm{X}' \xrightarrow{q} \mathrm{X}$, où q est une isogénie et où f' est un revêtement Galoisien de groupe $\mathrm{G}' \subset \mathrm{G}$, minimal au sens de (1.7). Le diviseur $\mathrm{D}' = q^{-1}(\mathrm{D})$ de X' est encore à croisements normaux en codimension 1. Soit B une composante irréductible de D'. Nous allons montrer que $f'^{-1}(\mathrm{B})$ est irréductible.

Soit $\tilde{\mathrm{B}} \to \mathrm{B}$ la normalisation. On vérifie à l'aide du lemme d'Abhyankar ([G1], 3.6, Exp. X) que $(\tilde{\mathrm{B}} \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{V})_{\mathrm{red}}$ est non singulier en codimension 1. Comme V est normale, que f' est minimal surjectif et que B engendre X', il résulte de la remarque 3.7 et du théorème 3.6 que $\tilde{\mathrm{B}} \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{V}$ est connexe. Comme il est de plus de Cohen-Macaulay, ce schéma est irréductible ([H1]). Il en de même pour sa projection $f'^{-1}(\mathrm{B})$ sur V.

Les composantes de D' se rencontrant deux à deux, il en est de même de leurs images inverses dans V. Le lemme d'Abhyankar entraîne que les inerties correspondantes commutent deux à deux ([S]). Elles engendrent donc un sous-groupe abélien I de G'. Posons $\mathrm{X}'' = \mathrm{V}/\mathrm{I}$. Le morphisme f' se factorise en $\mathrm{V} \to \mathrm{X}'' \xrightarrow{f''} \mathrm{X}'$ et f'' est alors non ramifié en codimension 1, donc non ramifié d'après le théorème de pureté. Comme f' est minimal, f'' est un isomorphisme et $\mathrm{I} = \mathrm{G}'$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X}-\mathrm{D}) & \twoheadrightarrow & \mathrm{G} \\ \cup & & \cup \\ \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X}'-\mathrm{D}') & \twoheadrightarrow & \mathrm{G}' \end{array}$$

D'autre part, $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X}'-\mathrm{D}')$ contient le noyau N du morphisme canonique $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X}-\mathrm{D}) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X})$ ([G1], cor. 6.7, Exp. V). Il s'ensuit que l'image de N dans G est contenue dans G', donc est abélienne.

Nous avons donc montré que pour tout sous-groupe ouvert distingué Γ de $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X}-\mathrm{D})$, le groupe $\mathrm{N}/(\mathrm{N} \cap \Gamma)$ est abélien. Comme N est fermé, il s'identifie à $\varprojlim_{\Gamma} \mathrm{N}/(\mathrm{N} \cap \Gamma)$ ([Bo], III, § 7, n°2 , prop. 3). C'est donc un groupe abélien. ■

Lorsque $k = \mathbf{C}$, Nori montre dans [N] que le noyau du morphisme $\pi_1(\mathrm{X}-\mathrm{D}) \to \pi_1(\mathrm{X})$ entre groupes fondamentaux *topologiques* est abélien de type fini, et que son centralisateur est d'indice fini. On peut préciser son résultat de la façon suivante.

Proposition 5.3. – *Sous les hypothèses du théorème, et lorsque $k = \mathbf{C}$, le noyau N du morphisme canonique $\pi_1(\mathrm{X}-\mathrm{D}) \to \pi_1(\mathrm{X})$ est abélien libre de type fini.*

Remarque 5.4. Soient $\tilde{\mathrm{D}}_1, \ldots, \tilde{\mathrm{D}}_r$ les composantes irréductibles de la normalisation de D, et k_i le cardinal du noyau du morphisme $\mathrm{Pic}^0(\mathrm{X}) \to \mathrm{Pic}^0(\tilde{\mathrm{D}}_i)$. Alors le rang de N est $\sum_{i=1}^r k_i$. Lorsque les composantes du diviseur D sont normales, le rang de N est donc égal à r ; Nori montre que l'extension :

$$0 \to \mathbf{Z}^r \to \pi_1(\mathrm{X}-\mathrm{D}) \to \pi_1(\mathrm{X}) \to 0 ,$$

est *centrale* et que sa classe correspond au r-uplet des classes fondamentales des composantes de D via l'isomorphisme $\mathrm{H}^2\big(\pi_1(\mathrm{X}),\mathbf{Z}^r\big)\simeq \mathrm{H}^2(\mathrm{X},\mathbf{Z})^r$.

