SUR LA VARIÉTÉ DES ESPACES LINÉAIRES CONTENUS DANS UNE INTERSECTION COMPLÈTE

Olivier Debarre * [1], **Laurent Manivel**[2]

[1] IRMA – Mathématique – CNRS, Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cédex, France (e-mail : debarre@math.u-strasbg.fr)

[2] Institut Fourier, Université de Grenoble 1, B.P. 74, 38402 Saint Martin d'Hères, France
(e-mail : Laurent.Manivel@ujf-grenoble.fr)

Mathematics Subject Classification : 14M10, 14G05, 14J40, 14J45, 14J70, 14C25

Abstract – Let X be a subvariety of $\mathbf{P}^n$ defined by equations of degrees $d_1,\dots,d_s$, over an algebraically closed field k of any characteristic. We study the scheme $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ which parametrizes linear subspaces of dimension r contained in X. Assume for simplicity that X is generic and that n is large enough. We prove that $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ is connected and smooth of the expected dimension (this was previously known in characteristic 0 or for $r=1$). When $k=\mathbf{C}$, using Bott's theorem, we prove a vanishing theorem for certain bundles on the Grassmannian and use it to determine the cohomology groups of $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ in degree $< \dim \mathrm{X} - 2r$, and to prove that $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ is projectively normal in the Grassmannian. Finally, we prove that the Chow group $\mathrm{A}_1(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}))\otimes\mathbf{Q}$ is of rank 1, and that $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ is unirational. All bounds on n are effective.

Soient k un corps algébriquement clos et X un sous-schéma d'un espace projectif $\mathbf{P}^n_k$; on note $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ le sous-schéma de la grassmannienne $\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n_k)$ qui paramètre les espaces linéaires de dimension r contenus dans X. Ces schémas ont une longue histoire ([F], [vW], [AK], [BVV], [B1], [PS], [K], [ELV], [BV]) mais il ne semble pas exister dans la littérature d'énoncé général sur leurs propriétés, même les plus simples comme la connexité, valable en toute caractéristique. Un des buts de cet article est de rassembler des faits généraux sur ces schémas.

Après un paragraphe de notations, on obtient dans le § 2, en se basant sur les idées de [K], notre premier résultat principal : pour une intersection complète générale X (autre qu'une quadrique), le schéma $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *est non vide et lisse de la dimension attendue* δ *lorsque celle-ci est positive, et connexe lorsque* $\delta > 0$. Dans le § 3, on applique des résultats de [D1] et [S] pour calculer certains groupes d'homotopie de $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$. Par ailleurs, le schéma $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est le lieu des zéros d'une section d'un fibré vectoriel sur la grassmannienne $\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n)$; lorsqu'il a la dimension attendue δ, son idéal admet une résolution par un complexe de Koszul. Un théorème d'annulation pour certains fibrés vectoriels sur $\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n)$ (prop. 3.8) nous permet de montrer notre second résultat principal, à savoir *un théorème de type Lefschetz, qui permet*

* Financé en partie par le Projet Européen HCM « Algebraic Geometry in Europe » (AGE), Contrat CHRXCT-940557.

d'obtenir, pour $k = \mathbf{C}$, *les nombres de Hodge* $h^{p,q}(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}))$ *pour* $p+q$ *assez petit* (inférieur à $\dim \mathrm{X} - 2r - 1$ pour n grand). Après avoir rédigé cette partie, nous nous sommes rendus compte que Borcea avait déjà utilisé le théorème d'annulation de Bott dans ce cadre (il obtient entre autres les résultats du § 2 en caractéristique nulle).

Les mêmes méthodes permettent d'étudier dans le § 4 la restriction $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n),\mathcal{O}(l)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}),\mathcal{O}(l))$; on montre que pour n assez grand, $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est projectivement normal dans $\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n)$, et que toute équation de $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est de degré au moins égal à une équation de X dans $\mathbf{P}^n$. On donne aussi une formule explicite pour le calcul du degré des schémas $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$: c'est le coefficient d'un monôme particulier dans un polynôme explicite en $r+1$ variables. On donne quelques exemples de ce calcul pour des hypersurfaces de bas degré.

On s'intéresse ensuite aux sous-schémas de $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ qui paramètrent les r-plans contenant un r_0-plan fixé ; le théorème principal du § 5 généralise les résultats analogues du § 2 dans ce cadre. On en déduit que $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est séparablement uniréglé en droites pour n assez grand, ce qui nous permet dans le § 6 d'adapter des idées de [K] pour montrer, toujours pour n assez grand, que le groupe de Chow rationnel des 1-cycles sur un schéma $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est de rang 1. Il est tentant de généraliser une conjecture de Srinivas et Paranjape ([P]) de la façon suivante : pour n assez grand, les groupes de Chow rationnels de basse dimension de $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ devraient être ceux de la grassmannienne ambiante $\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n)$.

