

## Sous-variétés de codimension 2 d'une variété abélienne

Olivier DEBARRE

*Résumé* – Soit  $(X, \theta)$  une variété abélienne principalement polarisée complexe. On étudie les sous-variétés  $V$  de  $X$  dont la classe est  $d\theta^2/2$  ( $d$  entier). Supposons  $(X, \theta)$  générale de dimension  $\geq 11$  ; lorsque  $d$  est impair,  $V$  est (très) singulière ; lorsque  $d$  est pair  $\leq 16$  et que  $V$  est lisse,  $V$  est (presque) une intersection complète.

### Subvarieties of codimension 2 of an abelian variety

*Abstract* – Let  $(X, \theta)$  be a complex principally polarized abelian variety. Subvarieties of  $X$  with class  $d\theta^2/2$  ( $d$  integer) are studied. Assume  $(X, \theta)$  is general of dimension  $\geq 11$  ; when  $d$  is odd,  $V$  is (very) singular ; when  $d$  is even  $\leq 16$  and  $V$  is smooth,  $V$  is (almost) a complete intersection.

Soit  $(X, \theta)$  une variété abélienne principalement polarisée complexe de dimension  $n$ . Pour tout entier  $j$ , on note  $\theta_j$  la classe de cohomologie entière  $\theta^j/j!$  ; on s'intéresse aux sous-variétés de  $X$  de classe  $d\theta_2$  ( $d$  entier). Quand  $(X, \theta)$  est générale, toute sous-variété de  $X$  de codimension 2 a cette propriété ([8]). On trouve de telles sous-variétés avec  $d$  impair sur les jacobiniennes de courbes ; par ailleurs, si  $X$  contient une courbe irréductible  $C$  de classe  $c\theta_{n-1}$  avec  $c$  impair (il existe des exemples qui ne sont pas des jacobiniennes), la somme de  $n-2$  copies de  $C$  dans  $X$  a pour classe  $c^{n-2}\theta_2$  et son lieu singulier est de dimension  $\geq n-6$  ([3], prop. 4.7). Pour  $(X, \theta)$  générale, la question de l'existence pour  $d$  impair peut se reformuler de façon plus frappante :  $\theta_2$  est-elle la classe d'un cycle algébrique ? Sans répondre à cette question, on montre dans cette Note que, pour  $(X, \theta)$  générale de dimension  $n \geq 7$ , toute sous-variété de  $X$  de classe  $d\theta_2$ ,  $d$  impair, est singulière et son lieu singulier est de dimension  $\geq n/3 - 2 \log_2 n$ . On montre aussi que sur une variété abélienne principalement polarisée  $(X, \theta)$  quelconque de dimension  $\geq 8$ , il n'y a pas de fibré vectoriel topologique de rang 2 et seconde classe de Chern  $d\theta_2$ ,  $d$  impair.

Pour  $d$  pair, on cherche un analogue de la conjecture de Hartshorne sur les sous-variétés de l'espace projectif. On dira qu'une sous-variété de  $X$  de codimension 2 est une *intersection presque complète* si c'est le lieu des zéros d'une section d'un fibré sur  $X$  extension de deux fibrés en droites. On montre que, pour  $(X, \theta)$  générale de dimension  $\geq 11$ , toute sous-variété lisse de  $X$  de classe  $e\theta^2$ ,  $e \leq 8$ , est une intersection presque complète.

1. PRÉLIMINAIRES – Soit  $A^\bullet$  une algèbre graduée sur  $\mathbf{Q}$ . Si  $c_1 \in A^1$  et  $c_2 \in A^2$ , on note  $p_n(c_1, c_2)$  le terme de degré  $n$  du caractère de Chern : si on écrit formellement  $c_1 = \lambda + \mu$  et  $c_2 = \lambda\mu$ , on a  $p_n(c_1, c_2) = (\lambda^n + \mu^n)/n!$ . Fixons  $\theta \in A^1$  ; pour tous entiers  $j$ ,  $d$  et  $t$ , et  $\ell \in A^1$ , on pose  $\ell_j = \ell^j/j!$  et  $p_n(\ell, d, t) = p_n(\ell - 2t\theta, d\theta_2 - t\ell\theta + t^2\theta^2)$ . Pour tout réel  $x$ , on note  $[x]$  le plus grand entier  $\leq x$  et  $\lceil x \rceil$  le plus petit entier  $\geq x$ . Soient  $R$  le localisé de