Démonstration de la proposition. Soit k le nombre maximum de composantes irréductibles de l'image inverse de D par une isogénie $\mathrm{X}'\to\mathrm{X}$. On vérifie que ce nombre est fini et qu'il se calcule comme dans la remarque ci-dessus. Les inerties étant cycliques, la démonstration du théorème montre que tout quotient fini de N (donc aussi N) peut être engendré par k éléments. Soit $q:\mathrm{X}'\to\mathrm{X}$ une isogénie telle que $\mathrm{D}'=q^{-1}(\mathrm{D})$ ait k composantes. On vérifie que N est isomorphe au noyau N' du morphisme $\pi_1(\mathrm{X}'-\mathrm{D}')\to\pi_1(\mathrm{X}')$. D'autre part, il existe une surjection de N' sur le noyau de $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}'-\mathrm{D}',\mathbf{Z})\to\mathrm{H}_1(\mathrm{X}',\mathbf{Z})$. Un argument classique de dualité montre que ce dernier est isomorphe au conoyau du morphisme $\mathrm{H}_2(\mathrm{X}',\mathbf{Z})\to\mathrm{H}^{2\dim(\mathrm{D}')}(\mathrm{D}',\mathbf{Z})\simeq\mathbf{Z}^k$, qui envoie γ sur $\big(d_1(\gamma),\dots,d_k(\gamma)\big)$, où $d_1,\dots,d_k$ sont les classes fondamentales des composantes de D'. Soit m un entier ; on note D'' l'image inverse de D' par la multiplication par m. Les composantes de D'' sont les images inverses de celles de D', donc leurs classes sont divisibles par m^2. De nouveau, N' est isomorphe au noyau N'' du morphisme $\pi_1(\mathrm{X}'-\mathrm{D}'')\to\pi_1(\mathrm{X}')$ et il ressort de ce qui précède qu'il existe une surjection de N'' sur $\mathbf{Z}^k/(m^2,\dots,m^2)$. Ceci étant vrai pour tout m, il existe une surjection de N sur $\mathbf{Z}^k$. Comme N est engendré par k éléments, il est isomorphe à $\mathbf{Z}^k$. ∎

6. Revêtements des sous-variétés des variétés abéliennes

Suivant toujours [FL], on s'intéresse maintenant aux variétés qui sont revêtements finis ramifiés de petit degré d'une sous-variété d'une variété abélienne simple. Pour énoncer notre résultat, dont la démonstration est calquée sur celle du théorème principal de [GL], nous utiliserons la notion de *degré local* d'un morphisme fini $f:\mathrm{V}\to\mathrm{W}$ en un point $v\in\mathrm{V}$, telle qu'elle est définie dans [GL] et [Mu2]. Intuitivement, c'est le nombre de feuillets de f qui se rejoignent en v. On le note $e_f(v)$.

Théorème 6.1. – *Soient* X *une variété abélienne simple,* W *une sous-variété lisse de* X, V *une variété irréductible normale et* $f:\mathrm{V}\to\mathrm{W}$ *un revêtement fini de degré* d. *On suppose le morphisme composé* $\mathrm{V}\to\mathrm{W}\hookrightarrow\mathrm{X}$ *est minimal au sens de* (1.7). *Alors il existe un point* $v\in\mathrm{V}$ *tel que :*

$$e_f(v)\geq\min\big(d,2\dim(\mathrm{W})-\dim(\mathrm{X})+1\big)\ .$$

Démonstration. Pour tout entier l, l'ensemble :

$$\mathrm{R}_l=\{v\in\mathrm{V}\ \big|\ e_f(v)>l\}$$

est fermé dans V ([GL], lemma 1). De plus, comme W est lisse, le théorème 2.2 de [L2] (*cf.* aussi [GL], p. 58), entraîne que R_l est soit vide, soit partout de codimension $\leq l$ dans V. Il s'agit de montrer que R_l est non vide pour $l\leq\min\big(d-1,2\dim(\mathrm{W})-\dim(\mathrm{X})\big)$. Nous procédons par récurrence sur l. On a $\mathrm{R}_0=\mathrm{V}$; on suppose que R_{l-1} est non vide, et on en choisit une composante irréductible R. La projection $\mathrm{V}\times_{\mathrm{X}}\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ est finie, de sorte que la diagonale Δ_{R} est une composante irréductible de $\mathrm{V}\times_{\mathrm{X}}\mathrm{R}$. Comme :

