THÉORÈMES DE CONNEXITÉ POUR LES PRODUITS D'ESPACES PROJECTIFS ET LES GRASSMANNIENNES

Olivier Debarre (*)

Abstract – *We give a numerical condition on the images of two morphisms to a Grassmannian (or a product of projective spaces) that ensures that their fibered product is connected, thereby extending connectedness results of Fulton and Hansen. This result is valid over any algebraically closed field; it yields a condition on the class of an irreducible subvariety of a Grassmannian that implies that it is simply connected. This applies in particular to Fano varieties of certain hypersurfaces in a projective space.*

Le théorème de connexité de Fulton-Hansen énonce que si X est une variété irréductible complète et $\mathrm{X} \to \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ un morphisme dont l'image est de codimension $< n$, l'image inverse de la diagonale est *connexe* ([FH], [FL1]). Le point de départ de cet article est une remarque de Fulton et Lazarsfeld suggérant que cette propriété de la diagonale pourrait être essentiellement numérique. C'est ce que nous vérifions dans la première partie, en démontrant une théorème de connexité analogue pour les morphismes à valeurs dans un produit d'espaces projectifs (th. 2.2), qui entraîne en particulier que l'énoncé ci-dessus reste valable si l'on remplace la diagonale de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ par n'importe quelle sous-variété irréductible de dimension n qui domine chaque facteur.

Dans la seconde partie, nous étudions le même problème pour les morphismes à valeurs dans une grassmannienne. Dans [H], Hansen montre que si X est une variété irréductible complète et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n) \times \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)$ un morphisme dont l'image est de codimension $< n$, l'image inverse de la diagonale est connexe. Des exemples montrent que cette borne décevante est la meilleure possible en général (§ 5). Notre but est d'améliorer ce résultat en tenant compte des propriétés numériques de $f(\mathrm{X})$. Le théorème 7.1 montre que *l'image inverse de la diagonale est connexe, pourvu qu'il existe des partitions* $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_d)$ *et* $< \mu_0, \dots, \mu_d)$ *vérifiant* $\lambda_i + \mu_{d-i} < n - d$ $(i = 0, \dots, d)$ *telles que* $[f(\mathrm{X})] \cdot p_1^* \sigma_\lambda \cdot p_2^* \sigma_\mu \neq 0$ (σ_λ et σ_μ sont les classes de Schubert). On en déduit un critère numérique qui assure la simple connexité d'une sous-variété irréductible d'une grassmannienne (cor. 7.4), et qui entraîne par exemple que *la variété de Fano d'une hypersurface générique de degré* $\leq n - 3$ *dans* $\mathbf{P}^n$ *est simplement connexe* (exemple 7.6).

Ce résultat contient celui de Hansen, mais n'est pas optimal : lorsqu'on se donne des variétés irréductibles complètes X et Y, et des morphismes $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)$ et $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)$, il requiert l'hypothèse $[f(\mathrm{X})] \cdot [g(\mathrm{Y})] \cdot (\sigma_{1,\dots,1} + \sigma_{n-d}) \neq 0$ pour conclure à la connexité de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)} \mathrm{Y}$. Cette hypothèse est trop forte lorsque par exemple f est surjective, puisqu'il suffit dans ce cas de supposer g non constante, ou lorsque l'image de f est un diviseur, puisqu'il suffit dans ce cas de supposer $[g(\mathrm{Y})] \cdot \sigma_{1,1}$ et $[g(\mathrm{Y})] \cdot \sigma_2$ non nuls (*cf.* [D1] et § 9). Dans § 8, on montre qu'on peut affaiblir l'hypothèse lorsque Y est une sous-variété de Schubert de $\mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)$, ou une intersection de variétés de Schubert spéciales.

(*) Financé en partie par N.S.F. Grant DMS 94-00636 et le Projet Européen HCM « Algebraic Geometry in Europe » (AGE), Contrat CHRXCT-940557.

Sans entrer dans les détails, mentionnons simplement que lorsque Y est une variété de Schubert spéciale de classe σ_m, la condition requise est $[f(\mathrm{X})]\cdot(\sigma_{m+1}+\sigma_{m,m})\neq 0$.

Tous nos résultats sont valables sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque. Les méthodes employées sont celles de [FL1]; on prouve d'abord dans § 6 un résultat du type Bertini : si X est une variété irréductible, $f:\mathrm{X}\to\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ un morphisme et H un hyperplan général de $\mathbf{P}^n$, $f^{-1}\big(\mathrm{G}(d,\mathrm{H})\big)$ est irréductible si $f(\mathrm{X})$ rencontre $\mathrm{G}(d,\mathrm{M})$ pour tout sous-espace général M de $\mathbf{P}^n$ de codimension 2 (le théorème de Bertini usuel correspond au cas $d=0$). Une astuce classique permet de passer de cet énoncé à celui sur l'image inverse de la diagonale. Lorsque X est complète, les résultats de connexité s'en déduisent en utilisant une factorisation de Stein.

Notations et conventions

On adopte des conventions analogues à celles de [FL1] : les énoncés se rapportent à un corps de base algébriquement clos arbitraire k (cadre «algébrique»), sauf ceux marqués $(k=\mathbf{C})$, pour lesquels le corps de base est $\mathbf{C}$, et la topologie la topologie usuelle (cadre « topologique »). Dans le cadre topologique, si $f:\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$ est une application continue, avec X connexe, on écrira $\pi_1(\mathrm{Y})\twoheadrightarrow\pi_1(\mathrm{X})$ pour signifier qu'il existe $y\in\mathrm{Y}$ tel que l'homomorphisme induit $\pi_1(f):\pi_1(\mathrm{Y},y)\to\pi_1\big(\mathrm{X},f(y)\big)$ soit surjectif. Lorsque Y est connexe, cette propriété ne dépend pas du choix du point y.

Si $f:\mathrm{X}\to\mathrm{S}$ est un S-schéma et Ω un automorphisme de S, on notera ${}^{\Omega}\mathrm{X}$ le S-schéma $\Omega f:\mathrm{X}\to\mathrm{S}$.

Les sous-variétés seront toujours *fermées* dans l'espace ambiant. Connexe (resp. irréductible) signifie connexe (resp. irréductible) et non vide.

Soit L un espace projectif; on notera $\mathrm{G}(d,\mathrm{L})$ la grassmannienne des sous-espaces linéaires de L de dimension d et, pour tout $u\in\mathrm{G}(d,\mathrm{L})$, Λ_u l'espace linéaire correspondant à u.

I. PRODUITS D'ESPACES PROJECTIFS

Dans cette partie, on fixe des entiers positifs $n_1,\dots,n_r$; on note $\mathbf{P}$ le produit $\mathbf{P}^{n_1}\times\cdots\times\mathbf{P}^{n_r}$ et $\mathrm{Aut}^0(\mathbf{P})$ le groupe $\prod_{i=1}^r \mathrm{PGL}(n_i+1,k)$ agissant diagonalement sur $\mathbf{P}$. Pour toute partie non vide I de $\{1,\dots,r\}$, on note $n_\mathrm{I}=\sum_{i\in\mathrm{I}} n_i$, $\mathbf{P}_\mathrm{I}=\prod_{i\in\mathrm{I}}\mathbf{P}^{n_i}$ et p_I la projection $\mathbf{P}\to\mathbf{P}_\mathrm{I}$.

1. Un théorème de Bertini

Lemme 1.1.– *Soient* Y *une variété irréductible complète,* X *une sous-variéte irréductible de* $\mathbf{P}^n\times\mathrm{Y}$, *et* $p:\mathrm{X}\to\mathbf{P}^n$, $q:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ *les deux projections. Soit* L *un sous-espace linéaire de* $\mathbf{P}^n$, *général de codimension* $\leq\dim p(\mathrm{X})$. *Alors*

$$\dim q\big(p^{-1}(\mathrm{L})\big)=\min\big(\dim q(\mathrm{X}),\dim(\mathrm{X})-\mathrm{codim}(\mathrm{L})\big)\ .$$

Démonstration. Compte tenu du théorème de Bertini ([FL1], th. 1.1), il suffit de traiter le cas où L est un hyperplan. On a alors $\dim p(\mathrm{X})\geq 1$, de sorte que $p^{-1}(\mathrm{L})$ est un diviseur de X qui varie sans point base. Soit a la dimension d'une fibre générale de la projection $X \to q(X)$, c'est-à-dire $a = \dim(X) - \dim q(X)$. Puisque X est irréductible, les diviseurs D de X tels que la codimension de $q(D)$ dans $q(X)$ soit > 1 sont en nombre fini. Si $a = 0$, on a donc, pour L général,

$$\dim q\big(p^{-1}(L)\big) = \dim q(X) - 1 = \dim(X) - 1 .$$

Si $a > 0$, l'hyperplan L rencontre chaque fibre de la projection propre $X \to q(X)$, de sorte que $q\big(p^{-1}(L)\big) = q(X)$. Ceci prouve le lemme. ■

On aura aussi besoin du résultat suivant, pour lequel je n'ai pas trouvé de référence adéquate.

Lemme 1.2.– *Soient* X *une variété unibranche sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle,* $f : X \to \mathbf{P}^n$ *un morphisme, et* L *un sous-espace linéaire général de* $\mathbf{P}^n$. *Alors* $f^{-1}(L)$ *est unibranche.*

Démonstration. La normalisation $h : \tilde{X} \to X$ étant un homéomorphisme, il en est de même de $(fh)^{-1}(L) \to f^{-1}(L)$. Il suffit donc de montrer que $(fh)^{-1}(L)$ est *normal*, et on se ramène ainsi au cas où X est normal. La démonstration est alors classique (*cf.* [J], [K], remarque (7)) et procède comme suit : posons $Z = \{ (x,u) \in X \times G(d, \mathbf{P}^n) \mid f(x) \in \Lambda_u \}$; la première projection $Z \to X$ est lisse, de sorte que Z est normal ; par conséquent, la fibre générique de la seconde projection $q : Z \to G(d, \mathbf{P}^n)$ est normale (ses anneaux locaux sont des anneaux locaux de Z), donc géométriquement normale sur le corps $K\big(G(d, \mathbf{P}^n)\big)$ puisque ce dernier est de caractéristique nulle ([Gr1], prop. 6.7.7). L'ensemble des points u de $G(d, \mathbf{P}^n)$ tels que $q^{-1}(u)$ soit normal étant localement constructible ([Gr2], prop. 9.9.4), il contient un ouvert dense . ■

Montrons maintenant un théorème de Bertini pour les produits d'espaces projectifs.

Théorème 1.3.– *Supposons donnés une variété irréductible* X, *un morphisme* $f : X \to \mathbf{P}$, *et, pour chaque* $i = 1, \ldots, r$, *un sous-espace linéaire général* L_i *de* $\mathbf{P}^{n_i}$, *tels que* $\dim p_I\big(\overline{f(X)}\big) \geq \sum_{i \in I} \mathrm{codim}(L_i)$ *pour toute partie non vide* I *de* $\{1, \ldots, r\}$ *; notons* $L = L_1 \times \cdots \times L_r$.

1) $f^{-1}(L)$ *est non vide de codimension* $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{codim}(L_i)$ *dans* X.

