Sous-variétés de codimension 2 d'une variété abélienne

Olivier Debarre

Résumé – *Soit* (X,θ) *une variété abélienne principalement polarisée complexe. On étudie les sous-variétés* V *de* X *dont la classe est* $d\theta^2/2$ *(*d *entier). Supposons* (X,θ) *générale de dimension* ≥ 11 *; lorsque* d *est impair,* V *est (très) singulière ; lorsque* d *est pair* ≤ 16 *et que* V *est lisse,* V *est (presque) une intersection complète.*

Subvarieties of codimension 2 of an abelian variety

Abstract – *Let* (X,θ) *be a complex principally polarized abelian variety. Subvarieties of* X *with class* $d\theta^2/2$ *(*d *integer) are studied. Assume* (X,θ) *is general of dimension* ≥ 11 *; when* d *is odd,* V *is (very) singular ; when* d *is even* ≤ 16 *and* V *is smooth,* V *is (almost) a complete intersection.*

Soit (X,θ) une variété abélienne principalement polarisée complexe de dimension n. Pour tout entier j, on note θ_j la classe de cohomologie entière $\theta^j/j!$; on s'intéresse aux sous-variétés de X de classe $d\theta_2$ (d entier). Quand (X,θ) est *générale*, toute sous-variété de X de codimension 2 a cette propriété ([8]). On trouve de telles sous-variétés avec d *impair* sur les jacobiennes de courbes ; par ailleurs, si X contient une courbe irréductible C de classe $c\theta_{n-1}$ avec c impair (il existe des exemples qui ne sont pas des jacobiennes), la somme de $n-2$ copies de C dans X a pour classe $c^{n-2}\theta_2$ et son lieu singulier est de dimension $\geq n-6$ ([3], prop. 4.7). Pour (X,θ) générale, la question de l'existence pour d impair peut se reformuler de façon plus frappante : θ_2 *est-elle la classe d'un cycle algébrique*? Sans répondre à cette question, on montre dans cette Note que, *pour* (X,θ) *générale de dimension* $n\geq 7$, *toute sous-variété de* X *de classe* $d\theta_2$, d *impair, est singulière et son lieu singulier est de dimension* $\geq n/3-2\log_2 n$. On montre aussi que *sur une variété abélienne principalement polarisée* (X,θ) *quelconque de dimension* ≥ 8, *il n'y a pas de fibré vectoriel topologique de rang* 2 *et seconde classe de Chern* $d\theta_2$, d *impair.*

Pour d *pair*, on cherche un analogue de la conjecture de Hartshorne sur les sous-variétés de l'espace projectif. On dira qu'une sous-variété de X de codimension 2 est une *intersection presque complète* si c'est le lieu des zéros d'une section d'un fibré sur X extension de deux fibrés en droites. On montre que, *pour* (X,θ) *générale de dimension* ≥ 11, *toute sous-variété lisse de* X *de classe* $e\theta^2$, $e\leq 8$, *est une intersection presque complète.*

1. Préliminaires – Soit $\mathrm{A}^\bullet$ une algèbre graduée sur $\mathbf{Q}$. Si $c_1\in\mathrm{A}^1$ et $c_2\in\mathrm{A}^2$, on note $p_n(c_1,c_2)$ le terme de degré n du caractère de Chern : si on écrit formellement $c_1=\lambda+\mu$ et $c_2=\lambda\mu$, on a $p_n(c_1,c_2)=(\lambda^n+\mu^n)/n!$. Fixons $\theta\in\mathrm{A}^1$; pour tous entiers j, d et t, et $\ell\in\mathrm{A}^1$, on pose $\ell_j=\ell^j/j!$ et $p_n(\ell,d,t)=p_n(\ell-2t\theta,d\theta_2-t\ell\theta+t^2\theta^2)$. Pour tout réel x, on note $[x]$ le plus grand entier $\leq x$ et $\lceil x\rceil$ le plus petit entier $\geq x$. Soient R le localisé de

Note présentée par Jean-Pierre Serre

$\mathbf{Z}$ en l'idéal premier (2), vu comme un sous-anneau de $\mathbf{Q}$, et $2\mathrm{R}$ son idéal maximal. Un calcul fastideux montre la formule suivante

$$(1) \qquad p_n(\ell,d,t) = \sum_{\substack{0\le h\le n\\ 0\le j\le h/2}} (-1)^{h-j} t^{h-2j} 2^{-\lceil (n-h)/2\rceil - j+1} d^j \ell_{n-h}\theta_h \binom{h}{2j} \rho_{j,n-h}\ ,$$

où $\rho_{j,n-h}$ est dans $2\mathrm{R}$, sauf lorsque $h=n$, auquel cas il vaut 1.