$$\dim(\mathrm{R})\geq\dim(\mathrm{V})-(l-1)\geq\dim(\mathrm{V})-2\dim(\mathrm{W})+\dim(\mathrm{X})+1>\dim(\mathrm{X})-\dim(\mathrm{V})\ ,$$

le théorème 3.6 entraîne que $V \times_X R$ est connexe. Si $V \times_X R = \Delta_R$, alors $R \subset R_{d-1} \subset R_l$, ce qui permet de conclure. Sinon, il existe une composante irréductible T de $V \times_X R$ distincte de Δ_R, qui rencontre la diagonale. Comme dans [GL], p. 57, on conclut que pour tout point (v,v) de $T \cap \Delta_R$, on a $e_f(v) > l$, c'est-à-dire $v \in R_l$. ■

Corollaire 6.2. – *Soient* X *une variété abélienne simple,* W *une sous-variété lisse de* X*,* V *une variété irréductible unibranche et* $f : V \to W$ *un revêtement fini de degré* $d \leq 2\dim(W) - \dim(X)$*. Alors, le morphisme canonique* $\pi_1^{\mathrm{alg}}(V) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$ *est injectif et son image est isomorphe à* $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$*.*

Démonstration. Par (1.5), on peut supposer V normale. Toute isogénie $X' \to X$ induit une injection $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X') \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$ (1.4) dont l'image est isomorphe à $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$ (1.6). On peut donc supposer que le morphisme composé $g : V \to W \hookrightarrow X$ est minimal. Soit $\pi : V' \to V$ un revêtement étale connexe; V étant irréductible et normale, il en est de même de V' (1.5). Soit $V' \xrightarrow{g'} X' \xrightarrow{p} X$ une factorisation de $g\pi$ avec g' minimal (1.7). Posons $W' = g'(V')$, et notons $f' : V' \to W'$ le revêtement induit et d' son degré. Le théorème s'applique à f' et il existe $v' \in V'$ tel que :

$$e_{f'}(v') \geq \min\big(d', 2\dim(W') - \dim(X') + 1\big) .$$

Comme p et π sont étales et que d est le degré de f, on a :

$$e_{f'}(v') = e_{pf'}(v') = e_{f\pi}(v') = e_f\big(\pi(v')\big) \leq d .$$

Comme $d \leq 2\dim(W) - \dim(X)$, il s'ensuit que $d \geq d'$, donc que :

$$\deg(\pi) \leq \deg(p_{|W'}) \leq \deg(p) .$$

Or π se factorise à travers le morphisme étale $V \times_X X' \to V$, qui est de même degré que p. Comme $V \times_X X'$ est connexe (théorème 3.6) donc irréductible (1.5), le morphisme induit $V' \to V \times_X X'$ est un isomorphisme. Par (1.3), cela démontre le corollaire. ■

Remarque 6.3. La conclusion du corollaire ne subsiste en général pas sans hypothèse sur les singularités de V, comme le montre la construction de [FL], note (2), p. 56.

Corollaire 6.4. – *Soient* X *une variété abélienne simple,* W *une sous-variété lisse de* X*,* V *une variété irréductible et* $f : V \to W$ *un revêtement fini de degré* d*. Si* V_1 *et* V_2 *sont deux sous-variétés de* V *telles que :*

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) \geq 2\dim(X) - \dim(V) + d - 1 ,$$

alors $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$*. En particulier, tout morphisme de* V *dans une variété de dimension* $\leq 3\dim(V) - 2\dim(X) - d$ *est constant.*

Démonstration du corollaire. La démonstration suit celle de [L1], remarque 2.3. On peut supposer V normale, V_1 et V_2 irréductibles, et $d \leq 3\dim(W) - 2\dim(X)$. Par le théorème 6.1 et le résultat de [L2] utilisé plus haut, il existe une sous-variété irréductible R de V de codimension $\leq d-1$ telle que f soit bijective au-dessus de $f(R)$. Le corollaire 2.4 entraîne alors que $f(V_1)$, $f(V_2)$ et $f(R)$ se rencontrent, donc aussi V_1, V_2 et R. La dernière assertion en résulte immédiatement : si $V \to T$ est surjectif et si $\dim(T) > 0$, il suffit de prendre pour V_1 l'image inverse d'un diviseur et pour V_2 l'image inverse d'un point hors de ce diviseur. ■

La démonstration du théorème suivant suit celle d'un résultat analogue de Lazarsfeld.