Dans le § 7, on démontre, comme conjecturé dans [BVV], que *le schéma* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *est unirationnel pour* n *assez grand et* X *générique*. On se ramène pour cela à un résultat de Predonzan ([Pr]), précisé dans l'article [PS], qui fournit un critère explicite pour l'unirationalité d'une intersection complète dans un espace projectif. Les bornes obtenues sont explicites, mais très grandes ; par exemple, on montre que la variété des droites contenues dans une hypersurface cubique de $\mathbf{P}^n$ est unirationnelle pour $n \geq 433$ (alors que c'est déjà une variété de Fano pour $n \geq 6$). Lorsque X est une hypersurface, une version un peu plus générale des résultats de ce § est démontrée dans [Ch] ; la démonstration est basée sur des résultats de Harris, Mazur et Pandharipande.

Les résultats de cet article ont paru pour la première fois en novembre 1996 sur le serveur alg-geom, sous le titre « Schémas de Fano ».

1. Notations

Soient k un corps algébriquement clos et V un k-espace vectoriel de dimension $n+1$. Pour toute suite finie $\mathbf{d} = (d_1,\ldots,d_s)$ d'entiers positifs, et tout entier positif r, on note $|\mathbf{d}| = \sum_{i=1}^s d_i$, puis $\mathbf{d}+r = (d_1+r,\ldots,d_s+r)$ et $\binom{\mathbf{d}}{r} = \sum_{i=1}^s \binom{d_i}{r}$. On pose $\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\, \mathrm{V}^* = \bigoplus_{i=1}^s \mathrm{Sym}^{d_i}\, \mathrm{V}^*$, espace vectoriel que l'on notera aussi $\Gamma_{\mathbf{P}\mathrm{V}}(\mathbf{d})$. Enfin, si $\mathbf{f} = (f_1 \ldots, f_s)$ est un élément non nul de $\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\, \mathrm{V}^*$, on note $\mathrm{X}_{\mathbf{f}}$ le sous-schéma de $\mathbf{P}\mathrm{V}$ d'équations $f_1 = \cdots = f_s = 0$; on dira d'un tel schéma qu'il est *défini par des équations de degré* $\mathbf{d}$.

On pose ensuite

$$\delta(n,\mathbf{d},r) = (r+1)(n-r) - \binom{\mathbf{d}+r}{r}$$

et $\delta_-(n,\mathbf{d},r)=\min\{\delta(n,\mathbf{d},r),n-2r-s\}$, que l'on écrira simplement δ et δ_- lorsque aucune confusion ne sera à craindre.

2. Dimension, lissité et connexité

On montre dans ce numéro que les schémas $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ associés à un sous-schéma X de $\mathbf{P}^n_k$ défini par des équations de degré $\mathbf{d}=(d_1,\dots,d_s)$ sont lisses de la dimension attendue pour X générale, et connexes lorsque cette dimension est strictement positive. Divers cas particuliers du théorème suivant étaient déjà connus : citons par exemple [BVV], qui traite le cas $k=\mathbf{C}$ et $r=s=1$; [P], [Mu] et [PS], qui démontrent b) ; [B1], qui démontre le théorème lorsque k est de caractéristique nulle; et [K], qui traite le cas $r=s=1$ (th. 4.3, p. 266), et dont nous empruntons les idées. Lorsque $k=\mathbf{C}$, une démonstration complètement différente découle de celle du théorème 3.4 (*cf.* rem. 3.6.1).

Pour appliquer le théorème, il est utile de noter que *lorsque* $\mathbf{d}\neq(2)$, *l'entier* $\delta(n,\mathbf{d},r)$ *est positif (resp. strictement positif) si et seulement si* $\delta_-(n,\mathbf{d},r)$ *l'est.*

Théorème 2.1.– *Soient* X *un sous-schéma de* $\mathbf{P}^n_k$ *défini par des équations de degré* $\mathbf{d}$, *et* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *le schéma des* r*-plans contenus dans* X.

a) *Lorsque* $\delta_-(n,\mathbf{d},r)<0$, *le schéma* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *est vide pour* X *générale.*

b) *Lorsque* $\delta_-(n,\mathbf{d},r)\geq 0$, *le schéma* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *est non vide ; il est lisse de dimension* $\delta(n,\mathbf{d},r)$ *pour* X *générale.*

c) *Lorsque* $\delta_-(n,\mathbf{d},r)>0$, *le schéma* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *est connexe.*

Considérons la variété d'incidence

$$\mathrm{I}_r=\{(\mathbf{f},[\Lambda])\in\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{V}^*\times\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n)\mid\Lambda\subset\mathrm{X}_{\mathbf{f}}\}\ ,$$

et les projections $p_r:\mathrm{I}_r\to\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{V}^*$ (dont la fibre au-dessus de $\mathbf{f}$ s'identifie à $\mathrm{F}_r(\mathrm{X}_{\mathbf{f}})$) et $q:\mathrm{I}_r\to\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n)$. Etant donné un r-plan $\Lambda=\mathbf{P}\mathrm{W}$, la fibre $q^{-1}([\Lambda])$ est le noyau du morphisme surjectif $\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{V}^*\to\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{W}^*$. Elle est donc de codimension $\binom{\mathbf{d}+r}{r}$ dans $\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{V}^*$, de sorte que I_r est irréductible lisse de codimension $\binom{\mathbf{d}+r}{r}$ dans $\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{V}^*\times\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n)$.