2) *Posons* $J = \{ i \in \{1, \ldots, r\} \mid L_i \neq \mathbf{P}^{n_i} \}$ *et supposons de plus que pour toute partie* I *de* $\{1, \ldots, r\}$ *rencontrant* J, *on ait* $\dim p_I\big(\overline{f(X)}\big) > \sum_{i \in I} \mathrm{codim}(L_i)$.

a) $f^{-1}(L)$ *est irréductible ;*

b) $(k = \mathbf{C})$ *si* X *est localement irréductible,* $\pi_1\big(f^{-1}(L)\big) \twoheadrightarrow \pi_1(X)$.

Démonstration. Quitte à projeter sur $\mathbf{P}_J$, on peut supposer $J = \{1, \ldots, r\}$. Supposons donc $\dim p_I\big(\overline{f(X)}\big) \geq \sum_{i \in I} \mathrm{codim}(L_i)$ (resp. $>$) pour toute partie non vide I de $\{1, \ldots, r\}$ et montrons 1) (resp. 2)) par récurrence sur r. Lorsque $r = 1$, 1) est trivial et 2) découle de [FL1], th. 1.1. Supposons $r > 1$. Si, pour chaque $i = 1, \ldots, r$, on a $\dim p_i\big(\overline{f(X)}\big) = \mathrm{codim}(L_i)$, il ressort de l'hypothèse $\dim\big(\overline{f(X)}\big) \geq \sum_{i=1}^{r} \mathrm{codim}(L_i)$ que $\overline{f(X)} = \prod_{i=1}^{r} p_i\big(\overline{f(X)}\big)$, auquel cas 1) est trivial. Supposons donc $\dim p_1\big(\overline{f(X)}\big) > \mathrm{codim}(L_1)$. Soit I une partie non vide de $\{2, \ldots, r\}$. Par [FL1], th. 1.1, $X' = (p_1 f)^{-1}(L_1)$ est fermé irréductible de codimension codim(L_1 a X′ $\overline{f(X')} = \overline{f(X)} \cap p_1^{-1}(L_1)$. D'autre part, le lemme 1.1 appliqué à la sous-variété $p_{\{1\}\cup \mathrm{I}}\big(\overline{f(\mathrm{X})}\big)$ de $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_\mathrm{I}$ donne

$$\dim p_\mathrm{I}\big(\overline{f(\mathrm{X}')}\big) = \min\big(\dim p_\mathrm{I}\big(\overline{f(\mathrm{X})}\big), \dim p_{\{1\}\cup \mathrm{I}}\big(\overline{f(\mathrm{X})}\big) - \mathrm{codim}(\mathrm{L}_1)\big) \geq \sum_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{codim}(\mathrm{L}_i)$$

(resp. $>$). On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au morphisme $f' = p_{\{2,\ldots,k\}} f : \mathrm{X}' \to \mathbf{P}_{\{2,\ldots,k\}}$; la propriété 1) (resp. 2)a)) en résulte. Sous l'hypothèse respée, et si X est unibranche, il en est de même de X' (lemme 1.2); le cas $r = 1$ entraîne $\pi_1(\mathrm{X}') \twoheadrightarrow \pi_1(\mathrm{X})$ tandis que la propriété 2)b) pour X' entraîne

$$\pi_1\big(f^{-1}(\mathrm{L})\big) = \pi_1\big(f'^{-1}(\mathrm{L}_2 \times \cdots \times \mathrm{L}_r)\big) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathrm{X}') .$$

La propriété 2)b) pour X en découle. ∎

Passons maintenant au cas des espaces linéaires quelconques.

Théorème 1.4.– *Supposons donnés une variété irréductible* X, *un morphisme* $f : \mathrm{X} \to \mathbf{P}$, *et, pour chaque* $i = 1, \ldots, r$, *un sous-espace linéaire* L_i *de* $\mathbf{P}^{n_i}$, *tels que* $\dim p_\mathrm{I}\big(\overline{f(\mathrm{X})}\big) \geq \sum_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{codim}(\mathrm{L}_i)$ *pour toute partie non vide* I *de* $\{1, \ldots, r\}$ *; notons* $\mathrm{L} = \mathrm{L}_1 \times \cdots \times \mathrm{L}_r$.

1) *Si* f *est propre au-dessus d'un ouvert* V *de* $\mathbf{P}$ *et que* L *est contenu dans* V, $f^{-1}(\mathrm{L})$ *est non vide.*

2) *Posons* $\mathrm{J} = \{i \in \{1, \ldots, r\} \mid \mathrm{L}_i \neq \mathbf{P}^{n_i}\}$ *et supposons de plus que pour toute partie* I *de* $\{1, \ldots, r\}$ *rencontrant* J, *on ait* $\dim p_\mathrm{I}\big(\overline{f(\mathrm{X})}\big) > \sum_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{codim}(\mathrm{L}_i)$.

a) *Si* f *est propre au-dessus d'un ouvert* V *de* $\mathbf{P}$ *et que* L *est contenu dans* V, *alors* $f^{-1}(\mathrm{L})$ *est connexe ;*

b) $(k = \mathbf{C})$ *si* X *est localement irréductible, pour tout voisinage ouvert* U *de* L *dans* $\mathbf{P}$, *on a* $\pi_1\big(f^{-1}(\mathrm{U})\big) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathrm{X})$.

Démonstration. Comme plus haut, on peut supposer $\mathrm{J} = \{1, \ldots, r\}$. Montrons 2)b); tout voisinage U de L contient des produits $\mathrm{M}_1 \times \cdots \times \mathrm{M}_r$ auxquels le point 2)b) du th. 1.3 s'applique, d'où 2)b). Supposons maintenant f propre au-dessus d'un ouvert V de $\mathbf{P}$ et montrons 1) et 2)a). Pour chaque $i = 1, \ldots, r$, notons G_i la grassmannienne des sous-espaces linéaires de $\mathbf{P}^{n_i}$ de même codimension que L_i et $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \times \cdots \times \mathrm{G}_r$. Soit W l'ouvert de G qui consiste en les $(u_1, \ldots, u_r)$ tels que $\Lambda_{u_1} \times \cdots \times \Lambda_{u_r} \subset \mathrm{V}$; notons

$$\mathrm{Z} = \{\ (x, u_1, \ldots, u_r) \in \mathrm{X} \times \mathrm{W} \mid f(x) \in \Lambda_{u_1} \times \cdots \times \Lambda_{u_r}\ \} .$$

La première projection réalise Z comme un ouvert dans un fibré en produits de grassmanniennes au-dessus de X, de sorte que Z est irréductible. Comme f est propre au-dessus de V, la projection $q : \mathrm{Z} \to \mathrm{V}$ est aussi propre. Si $\dim p_\mathrm{I}\big(\overline{f(\mathrm{X})}\big) \geq \sum_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{codim}(\mathrm{L}_i)$ (resp. $>$) pour toute partie non vide I de $\{1, \ldots, r\}$, le th. 1.3 entraîne que les fibres générales de q sont non vides (resp. irréductibles). Il s'ensuit que q est surjective (resp. que les fibres de q sont connexes, par un argument classique utilisant la factorisation de Stein de q (*cf.* [FL1], th. 2.1). Ceci termine la démonstration. ∎

Remarque 1.5.– On aura besoin de la version plus fine de 2)b) suivante : *pour tout* $x \in f^{-1}(\mathrm{L})$, *l'homomorphisme* $\pi_1\big(f^{-1}(\mathrm{U}), x\big) \to \pi_1(\mathrm{X}, x)$ *est surjectif.* Cela se démontre comme dans [FL1], remark 2.2.

2. Théorèmes de connexité

On note Δ la diagonale de $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$ et, pour tout $\Omega \in \mathrm{Aut}^0(\mathbf{P})$, ${}^{\Omega}\Delta$ l'image de Δ par l'automorphisme $(x, y) \mapsto (x, \Omega y)$ de $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$.

Lemme 2.1.– *Soient* X *une variété irréductible et* $f : \mathrm{X} \to \mathbf{P} \times \mathbf{P}$ *un morphisme.*

1) *Si* X *est complète et que* $\dim(p_{\mathrm{I}} \times p_{\mathrm{I}})f(\mathrm{X}) \geq n_{\mathrm{I}}$ *pour toute partie non vide* I *de* $\{1, \ldots, r\}$, $f^{-1}(\Delta)$ *est non vide.*

2) *On suppose que* $\dim(p_{\mathrm{I}} \times p_{\mathrm{I}})f(\mathrm{X}) > n_{\mathrm{I}}$ *pour toute partie non vide* I *de* $\{1, \ldots, r\}$.

a) *Pour* $\Omega \in \mathrm{Aut}^0(\mathbf{P})$ *général,* $f^{-1}({}^{\Omega}\Delta)$ *est irréductible ;*

b) *si* X *est complète,* $f^{-1}(\Delta)$ *est connexe ;*

c) $(k = \mathbf{C})$ *si* X *est localement irréductible et complète,* $\pi_1\big(f^{-1}(\Delta)\big) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathrm{X})$.

Démonstration. On suit [FL1], p. 39 : pour chaque $i = 1, \ldots, r$, on considère des coordonnées homogènes $[x^{(i)}, y^{(i)}]$ sur $\mathbf{P}^{2n_i+1}$, où $x^{(i)}$ et $y^{(i)}$ sont des $(n_i + 1)$-uplets d'éléments de k. On note V_i l'ouvert de $\mathbf{P}^{2n_i+1}$ défini par $x^{(i)} \neq 0$ et $y^{(i)} \neq 0$, et on pose $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \times \cdots \times \mathrm{V}_r$. Définissons un morphisme $\varphi : \mathrm{V} \to \mathbf{P} \times \mathbf{P}$ par la relation

$$\varphi([x^{(1)}, y^{(1)}], \ldots, [x^{(r)}, y^{(r)}]) = ([x^{(1)}], \ldots, [x^{(r)}], [y^{(1)}], \ldots, [y^{(r)}]) .$$

Soit $\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_r) \in \prod_{i=1}^{r} \mathrm{GL}(n_i + 1, k)$, soit Ω son image dans $\mathrm{Aut}^0(\mathbf{P})$ et soit ${}^{\Omega_i}\mathrm{L}_i \subset \mathrm{V}_i$ l'espace linéaire défini par les équations $x^{(i)} = \Omega_i(y^{(i)})$. Les ${}^{\Omega_i}\mathrm{L}_i$ forment un ouvert dense dans $\mathrm{G}(n_i, \mathbf{P}^{2n_i+1})$ et φ induit un isomorphisme entre ${}^{\Omega}\mathrm{L} = {}^{\Omega_1}\mathrm{L}_1 \times \cdots \times {}^{\Omega_r}\mathrm{L}_r$ et ${}^{\Omega}\Delta$.