Soient (X,θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension n, Θ un diviseur thêta et X' une intersection complète générale dans X de s éléments de $|3\Theta|$.

Proposition 2.– *Soit $\ell\in \mathrm{H}^2(\mathrm{X},\mathbf{Z})$. S'il existe un fibré vectoriel topologique E de rang 2 sur X' avec $c_1(\mathrm{E})=\ell_{|\mathrm{X}'}$ et $c_2(\mathrm{E})=(d\theta_2)_{|\mathrm{X}'}$, le rationnel $\Delta^s p_n(\ell,d)=\sum_{i=0}^s(-1)^i\binom{s}{i}p_n(\ell,d,3i)$ est entier.*

Le caractère de Chern $ch(\mathrm{E})$ est la restriction à X' d'une classe $ch_{\mathrm{X}}(\mathrm{E})\in \mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X},\mathbf{Z})$. L'analogue du théorème de Riemann-Roch pour les fibrés topologiques ([6], th. 24.5.4) montre que $\int_{\mathrm{X}'} td(\mathrm{TX}')ch(\mathrm{E})$ est entier ; or ce nombre vaut $\sum_{i=0}^s(-1)^s\binom{s}{i}\int_{\mathrm{X}} ch_{\mathrm{X}}(\mathrm{E})ch\big(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(-3i\Theta)\big)$. Puisque $\int_{\mathrm{X}} ch_{\mathrm{X}}(\mathrm{E})ch\big(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(-3i\Theta)\big)=p_n(\ell,d,3i)$, ceci démontre le lemme. ∎

Soient maintenant V une sous-variété de X de classe $d\theta_2$ et s un entier $>\dim\big(\mathrm{Sing}(\mathrm{V})\big)$, de sorte que l'intersection $\mathrm{V}'=\mathrm{V}\cap\mathrm{X}'$ est lisse, contenue dans le lieu lisse de V.

Proposition 3.– *Si $\mathrm{NS}(\mathrm{X})\simeq \mathbf{Z}\theta$ et $0\le s\le n-6$, il existe un fibré vectoriel (algébrique) E de rang 2 sur X' vérifiant $c_2(\mathrm{E})=(d\theta_2)_{|\mathrm{X}'}$.*

Puisque X est simple, le fibré normal $\mathrm{N}_{\mathrm{V}'/\mathrm{X}'}$, restriction de $\mathrm{N}_{\mathrm{V}/\mathrm{X}}$ à V', est ample (*cf.* [3], prop. 1.1). Puisque $s\le n-6$, le théorème 4.5 de *loc.cit.* entraîne qu'il existe un fibré en droites L sur X dont la restriction à V' est $\wedge^2\mathrm{N}_{\mathrm{V}'/\mathrm{X}'}$. L'hypothèse $\mathrm{NS}(\mathrm{X})\simeq\mathbf{Z}\theta$ assure que $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}',\mathrm{L}^*_{|\mathrm{X}'})=0$. On peut donc effectuer la construction de Serre ([4], p. 153). ∎

Remarque 4. – Dans une jacobienne générale (JC,θ) de dimension $n\ge 6$, la sous-variété $\mathrm{V}=\mathrm{W}_{n-2}(\mathrm{C})$ a pour classe θ_2 et son lieu singulier est de dimension $n-6$. Pour $3\le n\le 5$, V est lisse, mais n'est pas sous-canonique dans X : on a $c_1(\omega_{\mathrm{V}})=x+\theta$, où x est la classe de $\mathrm{W}_{n-3}(\mathrm{C})$ dans V ([7]).

2. Sous-Variétés De Classe $d\theta_2$, d Impair – Soient comme ci-dessus (X,θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension n, Θ un diviseur thêta et X' une intersection complète générale dans X de s éléments de $|3\Theta|$.

Théorème 5.– *Pour $n\ge 4$, $n\ne 6,7$ et $s\le n-4[\frac{n}{4}]$, il n'existe pas sur X' de fibré vectoriel topologique de seconde classe de Chern $(d\theta_2)_{|\mathrm{X}'}$, d impair.*

Soit E un tel fibré; d'après le théorème de Lefschetz, il existe $\ell\in\mathrm{H}^2(\mathrm{X},\mathbf{Z})$ avec $c_1(\mathrm{E})=\ell_{|\mathrm{X}'}$. Par la proposition 2, $\Delta^{s'}p_n(\ell,d)$ est entier pour $s\le s'\le n$, en particulier pour $s'=n-4[\frac{n}{4}]$. En utilisant la formule (1), on montre qu'il existe $\nu(n)>0$ tel que l'entier (pair) $2^{\nu(n)}\Delta^{s'}p_n(\ell,d)$ soit congru à d modulo $2\mathrm{R}$, ce qui contredit le fait que d est impair. ∎