On note Z_r le fermé des points de I_r où p_r n'est pas lisse, et Δ_r l'image de Z_r par p_r (avec la convention $\Delta_{-1}=\varnothing$). Soit Λ un r-plan, d'équations $x_{r+1}=\cdots=x_n=0$ dans $\mathbf{P}\mathrm{V}$; pour tout entier $m\geq 0$, on note $\mathcal{B}_m$ la base $\{\mathbf{x}^{\mathrm{J}}\mid \mathrm{J}\subset\{0,\dots,r\}\ ,\ \mathrm{Card}(\mathrm{J})=m\}$ de l'espace vectoriel $\Gamma_\Lambda(m)$; on note aussi $\mathcal{B}_{\mathbf{d}}$ la base $\iota_1(\mathcal{B}_{d_1})\cup\cdots\cup\iota_s(\mathcal{B}_{d_s})$ de l'espace vectoriel $\Gamma_\Lambda(\mathbf{d})$ (où ι_i est l'injection canonique de $\Gamma_\Lambda(d_i)$ dans $\Gamma_\Lambda(\mathbf{d})$).

Lemme 2.2.– *Pour qu'un point* $(\mathbf{f},[\Lambda])$ *de* I_r *soit dans* Z_r, *il faut et il suffit que le morphisme* $\alpha:\Gamma_\Lambda(1)^{n-r}\to\Gamma_\Lambda(\mathbf{d})$ *défini par*

$$\alpha(h_{r+1},\dots,h_n)=\Big(\sum_{j=r+1}^n h_j\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\Big)_{|\Lambda},\dots,\sum_{j=r+1}^n h_j\Big(\frac{\partial f_s}{\partial x_j}\Big)_{|\Lambda}\Big)$$

ne soit pas surjectif.

Cela résulte d'un calcul explicite fait dans [BVV] dans le cas $r=s=1$. ∎

Lorsque X *est lisse de dimension* $n-s$ *le long de* Λ, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{N}_{\Lambda/\mathrm{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_\Lambda(1)^{n-r} \xrightarrow{u} \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}_\Lambda(d_i) \longrightarrow 0 ,$$

et le morphisme α n'est autre que $\mathrm{H}^0(u)$ (*cf.* [BVV], prop. 3 et [K], p. 267 dans le cas $r=s=1$). La condition du lemme est donc équivalente dans ce cas à l'annulation de $\mathrm{H}^1(\Lambda, \mathrm{N}_{\Lambda/\mathrm{X}})$.

Soit $\mu : \Gamma_\Lambda(1) \times \Gamma_\Lambda(\mathbf{d}-1) \to \Gamma_\Lambda(\mathbf{d})$ le morphisme de multiplication, défini par $\mu(h, g_1, \dots, g_s) = (hg_1, \dots, hg_s)$. Si H est un hyperplan de $\Gamma_\Lambda(\mathbf{d})$, on note $\mu^{-1}(\mathrm{H})$ l'ensemble $\{\, g \in \Gamma_\Lambda(\mathbf{d}-1) \mid \mu(\Gamma_\Lambda(1) \times \{g\}) \subset \mathrm{H} \,\}$.

On peut réénoncer le lemme 2.2 de la façon suivante : soit $\mathcal{Z}$ le sous-ensemble de $q^{-1}([\Lambda]) \times \mathbf{P}\Gamma_\Lambda(\mathbf{d})^*$ formé des couples $(\mathbf{f}, [\ell])$ tels que

$$\Big(\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\Big)_{|\Lambda}, \dots, \Big(\frac{\partial f_s}{\partial x_j}\Big)_{|\Lambda} \Big)$$

soit dans $\mu^{-1}(\mathrm{Ker}(\ell))$ pour tout $j = r+1, \dots, n$; alors $\mathrm{Z}_r \cap q^{-1}([\Lambda])$ s'identifie à la première projection de $\mathcal{Z}$. Pour tout entier h, notons $\mathcal{L}_h$ l'ensemble des formes linéaires ℓ sur $\Gamma_\Lambda(\mathbf{d})$ vérifiant $\mathrm{codim}\, \mu^{-1}(\mathrm{Ker}(\ell)) = h$, et $\mathcal{Z}_h$ l'ensemble des éléments $(\mathbf{f}, [\ell])$ de $\mathcal{Z}$ avec $\ell \in \mathcal{L}_h$. On peut écrire $f_i = \sum_{j=r+1}^n x_j f_{ij}$, avec $f_{ij}|_\Lambda = \big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\big)_{|\Lambda}$, de sorte que

$$\mathrm{codim}_{q^{-1}([\Lambda])}\, pr_1(\mathcal{Z}_h) \geq h(n-r) - \dim \mathbf{P}\mathcal{L}_h \tag{2.3}$$

et

$$\mathrm{codim}_{\mathrm{I}_r} \mathrm{Z}_r = \mathrm{codim}_{q^{-1}([\Lambda])}\, pr_1(\mathcal{Z}) \geq \min_{1 \leq h \leq r+1} [h(n-r) - \dim \mathbf{P}\mathcal{L}_h] . \tag{2.4}$$