$\mathbf{Z}$  en l'idéal premier (2), vu comme un sous-anneau de  $\mathbf{Q}$ , et  $2\mathbf{R}$  son idéal maximal. Un calcul fastidieux montre la formule suivante

$$(1) \quad p_n(\ell, d, t) = \sum_{\substack{0 \leq h \leq n \\ 0 \leq j \leq h/2}} (-1)^{h-j} t^{h-2j} 2^{-\lceil (n-h)/2 \rceil - j + 1} d^j \ell_{n-h} \theta_h \binom{h}{2j} \rho_{j, n-h},$$

où  $\rho_{j, n-h}$  est dans  $2\mathbf{R}$ , sauf lorsque  $h = n$ , auquel cas il vaut 1.

Soient  $(X, \theta)$  une variété abélienne principalement polarisée de dimension  $n$ ,  $\Theta$  un diviseur thêta et  $X'$  une intersection complète générale dans  $X$  de  $s$  éléments de  $|3\Theta|$ .

PROPOSITION 2.— Soit  $\ell \in H^2(X, \mathbf{Z})$ . S'il existe un fibré vectoriel topologique  $\mathbf{E}$  de rang 2 sur  $X'$  avec  $c_1(\mathbf{E}) = \ell|_{X'}$  et  $c_2(\mathbf{E}) = (d\theta_2)|_{X'}$ , le rationnel  $\Delta^s p_n(\ell, d) = \sum_{i=0}^s (-1)^i \binom{s}{i} p_n(\ell, d, 3i)$  est entier.

Le caractère de Chern  $ch(\mathbf{E})$  est la restriction à  $X'$  d'une classe  $ch_X(\mathbf{E}) \in H^\bullet(X, \mathbf{Z})$ . L'analogie du théorème de Riemann-Roch pour les fibrés topologiques ([6], th. 24.5.4) montre que  $\int_{X'} td(TX') ch(\mathbf{E})$  est entier; or ce nombre vaut  $\sum_{i=0}^s (-1)^s \binom{s}{i} \int_X ch_X(\mathbf{E}) ch(\mathcal{O}_X(-3i\Theta))$ . Puisque  $\int_X ch_X(\mathbf{E}) ch(\mathcal{O}_X(-3i\Theta)) = p_n(\ell, d, 3i)$ , ceci démontre le lemme. ■

Soient maintenant  $V$  une sous-variété de  $X$  de classe  $d\theta_2$  et  $s$  un entier  $> \dim(\text{Sing}(V))$ , de sorte que l'intersection  $V' = V \cap X'$  est lisse, contenue dans le lieu lisse de  $V$ .

PROPOSITION 3.— Si  $\text{NS}(X) \simeq \mathbf{Z}\theta$  et  $0 \leq s \leq n - 6$ , il existe un fibré vectoriel (algébrique)  $\mathbf{E}$  de rang 2 sur  $X'$  vérifiant  $c_2(\mathbf{E}) = (d\theta_2)|_{X'}$ .