Théorème 6.5. – *Soient* X *une variété abélienne,* V *une variété irréductible unibranche et* $f : V \to X$ *un morphisme. On suppose qu'il existe une sous-variété irréductible* Z *de* $f(V)$ *telle que* $\big(Z, f(V)\big)$ *satisfasse à la condition* $(*)$ *de* (3.1) *et que le morphisme induit* $f^{-1}(Z) \to Z$ *soit une bijection ensembliste. Alors, le morphisme canonique* $\pi_1^{\mathrm{alg}}(V) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$ *est bijectif.*

Remarque 6.6. Le théorème reste vrai lorsque Z est *localement fermée*, pourvu que f soit *fini* (*cf.* [F3], p. 151).

Démonstration. Le morphisme f est minimal. Soit $\tilde{Z}$ la normalisation de Z ; on pose $Z' = \tilde{Z} \times_X V$. Nos hypothèses entraînent que le morphisme induit $Z'_{\mathrm{red}} \to \tilde{Z}$ est fini et birationnel; c'est donc un isomorphisme par le théorème principal de Zariski ([GD2], 8.12.10.1). Le morphisme $\pi_1^{\mathrm{alg}}(Z'_{\mathrm{red}}) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(Z')$ étant surjectif (1.2), l'intersection de l'image du morphisme :

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(Z') \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(\tilde{Z} \times V) \simeq \pi_1^{\mathrm{alg}}(\tilde{Z}) \times \pi_1^{\mathrm{alg}}(V)$$

avec $\{1\} \times \pi_1^{\mathrm{alg}}(V)$ est réduite à $\{(1,1)\}$. Comme cette image est le noyau du morphisme canonique $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\tilde{Z} \times V) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$ (théorème 3.6), il s'ensuit que le morphisme $\pi_1^{\mathrm{alg}}(V) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$ est injectif. Il est d'autre part surjectif par le lemme 3.8, ce qui conclut la démonstration. ∎

On termine ce chapitre avec la démonstration d'un résultat analogue à un théorème de Ein sur les revêtements des espaces projectifs. C'est une conséquence directe de résultats puissants de Kawamata et Mori, mais je pense qu'il devrait exister une démonstration plus simple à base de connexité.

Théorème 6.7. – *Soient* X *est une variété abélienne simple,* V *une variété lisse et* $f : V \to X$ *un revêtement fini ramifié. Alors la ramification de* f*, c'est-à-dire le faisceau canonique de* V*, est ample.*

Remarque 6.8. Le théorème 3.6 entraîne que la ramification de f rencontre toute courbe de V.

Démonstration. Par [K1], th. 13, il existe une sous-variété abélienne Y de X, un morphisme fini $W \to X/Y$ avec $\kappa(V) = \dim(W)$, et des revêtements étales $\tilde{Y} \to Y$ et $\tilde{Y} \times W \to V$. Comme X est simple, on a soit $Y = X$, auquel cas f est étale, ce qui contredit l'hypothèse; soit $Y = 0$, et $\kappa(V) = \dim(V)$, de sorte que V est de type général. Le théorème découle alors du résultat suivant. ∎

Théorème 6.9. (Kawamata) – *Soit* V *une variété projective lisse de type général qui ne contient pas de courbe rationnelle. Alors* K_V *est ample.*