(2.5) Soit ℓ une forme linéaire sur $\Gamma_\Lambda(\mathbf{d})$. Soit M la matrice à coefficients dans $\Gamma_\Lambda(\mathbf{d})$ de la forme bilinéaire μ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbf{d}-1}$. Pour qu'un élément $g = \sum_{b \in \mathcal{B}} g_b b$ de $\Gamma_\Lambda(\mathbf{d}-1)$ soit dans $\mu^{-1}(\mathrm{Ker}(\ell))$, il faut et il suffit que $\sum_b g_b \ell(x_j b)$ soit nul pour tout $j = 0, \dots, r$, de sorte que *la codimension de* $\mu^{-1}(\mathrm{Ker}(\ell))$ *dans* $\Gamma_\Lambda(\mathbf{d}-1)$ *est le rang de la matrice* $\ell(\mathrm{M})$.

Lemme 2.6.– *Soient* $(\mathbf{f}, [\Lambda])$ *un élément de* $\mathrm{Z}_r - p_r^{-1}(\Delta_{r-1})$ *et* ℓ *une forme linéaire non nulle sur* $\Gamma_\Lambda(\mathbf{d})$, *qui s'annule sur l'image de* α. *Alors* $\mu^{-1}(\mathrm{Ker}(\ell))$ *est de codimension* $r+1$ *dans* $\Gamma_\Lambda(\mathbf{d}-1)$.

Procédons par l'absurde en supposant que la matrice $\ell(\mathrm{M})$ définie ci-dessus ne soit pas de rang maximal. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer $\ell(x_r b) = 0$ pour tout b dans $\mathcal{B}$, de sorte que si Λ' est l'hyperplan de Λ défini par $x_r = 0$, la forme linéaire ℓ provient d'une forme linéaire ℓ' sur $\Gamma_{\Lambda'}(\mathbf{d})$. Si $\alpha' : \Gamma_{\Lambda'}(1)^{n-r+1} \to \Gamma_{\Lambda'}(\mathbf{d})$ est le morphisme associé au point $(\mathbf{f}, [\Lambda'])$ de I_{r-1} défini dans le lemme 2.2, ℓ' s'annule sur $\alpha'(\{0\} \times \Gamma_{\Lambda'}(1)^{n-r})$. Comme la restriction de $\frac{\partial f_i}{\partial x_r}$ à Λ' est nulle pour tout i, la forme linéaire ℓ' s'annule sur toute l'image de α', ce qui contredit l'hypothèse $\mathbf{f} \notin \Delta_{r-1}$. ∎

En d'autres termes, $q^{-1}([\Lambda]) \cap \big(\mathrm{Z}_r - p_r^{-1}(\Delta_{r-1})\big)$ est contenu dans $pr_1(\mathcal{Z}_{r+1})$, et (2.3) entraîne

$$\dim(\overline{\mathrm{Z}_r - p_r^{-1}(\Delta_{r-1})}) = \dim \mathrm{I}_r - \operatorname{codim}_{\mathrm{I}_r}(\overline{\mathrm{Z}_r - p_r^{-1}(\Delta_{r-1})})$$
$$\leq \dim \operatorname{Sym}^{\mathbf{d}} \mathrm{V}^* + \dim \mathrm{G}(r, \mathbf{P}^n) - \binom{\mathbf{d}+r}{r} - (r+1)(n-r) + \dim \mathbf{P}\Gamma_\Lambda(\mathbf{d})^* < \dim \operatorname{Sym}^{\mathbf{d}} \mathrm{V}^* \ .$$

(2.7) Il en résulte $\Delta_r - \Delta_{r-1} \neq \operatorname{Sym}^{\mathbf{d}} \mathrm{V}^*$, d'où $\Delta_r \neq \operatorname{Sym}^{\mathbf{d}} \mathrm{V}^*$ par récurrence sur r.

On remarquera que nous avons en fait démontré que Δ_r a au plus une composante irréductible de plus que Δ_{r-1}, c'est-à-dire au plus $r+1$ composantes irréductibles.