Notons $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathbf{P}} \mathrm{V}$ et $f' : \mathrm{X}' \to \mathrm{V}$ le morphisme canonique ; $f'^{-1}({}^{\Omega}\mathrm{L})$ est isomorphe à $f^{-1}({}^{\Omega}\Delta)$ et f' est propre lorsque X est complète. Le point 2)a) est alors conséquence du th. 1.3.2)a) et les points 1) et 2)b) du th. 1.4. Le point 2)c) se déduit du point 2)b) du th. 1.4 et de la remarque 1.5, comme dans [FL1], th. 3.1. et cor. 3.3. ■

Théorème 2.2.– *Soient* X *et* Y *des variétés irréductibles et* $f : \mathrm{X} \to \mathbf{P}$ *et* $g : \mathrm{Y} \to \mathbf{P}$ *des morphismes.*

1) *Si* X *et* Y *sont complètes et que* $\dim p_{\mathrm{I}} f(\mathrm{X}) + \dim p_{\mathrm{I}} g(\mathrm{Y}) \geq n_{\mathrm{I}}$ *pour toute partie non vide* I *de* $\{1, \ldots, r\}$, $\mathrm{X} \times_{\mathbf{P}} \mathrm{Y}$ *est non vide.*

2) *On suppose que* $\dim p_{\mathrm{I}} f(\mathrm{X}) + \dim p_{\mathrm{I}} g(\mathrm{Y}) > n_{\mathrm{I}}$ *pour toute partie non vide* I *de* $\{1, \ldots, r\}$.

a) *Pour* $\Omega \in \mathrm{Aut}^0(\mathbf{P})$ *général,* $\mathrm{X} \times_{\mathbf{P}} {}^{\Omega}\mathrm{Y}$ *est irréductible ;*

b) *si* X *et* Y *sont complètes,* $\mathrm{X} \times_{\mathbf{P}} \mathrm{Y}$ *est connexe ;*

c) $(k = \mathbf{C})$ *si* X *et* Y *sont localement irréductibles et complètes,* $\pi_1(\mathrm{X} \times_{\mathbf{P}} \mathrm{Y}) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$.

Démonstration. Appliquer le lemme 2.1 au morphisme $(f, g) : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathbf{P} \times \mathbf{P}$. ■

Corollaire 2.3.– *Soient* X *une variété irréductible complète,* $f : \mathrm{X} \to \mathbf{P}$ *un morphisme et* Y *une sous-variété irréductible de* $\mathbf{P}$ *tels que, pour toute partie non vide* I *de* $\{1, \ldots, r\}$, *on ait* $\dim p_{\mathrm{I}} f(\mathrm{X}) + \dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Y}) > n_{\mathrm{I}}$.

a) $f^{-1}(\mathrm{Y})$ *est connexe ;*

b) $(k = \mathbf{C})$ *si* X *est localement irréductible,* $\pi_1\big(f^{-1}(\mathrm{Y})\big) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathrm{X})$.

Démonstration. Le point a) se déduit du th. 2.2.2)b) ; le point b) se déduit du th. 2.2.2)c) comme dans [FL1], cor. 4.3 (considérer la normalisée de Y). ∎

Le lecteur remarquera que le lemme 2.1.2) est conséquence du cor. 2.3. On démontre aussi par les mêmes méthodes des résultats analogues à ceux des cor. 5.2 et 5.3 de [FL1], comme par exemple :

Corollaire 2.4.– *Soit* X *une sous-variété irréductible de* $\mathbf{P}$ *telle que, pour toute partie non vide* I *de* $\{1, \ldots, r\}$, *on ait* $\dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{X}) > \frac{1}{2} n_{\mathrm{I}}$.

a) $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X}) = 0$;

b) $(k = \mathbf{C})$ X *est simplement connexe.*

Le cor. 2.3 entraîne que certaines sous-variétés d'un produit d'espaces projectifs ont des propriétés de connexité analogues à celles de la petite diagonale de $(\mathbf{P}^n)^r$, telles qu'elles sont exposées dans [FL1].

On dira qu'une sous-variété Z d'une variété P est *encombrante* si elle rencontre toute sous-variété de P de dimension $\geq \operatorname{codim}(\mathrm{Z})$. On a :

Proposition 2.6.– *Pour qu'une sous-variété irréductible* Z *de* $\mathbf{P}$ *soit encombrante, il faut et il suffit que pour toute partie non vide* I *de* $\{1, \ldots, r\}$, *on ait*

$$\dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z}) = \min\big(\dim(\mathrm{Z}), n_{\mathrm{I}}\big) \ .$$

Démonstration. Supposons que $\dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z}) = \min\big(\dim(\mathrm{Z}), n_{\mathrm{I}}\big)$ pour toute partie non vide I de $\{1, \ldots, r\}$; soient Y une sous-variété irréductible de $\mathbf{P}$ de dimension $\geq \operatorname{codim}(\mathrm{Z})$ et I une partie non vide de $\{1, \ldots, r\}$. Si $\dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z}) = n_{\mathrm{I}}$, alors $\dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z}) + \dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Y}) \geq n_{\mathrm{I}}$. Sinon, on a $\dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z}) = \dim(\mathrm{Z})$; comme

$$\dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Y}) \geq \dim(\mathrm{Y}) - (\dim(\mathbf{P}) - n_{\mathrm{I}}) = n_{\mathrm{I}} - \operatorname{codim}(\mathrm{Y}) \geq n_{\mathrm{I}} - \dim(\mathrm{Z}) \ ,$$

on a encore $\dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z}) + \dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Y}) \geq n_{\mathrm{I}}$. Il résulte du th. 2.2.1) que Z rencontre Y .

Supposons inversement Z encombrante. Soit I une partie non vide de $\{1, \ldots, r\}$ telle que $p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z}) \neq \mathbf{P}_{\mathrm{I}}$, et soit L un sous-espace linéaire de $\mathbf{P}_{\mathrm{I}}$ de codimension $\dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z}) + 1$, disjoint de $p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z})$. Alors Z ne rencontre pas $p_{\mathrm{I}}^{-1}(\mathrm{L})$, de sorte que

$$\dim(\mathrm{Z}) < \operatorname{codim} p_{\mathrm{I}}^{-1}(\mathrm{L}) = \dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z}) + 1 \ .$$

Ceci entraîne $\dim(\mathrm{Z}) = \dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z})$ et termine la démonstration. ∎

On dira qu'une sous-variété Z de $\mathbf{P}$ est *bonne* si $\dim p_i(\mathrm{Z}) = \dim(\mathrm{Z})$ pour tout $i = 1, \ldots, r$.

Proposition 2.7.– *Soient* X *une variété irréductible complète,* $f : \mathrm{X} \to \mathbf{P}$ *un morphisme et* Z *une sous-variété irréductible de* $\mathbf{P}$ *telle que* $\dim f(\mathrm{X}) > \mathrm{codim}(\mathrm{Z})$ *.*

a) *Si* Z *est encombrante et que* $\dim p_i f(\mathrm{X}) > 0$ *pour tout* $i = 1, \ldots, r$ *,* $f^{-1}(\mathrm{Z})$ *est connexe ;*

b) *si* Z *est bonne,* $f^{-1}(\mathrm{Z})$ *est connexe.*

Démonstration. Soit I une partie non vide de $\{1, \ldots, r\}$. Sous les hypothèses de a), on a soit $\dim(\mathrm{Z}) > n_{\mathrm{I}}$, auquel cas $\dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z}) = n_{\mathrm{I}}$ et $\dim p_{\mathrm{I}} f(\mathrm{X}) + \dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z}) > n_{\mathrm{I}}$; soit $\dim(\mathrm{Z}) \leq n_{\mathrm{I}}$, auquel cas $\dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z}) = \dim(\mathrm{Z})$ et

$$\begin{aligned} \dim p_{\mathrm{I}} f(\mathrm{X}) + \dim p_{\mathrm{I}}(\mathrm{Z}) &\geq \dim f(\mathrm{X}) - \sum_{j \notin \mathrm{I}} n_j + \dim(\mathrm{Z}) \\ &> \mathrm{codim}(\mathrm{Z}) - \sum_{j \notin \mathrm{I}} n_j + \dim(\mathrm{Z}) = n_{\mathrm{I}} \ . \end{aligned}$$

Dans chacun de ces deux cas, on peut appliquer le cor. 2.3. Sous l'hypothèse b), on est toujours dans le deuxième cas. ∎

Remarques 2.8.– 1) La petite diagonale de $(\mathbf{P}^n)^r$ est bonne; on retrouve donc les résultats de connexité de [FL1].

2) Sous les hypothèses du corollaire, être encombrante n'est pas suffisant en général pour assurer la connexité de $f^{-1}(\mathrm{Z})$, comme le montre l'exemple suivant. Soit Γ une courbe irréductible dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ telle que la première projection $\Gamma \to \mathbf{P}^1$ soit de degré > 1. Soient $s : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^r \to \mathbf{P}^{2r+1}$ le plongement de Segre et $\mathbf{P} = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^{2r+1}$; l'image Z de $\Gamma \times \mathbf{P}^r$ par $\mathrm{Id} \times s : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^r \to \mathbf{P}$ est encombrante, mais, pour un point général x de $\mathbf{P}^1$, $\mathrm{Z} \cap p_1^{-1}(x)$ n'est pas connexe, bien que $\dim(\mathrm{Z}) + \dim p_1^{-1}(x) = r + 1 + 2r + 1 > 2r + 2$.

II. GRASSMANNIENNES

On appelle *partition* un $(d+1)$-uplet $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_d)$ d'entiers tels que $n - d \geq \lambda_0 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0$; on sous-entendra toujours $\lambda_i = 0$ pour $i > d$, et on omettra même souvent les λ_i nuls. On note $|\lambda| = \lambda_0 + \cdots + \lambda_d$ l'entier partitionné; $\bar{\lambda}$ la partition $(n - d - \lambda_d, \ldots, n - d - \lambda_0)$, et λ^* la partition $(\lambda_0^*, \ldots, \lambda_{n-d-1}^*)$, définie par $\lambda_i^* = \max\{ j \mid \lambda_j > i \}$, pour $i = 0, \ldots, n - d - 1$. On a $\overline{\lambda^*} = \bar{\lambda}^*$.

Si λ et μ sont deux partitions, on écrit $\lambda \leq \mu$ si $\lambda_i \leq \mu_i$ pour tout $i = 0, \ldots, d$, et $\lambda < \mu$ si $\lambda_i < \mu_i$ pour tout $i = 0, \ldots, d$.

A toute partition λ correspond une *classe de Schubert* σ_λ dans $\mathrm{A}^{|\lambda|}\big(\mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)\big)$. Pour tout drapeau $\mathbf{L} = (\mathrm{L}^{(0)} \subset \cdots \subset \mathrm{L}^{(d)} \subset \mathbf{P}^n)$ avec $\dim(\mathrm{L}^{(i)}) = n - d + i - \lambda_i$, σ_λ est la classe de la variété de Schubert

$$\Sigma_{\mathbf{L}} = \{ \, u \in \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n) \mid \dim\big(\Lambda_u \cap \mathrm{L}^{(i)}\big) \geq i, \quad \text{pour} \quad i = 0, \ldots, d \, \} \ .$$

Pour $m \in \{0, \ldots, n - d\}$, la classe σ_m est dite *spéciale*; les variétés de Schubert associées sont

$$\Sigma_{\mathrm{L}} = \{ \, u \in \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n) \mid \Lambda_u \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \, \} \ ,$$

où $\operatorname{codim}(\mathrm{L}) = d + m$.

Les classes de Schubert forment une base du $\mathbf{Z}$-module $\mathrm{A}^*\big(\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)\big)$. On a $\sigma_\lambda \cdot \sigma_{\bar\lambda} = 1$; si X est une sous-variété de $\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$, sa classe dans $\mathrm{A}^*\big(\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)\big)$ s'écrit donc $[\mathrm{X}] = \sum_\lambda [\mathrm{X}]_\lambda \sigma_\lambda$, avec $[\mathrm{X}]_\lambda = [\mathrm{X}] \cdot \sigma_{\bar\lambda}$; les $[\mathrm{X}]_\lambda$ sont des entiers positifs non tous nuls.