Démonstration. On suit [Ko]. Par [M], th. 1.4, soit V contient une courbe rationnelle, soit K_V est nef. Dans le second cas, il découle de [CKM], (9.3), que le système linéaire $|mK_V|$ est sans point base pour $m \gg 0$, donc définit un morphisme ϕ_m génériquement fini sur son image. Si ϕ_m est fini, K_V est ample; sinon, il contracte une courbe C, qui vérifie alors $C \cdot K_V = 0$. Soit H un diviseur très ample sur V ; son image $\phi_m(H)$ est contenue dans une hypersurface de degré r, de sorte qu'il existe un diviseur effectif E tel que $rm\mathrm{K}_{\mathrm{V}} \equiv \mathrm{H} + \mathrm{E}$. On a donc $\mathrm{C} \cdot \mathrm{E} < 0$. Il existe ϵ rationnel positif tel que le diviseur $\mathrm{K}_{\mathrm{V}} + \epsilon\mathrm{E}$ soit *log-canonique* ([KMM], lemma 0-2-15). Comme $(\mathrm{K}_{\mathrm{V}} + \epsilon\mathrm{E}) \cdot \mathrm{C} < 0$, le théorème du cône (*loc.cit.*, th. 4-2-1) entraîne qu'il existe un rayon extrêmal et un morphisme de contraction (*loc.cit.*, th. 3-2-1) $g : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, auquel on peut appliquer [K2], th. 1 : le lieu des points où g n'est pas un isomorphisme est recouvert par des courbes rationnelles. ∎

7. Conjecture

Une démonstration de la conjecture suivante permettrait d'utiliser les résultats de Lazarsfeld ([L1], th. 2.1, prop. 3.1), et entraînerait en particulier notre théorème 6.1 sur les indices de ramification.

Conjecture 7.1. *Soient* X *une variété abélienne simple,* V *une variété lisse et* $f : \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ *un revêtement fini, minimal au sens de* (1.7). *On définit un faisceau localement libre* E *sur* X *comme le dual du noyau de la trace* $\mathrm{Tr}_{\mathrm{V}/\mathrm{X}} : f_*\mathcal{O}_{\mathrm{V}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$. *Alors* E *est ample.*

La conjecture est vraie lorsque X est une courbe elliptique. En effet, par un théorème de Hartshorne ([H2]), il suffit de démontrer que tout faisceau inversible L quotient de E est de degré > 0. Soit L un tel faisceau ; on a alors :

$$0 < h^0(\mathrm{X}, \mathrm{E}^\vee \otimes \mathrm{L}) = h^0(\mathrm{X}, f_*\mathcal{O}_{\mathrm{V}} \otimes \mathrm{L}) - h^0(\mathrm{X}, \mathrm{L}) = h^0(\mathrm{V}, f^*\mathrm{L}) - h^0(\mathrm{X}, \mathrm{L}) .$$

Cela entraîne en particulier $h^0(\mathrm{V}, f^*\mathrm{L}) > 0$. Si $\deg(\mathrm{L}) \leq 0$, alors $\deg(f^*\mathrm{L}) \leq 0$ et $f^*\mathrm{L}$ est donc trivial. On a alors $h^0(\mathrm{V}, f^*\mathrm{L}) = 1$ et $h^0(\mathrm{X}, \mathrm{L}) = 0$, donc $\mathrm{L} \not\simeq \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$, ce qui contredit l'injectivité de f^*. On a donc $\deg(\mathrm{L}) > 0$.

On peut voir cette conjecture comme une forme forte d'un théorème de connexité : supposons E ample ; si W est une variété irréductible de dimension > 0 et si $g : \mathrm{W} \to \mathrm{X}$ est un morphisme fini, alors $g^*\mathrm{E}$ est ample, donc $\mathrm{H}^0(\mathrm{W}, g^*\mathrm{E}^\vee) = 0$. Si on pose $\mathrm{W}' = \mathrm{V} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{W}$, cela se traduit par $h^0(\mathrm{W}', \mathcal{O}_{\mathrm{W}'}) = h^0(\mathrm{W}, \mathcal{O}_{\mathrm{W}}) = 1$, qui est évidemment plus fort que la connexité de W' (assurée par le théorème 3.6).

References

[B1] Barth, W., *Fortsetzung meromorpher Funktionen in Tori und Komplexprojektiven Räumen,* Invent. Math **5** (1968), 42–62.

[B2] Barth, W., *Verallgemeinerung des bertinischen Theorems in abelschen Mannigfaltigkeiten,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie IV, **23** (1969), 317–330.

[Bo] Bourbaki, N., Topologie Générale, Hermann, 1960.