Lemme 2.8.– *Pour $1 \leq h \leq r+1$, la dimension de $\mathcal{L}_h$ est au plus $h(r-h+1) + \binom{\mathbf{d}+h-1}{h-1}$.*

On garde les notations de (2.5). Supposons les h premières lignes de la matrice $\ell(\mathrm{M})$ linéairement indépendantes; on peut écrire $\ell(x_j b) = \sum_{i=0}^{h-1} a_{ij}\ell(x_i b)$, pour tous $j = h, \ldots, r$ et $b \in \mathcal{B}$, de sorte que les $\ell(b_i)$, pour $b_i = \mathbf{x}^{\mathrm{I}}$ dans $\mathcal{B}_{d_i}$, peuvent s'exprimer en fonction de ceux pour lesquels $\mathrm{I} \subset \{0, \ldots, h-1\}$, et des $h(r-h+1)$ coefficients a_{ij}. ■

L'inégalité (2.4) donne

$$\operatorname{codim}_{\mathrm{I}_r} \mathrm{Z}_r \geq \min_{1 \leq h \leq r+1} \Big[h(n-2r+h-1) - \binom{\mathbf{d}+h-1}{h-1} \Big] + 1 \ .$$

(2.9) Lorsque $\mathbf{d} \neq (2)$, on vérifie que l'expression entre crochets est une fonction *concave* φ de h sur $[1, +\infty[$; lorsque $\mathbf{d} = (2)$ et $\delta_- \geq 0$, c'est une fonction *croissante*. On a dans chacun de ces cas

$$\operatorname{codim}_{\mathrm{I}_r} \mathrm{Z}_r \geq \min\{\varphi(1), \varphi(r+1)\} + 1 = \delta_- + 1 \ .$$

Supposons $\delta_- < 0$. Si $\mathbf{d} = (2)$, cela signifie $2r \geq n$; si une quadrique X contient un r-plan Λ, écrivons en gardant les mêmes notations $f = x_{r+1}\ell_{r+1} + \cdots + x_n\ell_n$, où les ℓ_i sont des formes linéaires. Comme $n - r \leq r$, celles-ci ont un zéro commun sur Λ, qui est un point singulier de X, ce qui ne peut se produire pour X générale. Lorsque $\mathbf{d} \neq (2)$, on a $\delta < 0$, d'où $\dim \mathrm{I}_r < \dim \operatorname{Sym}^{\mathbf{d}} \mathrm{V}^*$, et p_r n'est pas surjective; ceci montre a) dans tous les cas.

Supposons $\delta_- \geq 0$; il existe d'après (2.9) un point de I_r en lequel p_r est lisse. Cela entraîne que p_r est surjective, et que $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est de dimension δ pour X générale. Par (2.7), p_r est lisse au-dessus d'un ouvert dense de $\operatorname{Sym}^{\mathbf{d}} \mathrm{V}^*$, ce qui montre b).

Supposons maintenant $\delta_- > 0$, et considérons comme dans [BVV] la factorisation de Stein $p_r : \mathrm{I}_r \longrightarrow \mathrm{S} \xrightarrow{\pi} \operatorname{Sym}^{\mathbf{d}} \mathrm{V}^*$ du morphisme propre p_r. Si le morphisme π est ramifié, le théorème de pureté entraîne que Z_r contient l'image inverse d'un diviseur de S, ce qui contredit l'estimation de (2.9). Il s'ensuit que π est étale, donc que c'est un isomorphisme puisque $\operatorname{Sym}^{\mathbf{d}} \mathrm{V}^*$ est simplement connexe. La variété $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est donc connexe pour toute X, ce qui montre c). ■

Remarques 2.10. 1) Soit S le sous-fibré tautologique sur $\mathrm{G}(r, \mathbf{P}\mathrm{V})$. Tout élément $\mathbf{f}$ de $\operatorname{Sym}^{\mathbf{d}} \mathrm{V}^*$ induit une section du fibré $\operatorname{Sym}^{\mathbf{d}} \mathrm{S}^*$, dont le lieu des zéros est le schéma $\mathrm{F}_r(\mathrm{X}_{\mathbf{f}})$. La partie b) du théorème montre que lorsque $\delta_-(n,\mathbf{d},r)\geq 0$, la classe de Chern $c_{\max}(\operatorname{Sym}^{\mathbf{d}}\mathrm{S}^*)$ n'est pas nulle. On verra dans le § 4 comment expliciter cette classe de Chern dans l'anneau de Chow de la grassmannienne. On remarque que lorsque $\mathbf{d}=(2)$ et que $\delta_-<0\leq\delta$, le rang de $\operatorname{Sym}^2\mathrm{S}^*$ est plus petit que la dimension de $\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n)$, mais sa classe de Chern d'ordre maximal $2^{r+1}\sigma_{r+1,r,\dots,1}$ est nulle (*cf.* [Fu], ex. 14.7.15).

2) Toute quadrique lisse X dans $\mathbf{P}^n$ est projectivement équivalente à la quadrique d'équation $x_0x_1+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=0$ si n est impair, à la quadrique d'équation $x_0x_1+x_2x_3+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}+x_n^2=0$ si n est pair. Le schéma $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est donc lisse connexe dès que $\delta_->0$, c'est-à-dire $n>2r+1$; on sait qu'il a deux composantes connexes si $n=2r+1$.