4. Calcul de Schubert

Voici un résultat élémentaire pour lequel je n'ai pas trouvé de référence.

Lemme 4.1.– *On a*

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda \leq \bar\mu \ .$$

En particulier, si $\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu \neq 0$ *et* $\lambda' \leq \lambda$, *alors* $\sigma_{\lambda'} \cdot \sigma_\mu \neq 0$.

Démonstration. Si la propriété $\lambda \leq \bar\mu$ n'est pas vérifiée, $\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = 0$ ([GH], p. 198).

Supposons au contraire $\lambda \leq \bar\mu$. Montrons par récurrence sur $|\bar\mu| - |\lambda|$ que $\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu$ est non nul. Si $|\lambda| = |\bar\mu|$, alors $\lambda = \bar\mu$ et $\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = 1$. Si $|\lambda| < |\bar\mu|$, on choisit i_0 minimal tel que $\lambda_{i_0} + \mu_{d-i_0} < n - d$. La partition λ' définie par $\lambda'_i = \lambda_i + \delta_{i,i_0}$ vérifie $\lambda' \leq \bar\mu$ et $\lambda'_0 \leq n - d$, et l'hypothèse de récurrence entraîne $\sigma_{\lambda'} \cdot \sigma_\mu \neq 0$. Comme λ' intervient avec un coefficient non nul dans la décomposition du produit $\sigma_1 \cdot \sigma_\lambda$ en somme de classes de Schubert donnée par la formule de Pieri ([F], p. 271), on a aussi $\sigma_1 \cdot \sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu \neq 0$, d'où le lemme. ∎

Le lemme entraîne : *soient* X *et* Y *des sous-variétés de* $\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ *; pour que* $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$ *soit non vide, il faut et il suffit qu'il existe des partitions* λ *et* μ *avec* $[\mathrm{X}]_\lambda \neq 0$, $[\mathrm{Y}]_\mu \neq 0$ *et* $\lambda \leq \bar\mu$.

5. Le résultat de Hansen

Hansen a obtenu dans [H] un théorème de connexité pour les variétés de drapeaux, qui s'énonce comme suit dans le cas des grassmanniennes : *soient* X *une variété irréductible complète,* Δ *la diagonale de* $\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n) \times \mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ *et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n) \times \mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ *un morphisme. Si* $\dim f(\mathrm{X}) < n$, *alors* $f^{-1}(\Delta)$ *est connexe.*

Il montre aussi par la construction suivante que sa borne est la meilleure possible.

(5.1) **L'exemple de Hansen-Harris**. Dans $\mathbf{P}^n$, on considère une sous-variété irréductible S de dimension l et un sous-espace linéaire L de codimension l rencontrant S transversalement. La variété $\mathrm{X} = \{\ (p,u) \in \mathrm{S} \times \mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n) \mid p \in \Lambda_u\}$ est projective irréductible; notons $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ la seconde projection et $\mathrm{Y} = \mathrm{G}(d,\mathrm{L})$. Lorsque $d < n - l$, $f^{-1}(\mathrm{Y})$ a deux composantes connexes. On a d'autre part $\operatorname{codim} f(\mathrm{X}) = n - d - l$ et $\operatorname{codim}(\mathrm{Y}) = l(d+1)$; plus précisément (*cf.* [F], ex. 14.7.6)

$$[f(\mathrm{X})] = \deg(\mathrm{S})\ \sigma_{n-d-l} \qquad \text{et} \qquad [\mathrm{Y}] = \sigma_{l,\ldots,l} \ .$$

On remarquera que $[f(\mathrm{X})] \cdot [\mathrm{Y}] \cdot (\sigma_{1,\ldots,1} + \sigma_{n-d}) = 0$.

(5.2) Dans la même veine, soient d et r des entiers tels que $d/2 + 1 \leq r \leq d + 1$ et $d > 0$. Posons $n = d + 2r$ et considérons une quadrique lisse Q dans $\mathbf{P}^n$. La variété $\mathrm{X} = \{\ u \in \mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n) \mid \Lambda_u \subset \mathrm{Q}\}$ est irréductible lisse ([Ha], th. 22.13). Soit L un sous-espace linéaire de $\mathbf{P}^n$ de dimension $(2r-1)$, transverse à Q ; soit Y la variété de Schubert

$\{u \in G(d, \mathbf{P}^n) \mid \dim(\Lambda_u \cap L) \geq r-1\}$. Pour tout $u \in X \cap Y$, l'espace linéaire $\Lambda_u \cap L$ est de dimension $\geq r-1$ et est contenu dans la quadrique $L \cap Q$, lisse de dimension $2r-2$. Il fait donc partie de l'une des deux familles de $(r-1)$-plans contenus dans $L \cap Q$ (*loc.cit.*). On en déduit que $X \cap Y$ n'est pas connexe, alors que $\dim(X) + \dim(Y) > \dim G(d, \mathbf{P}^n)$. On notera que ([F], ex. 14.7.15)

$$[X] = 2^{d+1}\sigma_{d+1,d,\ldots,1} \qquad \text{et} \qquad [Y] = \sigma_{\underbrace{r,\ldots,r}_{r \text{ fois}}} .$$

Il ressort du lemme 4.1 que de nouveau, on a $[X] \cdot [Y] \cdot (\sigma_{1,\ldots,1} + \sigma_{n-d}) = 0$.

Notre but est d'étendre le résultat de Hansen en tenant compte des propriétés numériques de la sous-variété $f(X)$ de $G(d, \mathbf{P}^n) \times G(d, \mathbf{P}^n)$.

6. Un théorème de Bertini

Le théorème suivant est notre résultat clé. Pour tout $p \in \mathbf{P}^n$, on note Σ_p la variété $\{z \in G(1, \mathbf{P}^n) \mid p \in \Lambda_z\}$. Le plongement de Plücker induit un isomorphisme de $\Sigma_{pur\ un}$ espce prjecif de dimensin $n-1$.

THÉORÈME 6.1.– *Soient* X *une variété irréductible,* $f : X \to G(1, \mathbf{P}^n)$ *un morphisme dominant et* p *un point général de* $\mathbf{P}^n$.

a) $f^{-1}(\Sigma_p)$ *est irréductible ;*

b) $(k = \mathbf{C})$ *si* X *est localement irréductible,* $\pi_1\big(f^{-1}(\Sigma_p)\big) \twoheadrightarrow \pi_1(X)$.

Lorsque X est complète, le théorème de Hansen entraîne que $f^{-1}(\Sigma_p)$ est connexe pour tout p ; il n'est pas difficile d'en déduire a) dans ce cas. On notera que l'hypothèse que f est dominant est indispensable : si l'on prend $d = n-2$ dans l'exemple (5.1) et que l'on dualise, l'image de f est un diviseur, mais $f^{-1}(\Sigma_p)$ a deux composantes connexes pour p général.

Démonstration du théorème. Je n'ai pas réussi à donner une démonstration de ce résultat basée sur le théorème de Bertini usuel. Je vais donner deux démonstrations : l'une sera valable en toute caractéristique et démontrera a), l'autre supposera $k = \mathbf{C}$ et démontrera a) et b). Posons $G = G(1, \mathbf{P}^n)$.

Supposons donc tout d'abord k de caractéristique quelconque. La démonstration suit celle du th. 6.3 de [J]. On rappelle qu'une extension de corps $K \subset K'$ est dite *primaire* si la fermeture algébrique de K dans K' est radicielle. Prenons des coordonnees homogènes $(x_0, \ldots, x_n)$ dans $\mathbf{P}^n$ et notons Λ le sous-espace linéaire défini par $x_0 = x_1 = 0$. L'ouvert

$$G^0 = \{\, u \in G \mid \Lambda_u \cap \Lambda = \varnothing \,\}$$

de G est affine; on peut le paramétrer en associant à $(a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in k^{2n-2}$ la droite joignant les points $(1, 0, a_2, \ldots, a_n)$ et $(0, 1, b_2, \ldots, b_n)$. Considérons la correspondance d'incidence $I = \{(p, u) \in \mathbf{A}^{n+1} \times G^0 \mid u \in \Sigma_{[p]}\}$; la condition $u \in \Sigma_{[p]}$ est équivalente à $p \in \Lambda_u$, de sorte que I est définie par les équations $p_i = p_0 a_i + p_1 b_i$, $i = 2, \ldots, n$. En particulier, l'application

$$(p_0, p_1, a_2, \ldots, a_n, b_2, \ldots, b_n) \mapsto (p_0, p_1, p_0 a_2 + p_1 b_2, \ldots, p_0 a_n + p_1 b_n, a_2, \ldots, b_2, \ldots)$$

définit un isomorphisme de G^0-schémas entre $\mathbf{A}^2 \times G^0$ et I.

Pour montrer le théorème, on peut remplacer G par G^0. On note $Z = X \times_{G^0} I$; le morphisme $Z \to X$ est un fibré vectoriel trivial de rang 2. En particulier, Z est intègre. Il s'agit de montrer que les fibres du morphisme $h : Z \to I \xrightarrow{pr_1} \mathbf{A}^{n+1}$ sont presque toutes irréductibles. Le premier pas de l'argument est classique : la fibre générique F de h est intègre, et il suffit de montrer qu'elle est géométriquement irréductible ([J], 4.10) ; pour cela, montrons que le corps des fractions $K(Z)$ est extension primaire de $K = k(p_0, \dots, p_n)$ ([J], 4.3). Par hypothèse, le morphisme $Z \to I$ est dominant ; on a une suite d'extensions

$$\begin{array}{ccccccccc}
k(p_0,p_1) & \subset & k(p_0,\dots,p_n) & \subset & k(p_0,\dots,p_n,a_2,\dots,a_n) & \subset & k(p_0,p_1,a_2,\dots,b_2,\dots) & & \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \\
K_0 & \subset & K & \subset & L & \subset & K(I) & \subset & K(Z) ,
\end{array}$$

où $K(Z)$ est une extension pure de $K(X)$ de base (p_0, p_1), et a_i, $b_i \in K(X)$.

Notant $\tilde{K}$ la fermeture séparable de K dans $K(Z)$, il s'agit de montrer que $K = \tilde{K}$. Soit $\tilde{L}$ la fermeture séparable de L dans $K(Z)$, on a $\tilde{K} \subset \tilde{L}$ et $\tilde{K}$ (resp. $\tilde{L}$) est de type fini algébrique, donc fini sur K (resp. L). Pour tout $c \in k$, on définit un $K(X)$-automorphisme σ_c de $K(Z)$ par les relations $\sigma_c(p_0) = p_0 + c$ et $\sigma_c(p_1) = p_1$. On a $\sigma_c(p_i) = p_i + ca_i$ pour $i = 2, \dots, n$, de sorte que $\sigma_c(L) \subset L$ et $\sigma_c(\tilde{L}) \subset \tilde{L}$. Le corps $M_c = L(\sigma_c \tilde{K})$ est une extension séparable finie de L, contenue dans $\tilde{L}$; comme $\tilde{L}$ est séparable fini sur L, et que k est infini, il existe $c \neq c'$ tels que $M = M_c = M_{c'}$. On pose $\theta_i = \sigma_c(p_i) = p_i + ca_i$ et $\theta'_i = \sigma_{c'}(p_i) = p_i + c'a_i$, pour $i = 2, \dots, n$, de sorte que $L = K_0(\theta_2, \dots, \theta_n, \theta'_2, \dots, \theta'_n)$. Soit ξ un élément primitif de l'extension $\tilde{K}$ de K ; posons $a = \sigma_c(\xi)$ et $a' = \sigma_{c'}(\xi)$, de sorte que $M = L(a) = L(a')$.