Puisque  $X$  est simple, le fibré normal  $N_{V'/X'}$ , restriction de  $N_{V/X}$  à  $V'$ , est ample (cf. [3], prop. 1.1). Puisque  $s \leq n - 6$ , le théorème 4.5 de *loc.cit.* entraîne qu'il existe un fibré en droites  $L$  sur  $X$  dont la restriction à  $V'$  est  $\wedge^2 N_{V'/X'}$ . L'hypothèse  $\text{NS}(X) \simeq \mathbf{Z}\theta$  assure que  $H^2(X', L_{|X'}^*) = 0$ . On peut donc effectuer la construction de Serre ([4], p. 153). ■

Remarque 4. — Dans une jacobienne générale  $(JC, \theta)$  de dimension  $n \geq 6$ , la sous-variété  $V = W_{n-2}(C)$  a pour classe  $\theta_2$  et son lieu singulier est de dimension  $n - 6$ . Pour  $3 \leq n \leq 5$ ,  $V$  est lisse, mais n'est pas sous-canonique dans  $X$  : on a  $c_1(\omega_V) = x + \theta$ , où  $x$  est la classe de  $W_{n-3}(C)$  dans  $V$  ([7]).

2. SOUS-VARIÉTÉS DE CLASSE  $d\theta_2$ ,  $d$  IMPAIR — Soient comme ci-dessus  $(X, \theta)$  une variété abélienne principalement polarisée de dimension  $n$ ,  $\Theta$  un diviseur thêta et  $X'$  une intersection complète générale dans  $X$  de  $s$  éléments de  $|3\Theta|$ .

THÉORÈME 5.— Pour  $n \geq 4$ ,  $n \neq 6, 7$  et  $s \leq n - 4\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ , il n'existe pas sur  $X'$  de fibré vectoriel topologique de seconde classe de Chern  $(d\theta_2)|_{X'}$ ,  $d$  impair.

Soit  $\mathbf{E}$  un tel fibré; d'après le théorème de Lefschetz, il existe  $\ell \in H^2(X, \mathbf{Z})$  avec  $c_1(\mathbf{E}) = \ell|_{X'}$ . Par la proposition 2,  $\Delta^{s'} p_n(\ell, d)$  est entier pour  $s \leq s' \leq n$ , en particulier pour  $s' = n - 4\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ . En utilisant la formule (1), on montre qu'il existe  $\nu(n) > 0$  tel que l'entier (pair)  $2^{\nu(n)} \Delta^{s'} p_n(\ell, d)$  soit congru à  $d$  modulo  $2\mathbf{R}$ , ce qui contredit le fait que  $d$  est impair. ■

THÉORÈME 6.— Soit  $(X, \theta)$  une variété abélienne principalement polarisée de dimension  $n \geq 7$  vérifiant  $\text{NS}(X) \simeq \mathbf{Z}\theta$ . Toute sous-variété  $V$  de  $X$  de classe  $d\theta_2$ ,  $d$  impair, est singulière et son lieu singulier est de dimension  $\geq n/3 - 2 \log_2 n$ .

Supposons  $n \geq 30$  ; posons  $t_n = \lceil n/3 - 2 \log_2 n \rceil$  et supposons  $\dim(\text{Sing}(V)) < t_n$ . Posons  $m = \lfloor (n - t_n)/4 \rfloor$  et  $s = n - 4m$  ; on a  $s > \dim(\text{Sing}(V))$  et  $s \leq n - 6$ . Soit  $E$  le fibré vectoriel sur  $X'$  fourni par la proposition 3. On a  $c_1(E) = a\theta|_{X'}$ , et, par la proposition 2,  $\Delta^s p_n(a\theta, d)$  est entier. On peut vérifier que  $s \leq 2m - \log_2(6m - 4)$ , ce qui contredit le lemme suivant.

LEMME 7.- *Si  $m > 0$  et  $s \leq 2m - \log_2(6m - 4)$ ,  $\Delta^s p_{4m+s}(a\theta, d)$  n'est pas entier.*

La formule (1) exprime  $\Delta^s p_{4m+s}(a\theta, d)$  comme une somme dont une analyse minutieuse des termes montre qu'il n'y en a qu'un de valuation en 2 minimale : il correspond à  $h = 4m + s$  et  $j = 2m$  et est le produit de  $((4m + s)!/(4m)!) 2^{-2m+1}$  par une unité de  $\mathbb{R}$ . L'hypothèse sur  $s$  entraîne que  $2^{2m-1}$  ne divise pas  $(4m + s)!/(4m)!$ , de sorte que cette valuation est strictement négative. ■