3. Groupes d'homotopie, groupes de cohomologie et groupe de Picard

Les résultats de [D1] et [S] permettent de calculer les groupes d'homotopie des schémas $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ pour n assez grand.

Proposition 3.1.– *Soit* X *un sous-schéma de* $\mathbf{P}^n_k$ *défini par des équations de degré* $\mathbf{d}$. *On suppose* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *irréductible de dimension* δ.

a) *Si* $n\geq\frac{2}{r+1}\binom{\mathbf{d}+r}{r}+r+1$, *le schéma* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *est algébriquement simplement connexe, topologiquement simplement connexe lorsque* $k=\mathbf{C}$.

b) *Lorsque* $k=\mathbf{C}$ *et que* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *est lisse, on a* $\pi_i\big(\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n),\mathrm{F}_r(\mathrm{X})\big)=0$ *pour* $n\geq 2\binom{\mathbf{d}+r}{r}+i-1$. *En particulier, si* $n\geq 2\binom{\mathbf{d}+r}{r}+2$, *le groupe de Picard de* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}$, *engendré par la classe de* $\mathcal{O}(1)$.

Le point b) est conséquence directe de [S]. Pour a), il suffit par [D1], cor. 7.4 de montrer que $[\mathrm{F}_r(\mathrm{X})]\cdot[\mathrm{F}_r(\mathrm{X})]\cdot[\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^{n-1})]$ est non nul dans $\mathrm{A}(\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n))$. Par la remarque 2.10, cette intersection est la classe de Chern de degré maximal de $\operatorname{Sym}^{\mathbf{d}}\mathrm{S}^*\oplus\operatorname{Sym}^{\mathbf{d}}\mathrm{S}^*\oplus\mathrm{S}^*$, et celle-ci est non nulle dès que $\delta(n-1,(\mathbf{d},\mathbf{d}),r)$ est positif, condition qui découle de l'hypothèse. ■

Remarques 3.2. 1) On rappelle que $\pi_i(\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n))\simeq\pi_{i-1}(\mathrm{U}(r+1))$ pour $i\leq 2(n-r)$ ([H], chap. 7) ; si l'on suppose aussi $i\leq 2(r+1)$, le théorème de périodicité de Bott implique donc $\pi_i(\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n))=\mathbf{Z}$ ou 0 selon que i est pair ou impair. En général, il peut cependant apparaître de la torsion (par exemple, $\pi_{11}(\mathrm{G}(3,\mathbf{P}^n))=\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_{120}$ si $n\geq 9$).

2) La remarque 2.10 montre que lorsque $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est de dimension δ, on a

$$\omega_{\mathrm{F}_r(\mathrm{X})}\simeq\omega_{\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n)}\otimes\bigwedge^{\max}\operatorname{Sym}^{\mathbf{d}}\mathrm{S}^*|_{\mathrm{F}_r(\mathrm{X})}\simeq\mathcal{O}_{\mathrm{F}_r(\mathrm{X})}\Big(\binom{\mathbf{d}+r}{r+1}-n-1\Big)\,.$$

En particulier, $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est une variété de Fano lorsque $n\geq\binom{\mathbf{d}+r}{r+1}$, donc simplement connexe lorsque $k=\mathbf{C}$ ([C1], [KMM1]). Cette borne est néanmoins moins bonne que celle de la prop. 3.1.a) dès que l'un des d_i est ≥ 3.

3) Les bornes de la proposition ne sont pas optimales, comme le montre l'exemple ci-dessous. Le théorème suivant laisse à penser que l'on devrait avoir $\pi_i(\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n),\mathrm{F}_r(\mathrm{X}))=0$ pour $i\leq\delta_-(n,\mathbf{d},r)$.

Exemple 3.3. Soit X une hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}^n_k$; par [BVV], prop. 5, $\mathrm{F}_1(\mathrm{X})$ est une variété *lisse connexe* de dimension $2n-6$. La proposition entraîne que $\mathrm{F}_1(\mathrm{X})$ est simplement connexe pour $n \geq 6$. Lorsque $k=\mathbf{C}$, cela reste vrai pour $n=5$ ([BD], prop. 3), mais pas pour $n=4$ puisque $b_1(\mathrm{F}_1(\mathrm{X}))=10$ ([AK], prop. 1.15).

Passons maintenant au résultat principal de ce numéro. On a vu en 2.10 que $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est le lieu des zéros d'une section d'un fibré vectoriel sur la grassmannienne; lorsqu'il a la codimension attendue, son idéal admet une résolution par un complexe de Koszul. Lorsque $k=\mathbf{C}$, on montre à l'aide du théorème de Borel-Weil-Bott ([Bo], [De]) et des résultats de [Ma1] et [Ma2] un théorème d'annulation (prop. 3.8) qui nous permettra de déterminer certains groupes de cohomologie des schémas $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$.