Puisque X est géométriquement irréductible, l'extension $k \subset K(X)$ est primaire ; par [J], 3.13.3, il en est de même de l'extension $K_0 \subset K(Z)$, et *a fortiori* de l'extension $K_0 \subset K_0(a, \theta_2, \dots, \theta_n) = \sigma_c \tilde{K}$. Puisque le morphisme $I \to \mathbf{A}^{2n}$ défini par $(p, u) \mapsto (p_0, \dots, p_n, a_2, \dots, a_n)$ est dominant, le degré de transcendance de L (donc aussi celui de $L(a)$) sur K_0 vaut $2n - 2$; comme celui de $\sigma_c \tilde{K}$ est $n - 1$, la famille $\{\theta'_2, \dots, \theta'_n\}$ est algébriquement indépendante sur $\sigma_c \tilde{K}$. Par *loc.cit.*, l'extension $K_0(\theta'_2, \dots, \theta'_n) \subset L(a) = M$ est primaire. Mais $a' = \sigma_{c'}(\xi)$ appartient à M et est algébrique séparable sur $K_0(\theta'_2, \dots, \theta'_n) = \sigma_{c'} K$. Par suite, $a' = \sigma_{c'}(\xi)$ est dans $\sigma_{c'} K$, de sorte que ξ est dans K. On a donc $\tilde{K} = K$, d'où le théorème.

Supposons maintenant $k = \mathbf{C}$; on suit la démonstration du th. 1.1 de [FL1]. Par « droite contenue dans G », on entend toute sous-variété de G du type

$$\ell_{p,P} = \{ \ x \in G(1, \mathbf{P}^n) \mid p \in \Lambda_x \subset P \ \} ,$$

où p est un point d'un 2-plan P contenu dans $\mathbf{P}^n$ (ce sont en fait toutes les droites contenues dans l'image du plongement de Plücker de G). Elles sont paramétrées par une variété de drapeaux $\mathcal{L}$ irréductible lisse de dimension $3n - 4$.

Comme dans la démonstration du lemme 1.4 de [De], quitte à rétrécir X, on peut supposer que f fait de X un espace fibré topologiquement localement trivial au-dessus de $f(\mathrm{X})$, et que ce dernier est le complémentaire G^1 d'une hypersurface B de G. Soient u_0 un point général de G^1 et $\mathcal{L}_0$ la sous-variété de $\mathcal{L}$ formée des droites contenues dans G et passant par u_0. Le sous-ensemble de $\mathcal{L}_0$ qui consiste en les droites transverses à B contient un ouvert de Zariski dense $\mathcal{L}_0^1$ ([K]). Considérons la correspondance d'incidence $\mathrm{J}=\{(u,\ell)\in \mathrm{G}^1\times\mathcal{L}_0 \mid u\in\ell\}$, et posons $\mathrm{Z}=\mathrm{X}\times_{\mathrm{G}^1}\mathrm{J}=\{(x,\ell)\in\mathrm{X}\times\mathcal{L}_0 \mid f(x)\in\ell\}$.

L'image de la première projection $\mathrm{J}\to\mathrm{G}^1$ est $pr_1(\mathrm{J})=\{u\in\mathrm{G}^1 \mid \Lambda_u\cap\Lambda_{u_0}\neq\varnothing\}$, et réalise J comme l'éclatement de u_0 dans $pr_1(\mathrm{J})$. On en déduit que la première projection $\mathrm{Z}\to\mathrm{X}$ réalise Z comme l'éclatement de $f^{-1}(u_0)$ dans $\mathrm{X}_0=\{x\in\mathrm{X}\mid\Lambda_{f(x)}\cap\Lambda_{u_0}\neq\varnothing\}$.

Posons $\mathrm{T}=\{(x,p)\in\mathrm{X}\times\mathbf{P}^n \mid p\in\Lambda_{f(x)}\}$; la première projection $pr_1:\mathrm{T}\to\mathrm{X}$ est un $\mathbf{P}^1$-fibré, de sorte que T est irréductible. La seconde projection $pr_2:\mathrm{T}\to\mathbf{P}^n$ est dominante puisque f l'est ; puisque u_0 est général, le théorème de Bertini usuel entraîne que $pr_2^{-1}(\Lambda_{u_0})$ est irréductible, donc aussi $\mathrm{X}_0=pr_1\bigl(pr_2^{-1}(\Lambda_{u_0})\bigr)$. Par suite, Z est irréductible.

La seconde projection $\mathrm{Z}\to\mathrm{J}$ est un revêtement topologique ; il en est de même de la projection $\mathrm{J}\to\mathcal{L}_0$ au-dessus de l'ouvert $\mathcal{L}_0^1$ (ses fibres sont des sphères privées de deg(B) points), donc aussi de la composée $h:\mathrm{Z}\to\mathcal{L}_0$ au-dessus de $\mathcal{L}_0^1$. Or $h^{-1}(\mathcal{L}_0^1)$, ouvert dans Z, est irréductible, et h admet comme section $\ell\mapsto(x_0,\ell)$, pour tout point fixé x_0 de $f^{-1}(u_0)$. Comme les fibres d'une fibration localement triviale entre espaces connexes, qui admet une section, sont toutes connexes, on en déduit que pour tout $\ell\in\mathcal{L}_0^1$, $f^{-1}(\ell)$ est connexe. Pour tout Σ_p contenant une droite transverse à B, $f^{-1}(\Sigma_p)$ est connexe ; étant lisse, il est irréductible, ce qui démontre a). Pour démontrer b), il suffit d'appliquer a) à la composée $f\circ\pi$, où $\pi:\tilde{\mathrm{X}}\to\mathrm{X}$ est le revêtement universel de X. ■

On en déduit un théorème de Bertini pour les grassmanniennes.

THÉORÈME 6.2.– *Soient* X *une variété irréductible,* $f:\mathrm{X}\to\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ *un morphisme, et* l *un entier tel que* $d<l\leq n$. *On suppose que pour* $\mathrm{M}\in\mathrm{G}(l-1,\mathbf{P}^n)$ *général,* $f(\mathrm{X})$ *rencontre* $\mathrm{G}(d,\mathrm{M})$. *Pour* $\mathrm{L}\in\mathrm{G}(l,\mathbf{P}^n)$ *général,*

a) $f^{-1}\bigl(\mathrm{G}(d,\mathrm{L})\bigr)$ *est irréductible ;*

b) $(k=\mathbf{C})$ *si* X *est localement irréductible,* $\pi_1\bigl(f^{-1}\bigl(\mathrm{G}(d,\mathrm{L})\bigr)\bigr)\twoheadrightarrow\pi_1(\mathrm{X})$.

Le théorème de Bertini usuel correspond au cas $d=0$.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où L est un hyperplan de $\mathbf{P}^n$, où l'on a $d\leq n-2$. Posons

$$\mathrm{Z}=\{\ (x,u)\in\mathrm{X}\times\mathrm{G}(n-2,\mathbf{P}^n)\mid\Lambda_{f(x)}\subset\Lambda_u\ \}\ .$$

La première projection $p:\mathrm{Z}\to\mathrm{X}$ est un fibré en grassmanniennes, de sorte que Z est irréductible, et localement irréductible si X l'est. Dans le cadre topologique, on a aussi $\pi_1(\mathrm{Z})\twoheadrightarrow\pi_1(\mathrm{X})$. La seconde projection $q:\mathrm{Z}\to\mathrm{G}(n-2,\mathbf{P}^n)$ est dominante par hypothèse, et, pour tout hyperplan L de $\mathbf{P}^n$, on a $p\bigl(q^{-1}\bigl(\mathrm{G}(n-2,\mathrm{L})\bigr)\bigr)=f^{-1}\bigl(\mathrm{G}(d,\mathrm{L})\bigr)$. On est donc ramené au cas $d=n-2$. En dualisant, on obtient un morphisme $f:\mathrm{X}\to\mathrm{G}(1,\mathbf{P}^n)$ dominant, auquel il suffit d'appliquer le théorème 6.1. ■

Avec des hypothèses de propreté, on passe alors comme d'habitude à des énoncés de connexité.

Théorème 6.3.– *Soient* X *une variété irréductible,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)$ *un morphisme,* l *un entier tel que* $d < l \leq n$ *, et* L *un sous-espace linéaire de* $\mathbf{P}^n$ *de dimension* l *. On suppose que pour* $\mathrm{M} \in \mathrm{G}(l-1, \mathbf{P}^n)$ *général,* $f(\mathrm{X})$ *rencontre* $\mathrm{G}(d, \mathrm{M})$ *.*

a) *Si* f *est propre au-dessus d'un ouvert* V *de* $\mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)$ *et que* $\mathrm{G}(d, \mathrm{L})$ *est contenu dans* V *, alors* $f^{-1}\big(\mathrm{G}(d, \mathrm{L})\big)$ *est connexe ;*

b) $(k = \mathbf{C})$ *si* X *est localement irréductible, pour tout voisinage ouvert* U *de* $\mathrm{G}(d, \mathrm{L})$ *dans* $\mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)$ *, on a* $\pi_1\big(f^{-1}(\mathrm{U})\big) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathrm{X})$ *.*

Démonstration. On suit [FL1], th. 2.1 ; posons $\mathrm{Z} = \{(x, u) \in \mathrm{X} \times \mathrm{G}(d, \mathrm{L}) \mid \Lambda_{f(x)} \subset \Lambda_u\}$. La première projection réalise Z comme un fibré en grassmanniennes au-dessus de X , de sorte que Z est irréductible. La projection $q : \mathrm{Z} \to \mathrm{G}(d, \mathrm{L})$ est propre, donc admet une factorisation de Stein $\mathrm{Z} \xrightarrow{q'} \mathrm{G}' \xrightarrow{\rho} \mathrm{G}(d, \mathrm{L})$, où ρ est fini et où les fibres de q' sont connexes. Par th. 6.2, ρ est birationnel surjectif ; comme $\mathrm{G}(d, \mathrm{L})$ est normal, ρ est bijectif, de sorte que les fibres de q sont connexes, ce qui montre a).

Tout voisinage ouvert U de $\mathrm{G}(d, \mathrm{L})$ contient des $\mathrm{G}(d, \mathrm{L}')$ auxquels on peut appliquer le th. 6.2.b), d'où b). ∎

Remarque 6.4.– On aura besoin de la version plus fine de b) suivante : *pour tout* $x \in f^{-1}\big(\mathrm{G}(d, \mathrm{L})\big)$ *, l'homomorphisme* $\pi_1\big(f^{-1}(\mathrm{U}), x\big) \to \pi_1(\mathrm{X}, x)$ *est surjectif.* Cela se démontre comme dans [FL1], remark 2.2.

7. Théorèmes de connexité

On note Δ la diagonale de $\mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n) \times \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)$ et, pour tout $\Omega \in \mathrm{PGL}(n+1, k)$, ${}^{\Omega}\Delta$ l'image de Δ par l'automorphisme $(x, y) \mapsto (x, \Omega y)$ de $\mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n) \times \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)$.