Théorème 6.– *Soit (X,θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension $n\ge 7$ vérifiant $\mathrm{NS}(\mathrm{X})\simeq\mathbf{Z}\theta$. Toute sous-variété V de X de classe $d\theta_2$, d impair, est singulière et son lieu singulier est de dimension $\ge n/3-2\log_2 n$.*

Supposons $n \geq 30$; posons $t_n = \lceil n/3 - 2\log_2 n \rceil$ et supposons $\dim(\mathrm{Sing}(\mathrm{V})) < t_n$. Posons $m = [(n-t_n)/4]$ et $s = n - 4m$; on a $s > \dim(\mathrm{Sing}(\mathrm{V}))$ et $s \leq n-6$. Soit E le fibré vectoriel sur X' fourni par la proposition 3. On a $c_1(\mathrm{E}) = a\theta_{|\mathrm{X}'}$, et, par la proposition 2, $\Delta^s p_n(a\theta, d)$ est entier. On peut vérifier que $s \leq 2m - \log_2(6m-4)$, ce qui contredit le lemme suivant.

LEMME 7.– *Si* $m > 0$ *et* $s \leq 2m - \log_2(6m-4)$, $\Delta^s p_{4m+s}(a\theta, d)$ *n'est pas entier.*

La formule (1) exprime $\Delta^s p_{4m+s}(a\theta, d)$ comme une somme dont une analyse minutieuse des termes montre qu'il n'y en a qu'un de valuation en 2 minimale : il correspond à $h = 4m+s$ et $j = 2m$ et est le produit de $((4m+s)!/(4m)!)\ 2^{-2m+1}$ par une unité de R. L'hypothèse sur s entraîne que 2^{2m-1} ne divise pas $(4m+s)!/(4m)!$, de sorte que cette valuation est strictement négative. ■

Pour les petites valeurs de n, des arguments similaires donnent les bornes inférieures suivantes s_n sur la dimension du lieu singulier de V :

n	s_n	n	s_n	n	s_n	n	s_n	n	s_n	n	s_n	n	s_n	n	s_n
7	0	10	2	13	1	16	2	19	5	22	6	25	5	28	8
8	0	11	2	14	2	17	1	20	4	23	7	26	6	29	9
9	1	12	2	15	4	18	2	21	5	24	6	27	9	30	10

En particulier, V est singulière pour $n \leq 30$. Puisque $t_n \leq 0$ pour $n < 30$ et $t_n \geq 0$ pour $n \geq 30$, cela montre le théorème. ■

3. SOUS-VARIÉTÉS DE CLASSE $d\theta_2$, d PAIR – Soit (X, θ) une variété abélienne principalement polarisée ; une sous-variété V de X de codimension 2 est une *intersection presque complète* si c'est le lieu des zéros d'une section σ d'un fibré E extension de fibrés en droites M' et M sur X. Si $\mathrm{M} \not\simeq \mathrm{M}'$, l'extension est scindée et V est une intersection complète. Si $\mathrm{M} \simeq \mathrm{M}'$, que $e_{\mathrm{E}} \in \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathrm{M}, \mathrm{M})$ est la classe de l'extension, et que s est l'image de σ dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{M})$, V est contenue dans le diviseur $\mathrm{Z}(s)$ de s et est le lieu des zéros d'une section de $\mathrm{M}_{|\mathrm{Z}(s)}$. Une telle section peut s'écrire $s' + \mathrm{D}s$, avec $s' \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{M})$ et $\mathrm{D} \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{TX})$ (*cf.* [1] pour la définition de $\mathrm{D}s$), et V peut être décrite par les « équations » $s = s' + \mathrm{D}s = 0$, où $\mathrm{D} \smile c_1(\mathrm{M}) \in \mathbf{C}e_{\mathrm{E}}$.

THÉORÈME 8.– *Soient* (X, θ) *une variété abélienne principalement polarisée vérifiant* $\mathrm{NS}(\mathrm{X}) \simeq \mathbf{Z}\theta$, *et* V *une sous-variété lisse de* X *de classe* $e\theta^2$, *avec* $e \leq 8$. *On suppose la dimension* n *de* X *minorée de la façon suivante*

e	1	2	3	4	5	6	7	8
$n \geq$	6	6	7	6	8	7	11	8

Si $e \geq 4$, *on suppose de plus les diviseurs thêta non singuliers en codimension 3 ; alors* V *est une intersection presque complète.*

Comme X est simple, le fibré normal N de V dans X est ample ; puisque $n \geq 6$, il existe d'après [3], th. 4.5 un entier a et un diviseur thêta Θ' tels que $\omega_{\mathrm{V}} \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{V}}(a\Theta')$. La construction de Serre fournit un fibré vectoriel E sur X de classes de Chern $a\theta$ et $e\theta^2$, dont la restriction à V est N. Comme N est ample, on a $a^2 > 4e\cos^2\frac{\pi}{n-1}$ ([10]) et, vu les valeurs de n et e, $a^2 \geq 4e$.