Théorème 3.4.– *Soit* X *un sous-schéma de* $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ *défini par des équations de degré* $\mathbf{d}$, *tel que* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *soit lisse de dimension* $\delta(n,\mathbf{d},r)$. *Le morphisme de restriction* $\mathrm{H}^i(\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n),\mathbf{Q}) \to \mathrm{H}^i(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}),\mathbf{Q})$ *est bijectif pour* $i<\delta_-(n,\mathbf{d},r)$.

En particulier, les nombres de Hodge $h^{p,q}(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}))$ et $h^{p,q}(\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n))$ sont égaux si $p+q<\delta_-$. Rappelons que ces derniers sont nuls pour $p\neq q$, et qu'ils sont égaux si $p=q$ au nombre de partitions de p inscrites dans un rectangle de côtés $r+1$ et $n-r$. On retrouve aussi un résultat de [BV] :

Corollaire 3.5.– *Si de plus* $\delta_-\geq 3$, *le groupe de Picard de* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *est de rang* 1.

Remarques 3.6. 1) La borne du théorème est souvent la meilleure possible : pour une hypersurface cubique lisse X dans $\mathbf{P}^5$, on a $\delta_-=2$ et $b_2\big(\mathrm{F}_1(\mathrm{X})\big)=23$ ([BD], prop. 3). Supposons $\mathbf{d}=(2,2)$ et $n=2g+1$; la variété $\mathrm{F}_{g-2}(\mathrm{X})$ est isomorphe à l'espace de modules des fibrés stables de rang 2 et de déterminant fixé de degré impair sur une courbe hyperelliptique C de genre g ([DR], th. 1); on a $\delta_-=3$ et $b_3\big(\mathrm{F}_{g-2}(\mathrm{X})\big)=2g$ ([D2], ex. 4.4.2), p. 126). La variété $\mathrm{F}_{g-1}(\mathrm{X})$ est isomorphe à la jacobienne de C ([DR], th. 2); on a $\delta_-=1$ et $b_1\big(\mathrm{F}_{g-1}(\mathrm{X})\big)=g$. Enfin, pour $\mathbf{d}=(2,2)$ et $n=6$, on a $\delta_-=2$ et $b_2\big(\mathrm{F}_1(\mathrm{X})\big)=8$ ([B2], th. 2.1).

2) Le théorème permet de retrouver, lorsque $k=\mathbf{C}$, les points b) et c) du théorème 2.1; c'est la méthode suivie dans [B1].

3) Il résulte du corollaire 5.5 et de [K], cor. 1.11, p. 189 et cor. 3.8, p. 202, que pour $n\geq\binom{\mathbf{d}+r}{r+1}+r+1$, les groupes $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}),\Omega^m_{\mathrm{F}_r(\mathrm{X})})$ et $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}),(\Omega^1_{\mathrm{F}_r(\mathrm{X})})^{\otimes m})$ sont nuls pour tout $m>0$. Lorsque k est de caractéristique nulle, l'annulation de ces groupes peut se déduire de la remarque 3.2.2) et du théorème 2.13 de [K], p. 254 (*cf.* [C2] et [KMM2]), sous l'hypothèse plus faible $n\geq\binom{\mathbf{d}+r}{r+1}$.

4) On montrera en (6.4) que pour $n\geq\binom{\mathbf{d}+r}{r+1}+r+1$ et $n\geq\binom{\mathbf{d}+r+1}{r+2}$, on a $\mathrm{H}^{1,q}(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}))=0$ pour tout $q>1$, un résultat qui n'est pas couvert par le théorème.

5) Lorsque $n\geq\binom{\mathbf{d}+r}{r+1}$, $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est une variété de Fano (remarque 3.2.2). Lorsque k est de caractéristique nulle, le théorème d'annulation de Kodaira entraîne que son groupe de Picard est sans torsion (*cf.* [K], (1.4.13), p. 242). Vue l'hypothèse sur n, et sauf dans le cas $\mathbf{d}=(2,2)$ et $n=2r+4$, on a $\delta_-\geq 3$, d'où $\mathrm{Pic}(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}))\simeq\mathbf{Z}$ par le corollaire (comparer avec

la prop. 3.1.b). Lorsque $\mathbf{d}=(2,2)$ et $n=2g+1$, l'isomorphisme $\mathrm{Pic}(\mathrm{F}_{g-2}(\mathrm{X}))\simeq \mathbf{Z}[\mathcal{O}(1)]$ (on a $\delta_-=3$) est démontré dans [DR], (5.10) (II), p. 177 (*cf.* aussi [R]).