[CKM] Clemens, H., Kollár, J., Mori, S., *Higher Dimensional Complex Geometry,* Astérisque 166.

[F1] Fulton, W., On the Topology of Algebraic Varieties, in *Algebraic Geometry,* Bowdoin 1985, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **46**, Part 1, 1987.

[F2] Fulton, W., *On the Fundamental Group of the Complement of a Node Curve,* Ann. Math. **11** (1980), 407–409.

[F3] Fulton, W., On Nodal Curves, in *Algebraic Geometry – Open Problems,* Proceedings, Ravello 1982, Springer Lecture Notes in Mathematics 977.

[FH] Fulton, W., Hansen, J. *A Connectedness Theorem for Projective Varieties, with Applications to Intersections and Singularities of Mappings,* Ann. of Math. **110** (1979), 159–166.

[FL] Fulton, W., Lazarsfeld, R., Connectivity and its Applications in Algebraic Geometry, in *Algebraic Geometry,* Proceedings of the Midwest Algebraic Geometry Conference, Chicago 1980, Springer Lecture Notes 862.

[GL] Gaffney, T., Lazarsfeld, R., *On the Ramification of Branched Coverings of* $\mathbf{P}^n$, Invent. Math. **59** (1980), 53–58.

[G1] Grothendieck, A., *Revêtements Etales et Groupe Fondamental,* S.G.A. 1, Springer Lecture Notes 224.

[G2] Grothendieck, A., *Fondements de la Géométrie Algébrique,* Séminaire Bourbaki 1957–1962.

[GD1] Grothendieck, A., Dieudonné, J., *Eléments de Géométrie Algébrique IV, 4,* Publ. Math. I.H.E.S. 32, 1967.

[GD2] Grothendieck, A., Dieudonné, J., *Eléments de Géométrie Algébrique IV, 3,* Publ. Math. I.H.E.S. 28, 1966.

[H1] Hartshorne, R., *Complete Intersections and Connectedness,* Amer. J. Math. **84** (1962), 497–508.

[H2] Hartshorne, R., *Ample vector bundles on curves,* Nagoya Math. J. **43** (1971), 73–89.

[KMM] Kawamata, Y., Matsuda, K., Matsuki, K., Introduction to the Minimal Model Problem, in *Algebraic Geometry,* Sendai 1985, Oda, T., editor, Adv. Stud. Pure Math. **10**, Tokyo, 1987.

[K1] Kawamata, Y., *Characterization of Abelian Varieties,* Comp. Math. **43** (1981), 253–276.

[K2] Kawamata, Y., *On the Length of an Extremal Rational Curve,* Inv. Math. **105** (1991), 609–611.

[Ko] Kollár, J., *Shafarevich Maps and Automorphic Forms,* preprint.

[L1] Lazarsfeld, R., *A Barth-Type Theorem for Branched Coverings of Projective Space,* Math. Ann. **249** (1980), 153–162.

[L2] Lazarsfeld, R., Ph.D. thesis, Brown University, June 1980.

[M] Mori, S., *Threefolds whose Canonical Bundles are not Numerically Effective,* Ann. Math. **116** (1982), 133–176.

[Mu1] Mumford, D., *Abelian Varieties,* Oxford University Press, 1974.

[Mu2] Mumford, D., *Algebraic Geometry I. Complex Projective Varieties,* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 221, Springer Verlag, 1976.

[N] Nori, M., *Zariski's conjecture and related problems,* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **16** (1983), 305–344.

[R] Ran, Z., *On subvarieties of abelian varieties,* Invent. Math.**62** (1981), 459–479.

[S] Serre, J.-P., *Revêtements ramifiés du plan projectif (d'après S. Abhyankar),* Séminaire Bourbaki, Exp. 204, 1960.

[So] Sommese, A., *Complex Subspaces of Homogeneous Complex Manifolds II. Homotopy Results,* Nagoya Math. J. **86** (1982), 101–129.

[Z] Zariski, O., *On the Purity of the Branch Locus of Algebraic Functions,* Proc. Nat. Acad. Sci. **44** (1958), 791–796.

Olivier Debarre
Department of Mathematics
The University of Iowa
Iowa City, IA 52242
e-mail : debarre@math.uiowa.edu