Théorème 7.1.– *Soient* X *une variété irréductible et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n) \times \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)$ *un morphisme. On suppose qu'il existe des partitions* λ *et* μ *vérifiant* $\lambda < \bar{\mu}$ *ou* $\lambda^* < \bar{\mu}^*$ *, telles que* $[\overline{f(\mathrm{X})}] \cdot p_1^* \sigma_{\bar{\lambda}} \cdot p_2^* \sigma_{\bar{\mu}} \neq 0$ *.*

a) *Pour* Ω *général dans* $\mathrm{PGL}(n+1, k)$ *,* $f^{-1}({}^{\Omega}\Delta)$ *est irréductible ;*

b) *si* X *est complète,* $f^{-1}(\Delta)$ *est connexe ;*

c) $(k = \mathbf{C})$ *si* X *est localement irréductible et complète,* $\pi_1\big(f^{-1}(\Delta)\big) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathrm{X})$ *.*

Remarques 7.2.– 1) La condition $\lambda < \bar{\mu}$ équivaut aux inégalités $\lambda_i + \mu_{d-i} < n - d$ pour tout $i = 0, \ldots, d$. La condition $\lambda^* < \bar{\mu}^*$ équivaut aux relations $\lambda_d = \mu_d = 0$ et $\lambda_i + \mu_{d-i-1} \leq n - d$ pour tout $i = 0, \ldots, d-1$.

2) On peut vérifier que le théorème entraîne le résultat de Hansen (*cf.* § 5).

Démonstration du théorème. On considère des coordonnées homogènes $[x^{(1)}, x^{(2)}]$ sur $\mathbf{P}^{2n+1}$, où $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont des $(n+1)$-uplets d'éléments de k . Soit Ω un élément de $\mathrm{GL}(n+1, k)$ et Ω son image dans $\mathrm{PGL}(n+1, k)$; on note L_1 (resp. L_2) (resp. ${}^{\Omega}\mathrm{L}$) le sous-espace linéaire de dimension n de $\mathbf{P}^{2n+1}$ défini par $x^{(1)} = 0$ (resp. $x^{(2)} = 0$) (resp. $x^{(1)} = \Omega(x^{(2)})$). Soit V l'ouvert $\mathrm{G}(d, \mathbf{P}^{2n+1}) - \Sigma_{\mathrm{L}_1} - \Sigma_{\mathrm{L}_2}$; pour $i = 1$, 2, soient $\rho_i : \mathbf{P}^{2n+1} - \mathrm{L}_i \to \mathbf{P}^n$ le morphisme $[x^{(1)}, x^{(2)}] \mapsto [x^{(i)}]$ et $\varphi_i : \mathrm{V} \to \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)$ le morphisme induit. Le morphisme $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathrm{V} \to \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n) \times \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)$ est un $\mathrm{GL}(d+1, k)$-fibré, et induit un isomorphisme de $\mathrm{G}(d, {}^{\Omega}\mathrm{L})$ sur ${}^{\Omega}\Delta$. Si on note $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n) \times \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)} \mathrm{V}$ et $f' : \mathrm{X}' \to \mathrm{V}$ la projection, on a $f'^{-1}\big(\mathrm{G}(d, {}^{\Omega}\mathrm{L})\big) \simeq f^{-1}({}^{\Omega}\Delta)$.

Soit M un sous-espace linéaire de $\mathbf{P}^{2n+1}$ général de dimension $n-1$, de sorte que, pour $i=1,\ 2$, l'espace $\mathrm{M}\cap \mathrm{L}_i$ est vide et que ρ_i induit un isomorphisme de M sur un hyperplan H_i de $\mathbf{P}^n$. On note $\Omega_i : \mathrm{G}(d,\mathrm{M}) \to \mathrm{G}(d,\mathrm{H}_i)$ l'isomorphisme induit. Le morphisme φ induit un isomorphisme de $\mathrm{G}(d,\mathrm{M})$ sur

$$\Omega_{\mathrm{M}} = \{\ (u, \Omega_2\big(\Omega_1^{-1}(u)\big)\ \mid u\in \mathrm{G}(d,\mathrm{H}_1)\ \}$$

et $f'^{-1}\big(\mathrm{G}(d,\mathrm{M})\big) \simeq f^{-1}(\Omega_{\mathrm{M}})$. La décomposition de Künneth de $\mathrm{A}^*\big(\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)\times \mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)\big)$ ([FMSS]) permet de déterminer la classe de la sous-variété Ω_{M} ; elle vaut

$$\sum p_1^*\sigma_\alpha \cdot p_2^*\sigma_\beta\ ,$$

la somme portant sur toutes les partitions α et β telles que $\alpha_i+\beta_{d-i}=n-d+1$ pour tout $i=0,\dots,d$.

Quitte à dualiser, il existe par hypothèse des partitions λ et μ telles que $\lambda<\bar\mu$, vérifiant $[\overline{f(\mathrm{X})}]\cdot p_1^*\sigma_{\bar\lambda}\cdot p_2^*\sigma_{\bar\mu}\neq 0$. Définissons une partition λ' par $\lambda'_i=\bar\mu_i-1$; on a $\lambda'\geq\lambda$, et le lemme 4.1 entraîne $[\overline{f(\mathrm{X})}]\cdot p_1^*\sigma_{\bar\lambda'}\cdot p_2^*\sigma_{\bar\mu}\neq 0$. Comme le produit $p_1^*\sigma_{\bar\lambda'}\cdot p_2^*\sigma_{\bar\mu}$ intervient dans l'expression de $[\Omega_{\mathrm{M}}]$ donnée ci-dessus, on obtient $[\overline{f(\mathrm{X})}]\cdot[\Omega_{\mathrm{M}}]\neq 0$. On a donc $[\overline{f'(\mathrm{X}')}]\cdot[\mathrm{G}(d,\mathrm{M})]\neq 0$, d'où a) (th. 6.2). Lorsque X est complète, f' est propre; on en déduit b) (th. 6.3).

Le point c) se déduit du th. 6.3.b) et de la remarque 6.4, comme dans [FL1], p. 40. ■

On peut dérouler les corollaires habituels.

Corollaire 7.3.– *Soient* X *et* Y *des variétés irréductibles et* $f:\mathrm{X}\to\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ *et* $g:\mathrm{Y}\to\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ *des morphismes. On suppose que* $[\overline{f(\mathrm{X})}]\cdot[\overline{g(\mathrm{Y})}]\cdot(\sigma_{1,\dots,1}+\sigma_{n-d})\neq 0$.

a) *Pour* Ω *général dans* $\mathrm{PGL}(n+1,k)$, $\mathrm{X}\times_{\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)}{}^{\Omega}\mathrm{Y}$ *est irréductible ;*

b) *si* X *et* Y *sont complètes,* $\mathrm{X}\times_{\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)}\mathrm{Y}$ *est connexe ;*

c) $(k=\mathbf{C})$ *si* X *et* Y *sont localement irréductibles et complètes,* $\pi_1(\mathrm{X}\times_{\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)}\mathrm{Y})\twoheadrightarrow\pi_1(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour que $[\overline{f(\mathrm{X})}]\cdot[\overline{g(\mathrm{Y})}]\cdot\sigma_{1,\dots,1}$ soit non nul, il faut et il suffit qu'il existe des partitions λ et μ vérifiant $\lambda<\bar\mu$, telles que $[\overline{f(\mathrm{X})}]_\lambda\neq 0$ et $[\overline{g(\mathrm{Y})}]_\mu\neq 0$ (lemme 4.1). On applique ensuite le théorème 7.1 au morphisme $(f,g):\mathrm{X}\times\mathrm{Y}\to\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)\times\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$. ■

Corollaire 7.4.– *Soit* X *une sous-variété irréductible de* $\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ *telle que* $[\mathrm{X}]\cdot[\mathrm{X}]\cdot(\sigma_{1,\dots,1}+\sigma_{n-d})\neq 0$.

a) $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathrm{X})=0$;

b) $(k=\mathbf{C})$ X *est simplement connexe.*

Rappelons (§ 2) qu'une sous-variété Z de $\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ est *encombrante* si elle rencontre toute sous-variété de $\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ de dimension $\geq \mathrm{codim}(\mathrm{Z})$. De façon équivalente, on demande que pour toute partition λ telle que $|\lambda|=\mathrm{codim}(\mathrm{Z})$, on ait $[\mathrm{Z}]_\lambda\neq 0$.

Remarque 7.5.– Soit Q le fibré quotient universel sur $\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$; il découle de [FL2] que toute une sous-variété Z de $\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ telle que la restriction de Q à Z soit ample, est encombrante (ainsi par conséquent que toute sous-variété de Z). C'est le cas par exemple pour l'image Z de l'application de Gauss d'une sous-variété lisse d'une variété abélienne *simple* (*cf.* [D2]). En considérant des intersections complètes de codimension 2 dans une variété abélienne simple de dimension $n+1$, on obtient des exemples de sous-variétés encombrantes de dimension $n-1$ dans $\mathrm{G}(1,\mathbf{P}^n)$ dont le groupe fondamental est isomorphe à $\mathbf{Z}^{2n+2}$.

Exemple 7.6.– Soit X une hypersurface générique de degré $d \leq 2n-4$ dans $\mathbf{P}^n$, avec $n \geq 4$. La variété de Fano F(X) des droites contenues dans X est lisse connexe de dimension $2n-3-d$ ([Ko], th. 4.3, p. 266). Si S est le fibré tautologique de rang 2 sur $\mathrm{G}(1,\mathbf{P}^n)$, la classe de F(X) dans $\mathrm{G}(1,\mathbf{P}^n)$ est $c_{d+1}\big(\mathrm{Sym}^d(\mathrm{S}^*)\big)$ ([F], ex 14.7.13, p. 275), c'est-à-dire $\prod_{0\leq 2i<d}[i(d-i)\sigma_1^2+(d-2i)^2\sigma_{1,1}]$ si d est impair, et la même expression multipliée par $\frac{d}{2}\sigma_1$ si d est pair. Chaque terme du produit, sauf celui correspondant à $i=0$, contient σ_1^2 avec un coefficient non nul, de sorte que cette classe est somme d'un multiple strictement positif de $\sigma_1^{d-1}\sigma_{1,1}$ et d'une combinaison linéaire à coefficients positifs de classes de Schubert. Pour $d \leq n-3$, on a $[\mathrm{F(X)}]\cdot[\mathrm{F(X)}]\cdot\sigma_{1,1} \neq 0$, de sorte que F(X) est algébriquement simplement connexe (et topologiquement simplement connexe si $k=\mathbf{C}$). Les résultats de [S] ne donnent ce dernier résultat que pour $d \leq (n-5)/2$; de plus nos résultats restent valides pour toute hypersurface X telle que F(X) soit irréductible de la bonne dimension.

8. Images inverses des variétés de Schubert

Soit $\mu=(\mu_0,\ldots,\mu_d)$ une partition ; on pose $\mathrm{J}(\mu)=\{j\in\{0,\ldots,d\}\mid \mu_j>\mu_{j+1}\}$. Si $\mu_d<n-d$, on définit pour tout $j\in \mathrm{J}(\mu)$ une partition $\mu^{(j)}$ de la façon suivante : si $\mu_j<n-d$, on pose $\mu_i^{(j)}=\mu_j+1$ pour $i\leq j$, et $\mu_i^{(j)}=\mu_i$ pour $i>j$; si $\mu_j=n-d$, on pose $\mu_i^{(j)}=n-d$ pour $i\leq j+1$, et $\mu_i^{(j)}=\mu_i$ pour $i>j+1$.