LEMME 9.– *Il existe un entier $b \geq a/2$ vérifiant $b(a-b) \leq e$, et un diviseur thêta Θ, tels que* $\mathrm{H}^0\big(\mathrm{X}, \mathrm{E}(-b\Theta)\big) \neq 0$. *Si $b(a-b) = e$, V est une intersection presque complète.*

Si $a^2 > 4e$, le fibré E n'est pas θ-semi-stable ([2], [9], th. 4.3). Si $a^2 = 4e$, a est pair et les classes de Chern de $\mathrm{E}(-(a/2)\Theta')$ sont nulles. Comme $\pi_1(\mathrm{X})$ n'a pas de représentation irréductible de dimension 2, le fibré $\mathrm{E}(-(a/2)\Theta')$ n'est pas θ-stable ([9], th. 5.1). Dans les deux cas, il existe un entier $b \geq a/2$, un diviseur thêta Θ et une section non nulle s de $\mathrm{E}(-b\Theta)$. Si b est maximal avec cette propriété, $\mathrm{Z}(s)$ est vide ou de codimension 2. On en déduit $0 \leq c_2\big(\mathrm{E}(-b\Theta)\big) \cdot \theta^{n-2} = \big(e - b(a-b)\big)n!$; s'il y a égalité, $\mathrm{Z}(s)$ est vide et $\mathrm{E}(-b\Theta)$ est extension de deux fibrés en droites, d'où le lemme. ∎

Supposons $b(a-b) < e$; si $a - b \geq 2$, on a $a^2/4 \geq e > 2b \geq 2\lceil a/2 \rceil$, d'où $a \geq 6$ et $e > 2(a-2) \geq 8$, ce qui contredit l'hypothèse. D'autre part, la suite exacte de la construction de Serre (*cf.* [4]) donne $\mathrm{H}^0\big(\mathrm{X}, \mathcal{I}_{\mathrm{V}}(a\Theta' - b\Theta)\big) \neq 0$. On en déduit $b = a - 1$, de sorte que $a - 1 < e \leq a^2/4$ et $e \geq a \geq 4$, et qu'un diviseur thêta Θ'' contient V. Il est non singulier en codimension 3, donc localement factoriel ([5]), et V est un diviseur de Cartier dans Θ''. Comme la classe de V est $e\theta^2$, on a $\omega_{\mathrm{V}} \sim (e+1)\theta_{|\mathrm{V}}$, donc $a = e + 1$, contradiction. On a donc $e = b(a-b)$, et le lemme 9 entraîne le théorème. ∎

Financé en partie par N.S.F. Grant DMS 94-00636 et le projet européen HCM « Algebraic Geometry in Europe » (AGE), contrat CHRXCT-940557.

Note remise et acceptée le 18 septembre 1995

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. BEAUVILLE et O. DEBARRE, *Une relation entre deux approches du problème de Schottky*, Invent. Math. **86** (1986), 195–207.

[2] F. A. BOGOMOLOV, *Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties*, Math. USSR Izvestija **13** (1979), 499–555.

[3] O. DEBARRE, *Fulton-Hansen and Barth-Lefschetz Theorems for Subvarieties of Abelian Varieties*, J. für die reine und andgewandte Mathematik (1995), à paraître.

[4] D. FERRAND, Construction de fibrés de rang deux, in *Les équations de Yang-Mills*, Séminaire E.N.S. 1977-1978, Astérisque 71-72, 1980.

[5] A. GROTHENDIECK, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2), Masson et North Holland, Paris Amsterdam, 1968.

[6] F. HIRZEBRUCH, Topological methods in algebraic geometry, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 3e éd., 1966.

[7] I. MACDONALD, *Symmetric Products of an Algebraic Curve*, Topology **1** (1962), 319–343.

[8] T. MATTUCK, *Cycles on abelian varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 88–98.

[9] V. B. MEHTA et A. RAMANATHAN, *Restriction of stable sheaves and representation of the fundamental group*, Invent. Math. **77** (1984), 163–172.

[10] M. SCHNEIDER, Submanifolds of projective space with semistable normal bundle, in *Several Complex Variables, Proc. of the 1981 Hangzhou Conf.*, J.J.Kohn, Q.-K. Lu, R. Remmert et Y.-T. Siu éd., Birkhäuser, Boston 1984, 151–160.

Mathématique, Université Louis Pasteur, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cédex, France.
adresse électronique : debarre@math.u-strasbg.fr