Pour les petites valeurs de  $n$ , des arguments similaires donnent les bornes inférieures suivantes  $s_n$  sur la dimension du lieu singulier de  $V$  :

$n$	$s_n$	$n$	$s_n$	$n$	$s_n$	$n$	$s_n$	$n$	$s_n$	$n$	$s_n$	$n$	$s_n$	$n$	$s_n$
7	0	10	2	13	1	16	2	19	5	22	6	25	5	28	8
8	0	11	2	14	2	17	1	20	4	23	7	26	6	29	9
9	1	12	2	15	4	18	2	21	5	24	6	27	9	30	10

En particulier,  $V$  est singulière pour  $n \leq 30$ . Puisque  $t_n \leq 0$  pour  $n < 30$  et  $t_n \geq 0$  pour  $n \geq 30$ , cela montre le théorème. ■

3. SOUS-VARIÉTÉS DE CLASSE  $d\theta_2$ ,  $d$  PAIR – Soit  $(X, \theta)$  une variété abélienne principalement polarisée ; une sous-variété  $V$  de  $X$  de codimension 2 est une *intersection presque complète* si c'est le lieu des zéros d'une section  $\sigma$  d'un fibré  $E$  extension de fibrés en droites  $M'$  et  $M$  sur  $X$ . Si  $M \not\simeq M'$ , l'extension est scindée et  $V$  est une intersection complète. Si  $M \simeq M'$ , que  $e_E \in H^1(X, \mathcal{O}_X) \simeq \text{Ext}^1(M, M)$  est la classe de l'extension, et que  $s$  est l'image de  $\sigma$  dans  $H^0(X, M)$ ,  $V$  est contenue dans le diviseur  $Z(s)$  de  $s$  et est le lieu des zéros d'une section de  $M|_{Z(s)}$ . Une telle section peut s'écrire  $s' + Ds$ , avec  $s' \in H^0(X, M)$  et  $D \in H^0(X, TX)$  (cf. [1] pour la définition de  $Ds$ ), et  $V$  peut être décrite par les « équations »  $s = s' + Ds = 0$ , où  $D \cup c_1(M) \in \mathbb{C}e_E$ .

THÉORÈME 8.- *Soient  $(X, \theta)$  une variété abélienne principalement polarisée vérifiant  $\text{NS}(X) \simeq \mathbb{Z}\theta$ , et  $V$  une sous-variété lisse de  $X$  de classe  $e\theta^2$ , avec  $e \leq 8$ . On suppose la dimension  $n$  de  $X$  minorée de la façon suivante*

$e$	1	2	3	4	5	6	7	8
$n \geq$	6	6	7	6	8	7	11	8

*Si  $e \geq 4$ , on suppose de plus les diviseurs thêta non singuliers en codimension 3 ; alors  $V$  est une intersection presque complète.*

Comme  $X$  est simple, le fibré normal  $N$  de  $V$  dans  $X$  est ample ; puisque  $n \geq 6$ , il existe d'après [3], th. 4.5 un entier  $a$  et un diviseur thêta  $\Theta'$  tels que  $\omega_V \simeq \mathcal{O}_V(a\Theta')$ . La

construction de Serre fournit un fibré vectoriel  $E$  sur  $X$  de classes de Chern  $a\theta$  et  $e\theta^2$ , dont la restriction à  $V$  est  $N$ . Comme  $N$  est ample, on a  $a^2 > 4e \cos^2 \frac{\pi}{n-1}$  ([10]) et, vu les valeurs de  $n$  et  $e$ ,  $a^2 \geq 4e$ .