Théorème 8.1.– *Soient* X *une variété irréductible,* $f:\mathrm{X}\to \mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ *un morphisme, et* $\Sigma_{\mathbf{L}}$ *une variété de Schubert de dimension* >0 *et de classe* σ_μ. *On suppose que pour tout* $j\in\mathrm{J}(\mu)$, *on a* $[\overline{f(\mathrm{X})}]\cdot\sigma_{\mu^{(j)}}\neq 0$.

a) *Si* $\mathbf{L}$ *est général,* $f^{-1}(\Sigma_{\mathbf{L}})$ *est irréductible ;*

b) *si* X *est complète,* $f^{-1}(\Sigma_{\mathbf{L}})$ *est connexe ;*

c) $(k=\mathbf{C})$ *si* X *est localement irréductible et complète,* $\pi_1\big(f^{-1}(\Sigma_{\mathbf{L}})\big)\twoheadrightarrow\pi_1(\mathrm{X})$.

Exemples 8.2.– 1) Prenons par exemple $\mu=(5,2,2,1)$; lorsque $n-d>5$, on demande que le produit de $[\overline{f(\mathrm{X})}]$ avec chacune des classes de Schubert de type $(2,2,2,2)$, $(3,3,3,1)$ et $(6,2,2,1)$ soit non nul (pour $n-d=5$, changer la dernière en $(5,5,2,1)$). Ce théorème est donc en général meilleur que le th. 7.1. On notera que les hypothèses du théorème ne sont pas invariantes par dualité : sur l'exemple, la condition duale est, pour $d\geq 4$, que le produit de $[\overline{f(\mathrm{X})}]$ avec chacune des classes de Schubert de type $(5,5)$, $(5,2,2,2)$ et $(5,2,2,1,1)$ soit non nul (lorsque $d=3$, supprimer la dernière).

2) Lorsque $\mu_0<n-d$, l'hypothèse sur $f(\mathrm{X})$ peut aussi s'écrire : pour tout $i=0,\ldots,d$, il existe λ avec $[\overline{f(\mathrm{X})}]_\lambda\neq 0$, $\mu_j\leq\bar\lambda_j$ pour $j>i$, et $\mu_i<\bar\lambda_i$.

3) Lorsque $n-d>\mu_0>\cdots>\mu_r>\mu_{r+1}=0$, la condition requise est que l'intersection de $[\overline{f(\mathrm{X})}]$ avec chacune des classes de Schubert de type $(\mu_i+1,\ldots,\mu_i+1,\mu_{i+1},\ldots\mu\,r\,\lambda$ *suil lre* $i\leq n0,\ldots$

σ_m, on obtient la condi

$\overline{f(\mathrm{X})}]\cdot\sigma_{m+1}\neq 0$. La condition duale est $[\overline{f(\mathrm{X})}]\cdot\sigma_{m,m}\neq 0$.

Lorsque $m=1$, on obtient $[\overline{f(\mathrm{X})}]\cdot(\sigma_2+\sigma_{1,1})=[\overline{f(\mathrm{X})}]\cdot\sigma_1^2\neq 0$, c'est-à-dire simplement $\dim f(\mathrm{X})\geq 2$, l'hypothèse du théorème de Bertini usuel.

Démonstration du théorème. Notons la variété F des drapeaux $(\Lambda_0 \subset \cdots \subset \Lambda_d \subset \mathbf{P}^n)$, où Λ_i a dimension i, et p_i la surjection $\mathrm{F} \to \mathrm{G}(i, \mathbf{P}^n)$. Soient J un sous-ensemble de $\{0, \ldots, d\}$ et $\{\mathrm{M}^{(j)}\}_{j \in \mathrm{J}}$ une famille croissante de sous-espaces linéaires de $\mathbf{P}^n$. On a

$$p_d\Big(\bigcap_{j \in \mathrm{J}} p_j^{-1}\big(\mathrm{G}(j, \mathrm{M}^{(j)})\big) \Big) = \{ \ u \in \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n) \mid \dim(\Lambda_u \cap \mathrm{M}^{(j)}) \geq j \quad \text{pour tout} \quad j \in \mathrm{J} \ \} .$$

Si la fonction $j \mapsto \dim(\mathrm{M}^{(j)}) - j$ est croissante et à valeurs dans $\{0, \ldots, n-d\}$, cette sous-variété de $\mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)$ est la variété de Schubert associée à tout drapeau $(\mathrm{N}^{(0)} \subset \cdots \subset \mathrm{N}^{(d)})$ où $\mathrm{N}^{(i)} = \mathrm{M}^{(i)}$ si $i \in \mathrm{J}$, où $\mathrm{N}^{(i)}$ est un hyperplan quelconque de $\mathrm{N}^{(i+1)}$ si $i \notin \mathrm{J}$ et où $\mathrm{N}^{(d)} = \mathbf{P}^n$ si $d \notin \mathrm{J}$. La partition correspondante λ est définie par $\lambda_i = n - d + j - \dim(\mathrm{M}^{(j)})$, où j est le plus petit élément de J supérieur à i.

Notons $(\mathrm{L}^{(0)} \subset \cdots \subset \mathrm{L}^{(d)} \subset \mathbf{P}^n)$ le drapeau $\mathbf{L}$; la variété de Schubert $\Sigma_{\mathbf{L}}$ peut se définir par les inégalités $\dim(\Lambda_u \cap \mathrm{L}^{(j)}) \geq j$ en se restreignant aux j dans $\mathrm{J}(\mu)$. En particulier,

$$\Sigma_{\mathbf{L}} = p_d\Big(\bigcap_{j \in \mathrm{J}(\mu)} p_j^{-1}\big(\mathrm{G}(j, \mathrm{L}^{(j)})\big) \Big) .$$

La variété $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)} \mathrm{F}$ est irréductible puisque X l'est ; notons f' la projection $\mathrm{X}' \to \mathrm{F}$. Pour $i \geq 0$, notons X'_i la sous-variété $\displaystyle\bigcap_{j \in \mathrm{J}(\mu),\, j \geq i} (p_j f')^{-1}\big(\mathrm{G}(j, \mathrm{L}^{(j)})\big)$ de X', de sorte que $\mathrm{X}'_{d+1} = \mathrm{X}'$, et que l'image de X'_0 par la projection $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ est $f^{-1}(\Sigma_{\mathbf{L}})$.

Supposons $\mathbf{L}$ général et montrons par récurrence descendante sur i que X'_i est irréductible, ce qui prouvera a). Supposons X'_i irréductible pour tout $i > j$ et montrons que X'_j l'est aussi. Vue la définition de X'_j, il suffit de traiter le cas où $j \in \mathrm{J}(\mu)$.

Supposons d'abord que j ne soit pas le plus grand élément de $\mathrm{J}(\mu)$, et soit j' le plus petit élément de $\mathrm{J}(\mu)$ strictement supérieur à j. Le morphisme $p_j f'$ se restreint en un morphisme $f_j : \mathrm{X}'_{j'} \to \mathrm{G}(j, \mathrm{L}^{(j')})$ et $\mathrm{X}'_j = f_j^{-1}\big(\mathrm{G}(j, \mathrm{L}^{(j)})\big)$. Le th. 6.2 montre que X'_j est irréductible sous les hypothèses suivantes : d'une part $\dim(\mathrm{L}^{(j)}) > j$, ce qui équivaut à $\mu_j < n - d$, d'autre part $f'(\mathrm{X}')$ rencontre $p_j^{-1}\big(\mathrm{G}(j, \mathrm{M}^{(j)})\big)$, où $\mathrm{M}^{(j)}$ est un sous-espace linéaire de $\mathrm{L}^{(j')}$ général de dimension $\dim(\mathrm{L}^{(j)}) - 1$. Cette dernière condition équivaut à

$$f(\mathrm{X}) \cap p_d\Big(p_j^{-1}\big(\mathrm{G}(j, \mathrm{M}^{(j)}) \cap \bigcap_{k \in \mathrm{J}(\mu),\, k > j} p_k^{-1}\big(\mathrm{G}(k, \mathrm{L}^{(k)})\big) \Big) \neq \varnothing ,$$

soit encore, d'après la discussion précédente, à l'hypothèse $[\overline{f(\mathrm{X})}] \cdot \sigma_{\mu^{(j)}} \neq 0$.

Lorsque $\mu_j = n - d$, on considère l'application $f_{j'} : \mathrm{X}'_{j'} \to \mathrm{G}(j', \mathrm{L}^{(j')})$; la variété X'_j n'est autre que l'image inverse de $\Omega_{\mathrm{L}^{(j)}} = \{u \in \mathrm{G}(j', \mathrm{L}^{(j')}) \mid \Lambda_u \supset \mathrm{L}^{(j)}\}$ par $f_{j'}$. La version duale du th. 6.2 entraîne que pour que X'_j soit irréductible, il suffit que $\dim(\mathrm{L}^{(j)}) < j'$ et que $f_{j'}^{-1}(\Omega_{\mathrm{M}^{(j)}})$ soit non vide pour tout sous-espace linéaire $\mathrm{M}^{(j)}$ de $\mathrm{L}^{(j')}$ de dimension $\dim(\mathrm{L}^{(j)}) + 1$. De nouveau, la discussion précédente montre que cette condition est équivalente à l'hypothèse $[\overline{f(\mathrm{X})}] \cdot \sigma_{\mu^{(j)}} \neq 0$.

La démonstration du pas de récurrence lorsque j est le plus grand élément de $\mathrm{J}(\mu)$ est identique : il suffit de remplacer $\mathrm{X}'_{j'}$ par X' et $\mathrm{L}^{(j')}$ par $\mathbf{P}^n$, puis $f_{(j')}$ par p_d et j' par d. Ceci termine la démonstration de a).

Lorsque $k = \mathbf{C}$ et que X est localement irréductible, ce qui précède montre aussi que $\pi_1\big(f^{-1}(\Sigma_{\mathbf{L}})\big) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathrm{X})$ (toujours pour $\mathbf{L}$ général). On en déduit c) comme dans [FL1] rem. 2.2 et cor. 3.3.

Montrons b). Soit F' la variété de drapeaux contenant le drapeau $\mathbf{L}$; posons

$$\mathrm{Z} = \{ \ (x, \mathbf{L}') \in \mathrm{X} \times \mathrm{F}' \mid \dim(\Lambda_{f(x)} \cap \mathrm{L}'^{(i)}) \geq i \ \text{ pour tout } \ i = 0, \dots, d \ \} \ .$$

La première projection réalise Z comme un fibré au-dessus de X, dont les fibres sont des variétés de Schubert (irréductibles par [F], ex. 14.7.16) de même type dans la variété de drapeaux F', de sorte que Z est irréductible. Supposons X complète; la projection $q : \mathrm{Z} \to \mathrm{F}'$ est propre, donc admet une factorisation de Stein $\mathrm{Z} \xrightarrow{q'} \mathrm{F}'' \xrightarrow{\rho} \mathrm{F}'$, où ρ est fini et où les fibres de q' sont connexes. Par a), ρ est birationnel surjectif; comme F' est normal, ρ est bijectif, de sorte que les fibres de q sont connexes, ce qui montre b). ∎

Nous terminerons avec un énoncé portant sur les images inverses d'intersections de variétés de Schubert spéciales. On obtient dans ce cas particulier un résultat en général meilleur qu'en appliquant le théorème 7.1, ou le théorème 8.1 de façon répétée.