LEMME 9.— *Il existe un entier  $b \geq a/2$  vérifiant  $b(a-b) \leq e$ , et un diviseur thêta  $\Theta$ , tels que  $H^0(X, E(-b\Theta)) \neq 0$ . Si  $b(a-b) = e$ ,  $V$  est une intersection presque complète.*

Si  $a^2 > 4e$ , le fibré  $E$  n'est pas  $\theta$ -semi-stable ([2], [9], th. 4.3). Si  $a^2 = 4e$ ,  $a$  est pair et les classes de Chern de  $E(-(a/2)\Theta')$  sont nulles. Comme  $\pi_1(X)$  n'a pas de représentation irréductible de dimension 2, le fibré  $E(-(a/2)\Theta')$  n'est pas  $\theta$ -stable ([9], th. 5.1). Dans les deux cas, il existe un entier  $b \geq a/2$ , un diviseur thêta  $\Theta$  et une section non nulle  $s$  de  $E(-b\Theta)$ . Si  $b$  est maximal avec cette propriété,  $Z(s)$  est vide ou de codimension 2. On en déduit  $0 \leq c_2(E(-b\Theta)) \cdot \theta^{n-2} = (e - b(a-b))n!$ ; s'il y a égalité,  $Z(s)$  est vide et  $E(-b\Theta)$  est extension de deux fibrés en droites, d'où le lemme. ■

Supposons  $b(a-b) < e$ ; si  $a-b \geq 2$ , on a  $a^2/4 \geq e > 2b \geq 2[a/2]$ , d'où  $a \geq 6$  et  $e > 2(a-2) \geq 8$ , ce qui contredit l'hypothèse. D'autre part, la suite exacte de la construction de Serre (cf. [4]) donne  $H^0(X, \mathcal{I}_V(a\Theta' - b\Theta)) \neq 0$ . On en déduit  $b = a-1$ , de sorte que  $a-1 < e \leq a^2/4$  et  $e \geq a \geq 4$ , et qu'un diviseur thêta  $\Theta''$  contient  $V$ . Il est non singulier en codimension 3, donc localement factoriel ([5]), et  $V$  est un diviseur de Cartier dans  $\Theta''$ . Comme la classe de  $V$  est  $e\theta^2$ , on a  $\omega_V \sim (e+1)\theta|_V$ , donc  $a = e+1$ , contradiction. On a donc  $e = b(a-b)$ , et le lemme 9 entraîne le théorème. ■

Financé en partie par N.S.F. Grant DMS 94-00636 et le projet européen HCM « Algebraic Geometry in Europe » (AGE), contrat CHRXCT-940557.

Note remise et acceptée le 18 septembre 1995

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. BEAUVILLE et O. DEBARRE, *Une relation entre deux approches du problème de Schottky*, Invent. Math. **86** (1986), 195–207.
- [2] F. A. BOGOMOLOV, *Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties*, Math. USSR Izvestija **13** (1979), 499–555.
- [3] O. DEBARRE, *Fulton-Hansen and Barth-Lefschetz Theorems for Subvarieties of Abelian Varieties*, J. für die reine und angewandte Mathematik (1995), à paraître.
- [4] D. FERRAND, *Construction de fibrés de rang deux*, in *Les équations de Yang-Mills*, Séminaire E.N.S. 1977-1978, Astérisque 71-72, 1980.
- [5] A. GROTHENDIECK, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)*, Masson et North Holland, Paris Amsterdam, 1968.
- [6] F. HIRZEBRUCH, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 3<sup>e</sup> éd., 1966.
- [7] I. MACDONALD, *Symmetric Products of an Algebraic Curve*, Topology **1** (1962), 319–343.
- [8] T. MATTUCK, *Cycles on abelian varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 88–98.
- [9] V. B. MEHTA et A. RAMANATHAN, *Restriction of stable sheaves and representation of the fundamental group*, Invent. Math. **77** (1984), 163–172.
- [10] M. SCHNEIDER, *Submanifolds of projective space with semistable normal bundle*, in *Several Complex Variables, Proc. of the 1981 Hangzhou Conf.*, J.J.Kohn, Q.-K. Lu, R. Remmert et Y.-T. Siu éd., Birkhäuser, Boston 1984, 151–160.

---

*Mathématique, Université Louis Pasteur, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cédex, France.*  
adresse électronique : [debarre@math.u-strasbg.fr](mailto:debarre@math.u-strasbg.fr)