THÉORÈME 8.4.– *Soient* X *une variété irréductible,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}(d, \mathbf{P}^n)$ *un morphisme et* $\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_r$ *des sous-espaces linéaires de* $\mathbf{P}^n$. *On note* $\ell_i = \operatorname{codim} \Sigma_{\mathrm{L}_i}$ *et on suppose que* $\ell_0 \geq \ell_1 \geq \cdots \geq \ell_r$. *Soit* s *le cardinal de l'ensemble* $\{i \mid \ell_i = n - d\}$. *On suppose que* $[\overline{f(\mathrm{X})}] \cdot \sigma_{n-d}^s \cdot \sigma_{\ell_s+1} \cdot \sigma_{\ell_{s+1}} \cdots \sigma_{\ell_r} \neq 0$ *si* $s \leq r$ *et que* $[\overline{f(\mathrm{X})}] \cdot \sigma_{n-d}^{s+1} \neq 0$ *si* $s > 0$.

a) *Si* $\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_r$ *sont généraux,* $f^{-1}(\Sigma_{\mathrm{L}_0} \cap \cdots \cap \Sigma_{\mathrm{L}_r})$ *est irréductible ;*

b) *si* X *est complète,* $f^{-1}(\Sigma_{\mathrm{L}_0} \cap \cdots \cap \Sigma_{\mathrm{L}_r})$ *est connexe ;*

c) $(k = \mathbf{C})$ *si* X *est localement irréductible et complète,* $\pi_1\big(f^{-1}(\Sigma_{\mathrm{L}_0} \cap \cdots \cap \Sigma_{\mathrm{L}_r})\big) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathrm{X})$.

Remarques 8.5.– 1) On peut montrer que l'hypothèse du théorème est équivalente à la propriété suivante : il existe une partition λ avec $[\overline{f(\mathrm{X})}]_\lambda \neq 0$ telle que, pour tout $i = 0, \dots, r$, on ait $\ell_0 + \cdots + \ell_i \leq \bar\lambda_0 + \cdots + \bar\lambda_i$, avec inégalité stricte pour $i \geq s$. Lorsque $s > 0$, il faut ajouter à cela la condition qu'il existe une partition λ' avec $\lambda'_{d-s} = 0$ et $[\overline{f(\mathrm{X})}]_{\lambda'} \neq 0$.

2) Posons $c = \operatorname{codim} f(\mathrm{X})$ et supposons $c \leq n - d$; si $[\overline{f(\mathrm{X})}]_{(c)} \neq 0$, l'hypothèse du théorème est satisfaite dès que $\dim f(\mathrm{X}) > \sum_{i=0}^r \ell_i$ (lemme 4.2); lorsque $s > 0$, il faut aussi supposer $\dim f(\mathrm{X}) \geq (s+1)(n-d)$. On généralise ainsi le résultat de [HS], sauf dans le cas où $s > 0$ et $\sum_{i=s}^r \ell_i < n - d$. On notera par ailleurs que la démonstration de *loc.cit.* de l'irréductibilité d'une intersection de variétés de Schubert spéciales générales n'est valable qu'en caractéristique nulle.

Démonstration du théorème. *Supposons d'abord* $s = 0$; définissons

$$\mathrm{Z} = \{ \ (x, v_0, \dots, v_r) \in \mathrm{X} \times (\mathbf{P}^n)^{r+1} \mid v_i \in \Lambda_{f(x)} \ , \ i = 0, \dots, r \ \}$$

et notons $p : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ et $q : \mathrm{Z} \to (\mathbf{P}^n)^{r+1}$ les deux projections. Comme p est un fibré en produits de grassmanniennes, Z est irréductible; dans le cadre topologique, on a aussi $\pi_1(\mathrm{Z}) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathrm{X})$. On a

$$f^{-1}(\Sigma_{\mathrm{L}_0} \cap \cdots \cap \Sigma_{\mathrm{L}_r}) = p\big(q^{-1}(\mathrm{L}_0 \times \cdots \times \mathrm{L}_r)\big) \ .$$

Soit I une partie de $\{0,\ldots,r\}$ de cardinal $s+1\geq 1$; minorons la dimension de $p_{\mathrm{I}}q(\mathrm{Z})$. L'hypothèse faite entraîne

$$f^{-1}(\Sigma_{\mathrm{M}_0}\cap\cdots\cap\Sigma_{\mathrm{M}_s})\neq\varnothing$$

pour tous sous-espaces linéaires $\mathrm{M}_0,\ldots,\mathrm{M}_s$ de $\mathbf{P}^n$ tels que $\operatorname{codim}(\mathrm{M}_i)=\operatorname{codim}(\mathrm{L}_i)$ pour $i>0$ et $\operatorname{codim}(\mathrm{M}_0)=\operatorname{codim}(\mathrm{L}_0)+1$. On a donc aussi $q^{-1}(\mathrm{M}_0\cap\cdots\cap\mathrm{M}_s)\neq\varnothing$ et la prop. 3.1 entraîne

$$\dim p_{\{0,\ldots,s\}}q(\mathrm{Z})\geq\sum_{i=0}^{s}\operatorname{codim}(\mathrm{M}_i)\ .$$

Puisque $q(\mathrm{Z})$ est invariant par permutation des facteurs, on obtient

$$\dim p_{\mathrm{I}}q(\mathrm{Z})=\dim p_{\{0,\ldots,s\}}q(\mathrm{Z})\geq\sum_{i=0}^{s}\operatorname{codim}(\mathrm{M}_i)=1+\sum_{i=0}^{s}\ell_i>\sum_{i\in\mathrm{I}}\ell_i\ .$$

Le th. 1.3 et le cor. 2.3 permettent de conclure dans ce cas.

Supposons maintenant $s>0$. Pour $i=0,\ldots,s-1$, l'espace L_i est réduit à un point ; soit L l'espace linéaire engendré par $\mathrm{L}_0,\ldots,\mathrm{L}_{s-1}$. Posons

$$\Sigma=\Sigma_{\mathrm{L}_0}\cap\cdots\cap\Sigma_{\mathrm{L}_{s-1}}=\{\ u\in\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)\mid\Lambda_u\supset\mathrm{L}\ \}\ .$$

Supposons les L_i généraux ; comme $[\overline{f(\mathrm{X})}]\cdot\sigma_{n-d}^{s+1}\neq 0$, le th. 8.1 (qui n'est dans ce cas que la version duale du th. 6.2) entraîne que $\mathrm{X}'=f^{-1}(\Sigma)$ est irréductible. Si $\mathrm{L}_i\cap\mathrm{L}\neq\varnothing$, on a $\Sigma_{\mathrm{L}}\subset\Sigma_{\mathrm{L}_i}$, de sorte que l'on peut supposer L_i disjoint de L pour $i=s,\ldots,r$. Soit $\mathbf{P}^{n-e}$ un sous-espace linéaire de $\mathbf{P}^n$ contenant $\mathrm{L}_s,\ldots,\mathrm{L}_r$ et disjoint de L . Il existe un morphisme $f':\mathrm{X}'\to\mathrm{G}(d-e,\mathbf{P}^{n-e})$ tel que $\Lambda_{f'(x')}=\Lambda_{f(x)}\cap\mathbf{P}^{n-e}$, auquel il suffit d'appliquer le cas déjà traité pour montrer a). On en déduit b) et c) comme d'habitude. ■

9. Conclusion

Soient X et Y des variétés irréductibles complètes, et $f:\mathrm{X}\to\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ et $g:\mathrm{Y}\to\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ des morphismes. Sous quelles hypothèses sur $f(\mathrm{X})$ et $g(\mathrm{Y})$ peut-on assurer que $\mathrm{X}\times_{\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)}\mathrm{Y}$ est connexe ? L'exemple de Hansen (5.1) montre que même lorsque $f(\mathrm{X})$ est encombrante, la condition $\dim f(\mathrm{X})+\dim g(\mathrm{Y})>\dim\mathrm{G}(d,\mathbf{P}^n)$ ne suffit pas. Qu'en est-il lorsque $f(\mathrm{X})$ et $g(\mathrm{Y})$ sont toutes deux encombrantes ? En utilisant des idées de Mumford, on montre dans [D1] que la réponse est affirmative lorsque f est surjective, ou que $f(\mathrm{X})$ est un diviseur.

Références

[D1] Debarre, O., *Sur un théorème de connexité de Mumford pour les espaces homogènes*, Manuscripta Math. (1996), à paraître.

[D2] Debarre, O., *Fulton-Hansen and Barth-Lefschetz Theorems for Subvarieties of Abelian Varieties*, J. für die reine und andgewandte Mathematik **467** (1995), 187–197.

[De] Deligne, P., *Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien*, Séminaire Bourbaki, Exp. n°543, 1979/80, Springer Lecture Notes 842, 1981, 1–10.

[F] Fulton, W., Intersection Theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **2**, Springer Verlag, Berlin, 1984.

[FH] Fulton, W., Hansen, J., *A connectedness theorem for projective varieties, with applications to intersections and singularities of mappings*, Ann. of Math. **110** (1979), 159–166.

[FL1] Fulton, W., Lazarsfeld, R., *Connectivity and its Applications in Algebraic Geometry*, in Algebraic Geometry, Proceedings of the Midwest Algebraic Geometry Conference, Chicago 1980, Springer Lecture Notes 862, 1981, 26–92.

[FL2] Fulton, W., Lazarsfeld, R., *Positive polynomials for ample vector bundles*, Ann. of Math. **118** (1983), 35–60.

[FMSS] Fulton, W., Mac Pherson, R., Sottile, F., Sturmfels, B., *Intersection theory on spherical varieties*, J. Alg. Geom. **4** (1995), 181–193.

[GH] Griffiths, P., Harris, J., Principles of Algebraic Geometry, Wiley, New-York, 1978.

[Gr1] Grothendieck, *Eléments de Géométrie Algébrique IV, 2*, Publ. Math. I.H.E.S. 24, 1965.

[Gr2] Grothendieck, *Eléments de Géométrie Algébrique IV, 3*, Publ. Math. I.H.E.S. 28, 1966.

[H] Hansen, J., *A connectedness theorem for Ωagmanifolds and Grassmannians*, Am. J. Math. **105** (1983), 633–639.

[Ha] Harris, J., Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics **133**, Springer Verlag, New-York, 1992.

[HS] Hernandez, R., Sols, I., *Connectedness of intersections of special Schubert varieties*, Manusc. Math. **83** (1994), 215–222.

[J] Jouanolou, J.-P., *Théorèmes de Bertini et applications*, Prog. Math. **42**, Birkhäuser, 1983.

[K] Kollár, J., Rational Curves on Algebraic Varieties, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **32**, Springer Verlag, Berlin, 1996.

[Ko] Kleiman, S., *The transversality of a general translate*, Comp. Math. **28** (1978), 287–297.

[S] Sommese, A., *Complex Subspaces of Homogeneous Complex Manifolds II—Homotopy Results*, Nagoya J. Math. 86 (1982), 101–129.

Olivier Debarre
IRMA – Mathématique – CNRS URA 001
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex – France
e-mail : debarre@math.u-strasbg.fr