Démonstration du théorème 3.4. Sous les hypothèses du théorème, $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est le lieu des zéros d'une section du fibré $\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S}^*$, et sa codimension dans la grassmannienne est le rang de ce fibré. Il existe donc une suite exacte (complexe de Koszul) :

$$(3.7)\qquad 0\to \bigwedge^{\max}(\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S})\to\cdots\to\bigwedge^{2}(\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S})\to \mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S}\to\mathcal{I}_{\mathrm{F}_r(\mathrm{X})}\to 0\ .$$

Notre outil essentiel sera le théorème d'annulation suivant :

Proposition 3.8.– *Soient* $a,b,i,j_1,\dots,j_s$ *des entiers tels que* $b<a+d_1j_1+\cdots+d_sj_s$ *et* $b+i<\delta_-$. *Alors*

$$\mathrm{H}^{j_1+\cdots+j_s+i}(\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}),\bigwedge^{j_1}(\mathrm{Sym}^{d_1}\,\mathrm{S})\otimes\cdots\otimes\bigwedge^{j_s}(\mathrm{Sym}^{d_s}\,\mathrm{S})\otimes\mathrm{S}^{\otimes a}\otimes\mathrm{S}^{*\otimes b})=0\ .$$

Soit $\mathrm{Sym}_\lambda\,\mathrm{S}$ une composante de $\bigwedge^{j_1}(\mathrm{Sym}^{d_1}\,\mathrm{S})\otimes\cdots\otimes\bigwedge^{j_s}(\mathrm{Sym}^{d_s}\,\mathrm{S})\otimes\mathrm{S}^{\otimes a}\otimes\mathrm{S}^{*\otimes b}$, où $\lambda=(\lambda_0,\dots,\lambda_r)$ est une suite décroissante d'entiers relatifs. D'après le théorème de Bott ([De], [Ma1]), $\mathrm{H}^{j+i}(\mathrm{G},\mathrm{Sym}_\lambda\,\mathrm{S})$ ne peut être non nul que s'il existe un entier h, avec $0\le h\le r+1$, tel que $j+i=h(n-r)$ et $\lambda_h\le h$, ce qui implique en particulier que la somme des composantes de λ d'indice supérieur ou égal à h vérifie $|\lambda|_{\ge h}\le h(r+1-h)$.

Comme $|\lambda|=|\lambda|_{\ge 0}=d_1j_1+\cdots+d_sj_s+a-b>0$, le cas $h=0$ est exclu. De plus,

$$|\lambda|_{\ge h}\ge j_1+\cdots+j_s-\binom{\mathbf{d}+h-1}{h-1}-b\ .$$

En effet, supposons tout d'abord $a=b=0$. Admettons provisoirement le cas $s=1$; le cas où s est quelconque s'ensuit, puisque si $\mathrm{Sym}_\lambda\,\mathrm{S}$ est un facteur direct de $\mathrm{Sym}_{\lambda_1}\mathrm{S}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Sym}_{\lambda_s}\mathrm{S}$, la règle de Littlewood et Richardson implique $|\lambda|_{\ge h}\ge|\lambda_1|_{\ge h}+\cdots+|\lambda_s|_{\ge h}$. Enfin, tensoriser par $\mathrm{S}^{\otimes a}$ ne peut qu'augmenter $|\lambda|_{\ge h}$, tandis que tensoriser par $\mathrm{S}^{*\otimes b}$ fait diminuer $|\lambda|_{\ge h}$ au plus de b.

Pour conclure à une contradiction, il suffit donc de vérifier que pour $1\le h\le r+1$,

$$h(n-2r+h-1)-\binom{\mathbf{d}+h-1}{h-1}>b+i\ .$$

On retrouve au membre de gauche la fonction φ de (2.9); comme δ_- est positif, le lemme résulte de l'hypothèse $\delta_->b+i$ comme en (2.9). Il reste à traiter le cas $a=b=0$ et $s=1$, qui résulte du lemme suivant. ∎

Lemme 3.9.– *Soient* V *un espace vectoriel complexe,* m *et* d *des entiers, et* e *la dimension de* $\mathrm{Sym}^d\,\mathrm{V}^m$. *Pour toute composante irréductible* $\mathrm{Sym}_\lambda\,\mathrm{V}$ *de* $\bigwedge^j(\mathrm{Sym}^d\,\mathrm{V})$, *on a* $|\lambda|_{>m}\ge j-e$.

Soit X la grassmannienne des sous-espaces de codimension m de V, soit Y celle des sous-espaces de codimension e de $\mathrm{Sym}^d\,\mathrm{V}$. On notera S_X et Q_X les fibrés tautologique et quotient sur X, de même que S_Y et Q_Y sur Y. On plonge X dans Y en associant au noyau du quotient $V \to Q$ celui du quotient induit $\mathrm{Sym}^d V \to \mathrm{Sym}^d Q$.

D'après le théorème de Borel-Weil, $\bigwedge^j(\mathrm{Sym}^d V)$ est l'espace des sections globales du fibré $E = \det Q_Y \otimes \bigwedge^{j-e} S_Y$. Notons $(\Gamma_l)_{l\geq 0}$ la filtration de cet espace de sections selon leur ordre d'annulation l sur X. On dispose d'applications injectives

$$\Gamma_l/\Gamma_{l+1} \hookrightarrow H^0(X, E|_X \otimes \mathrm{Sym}^l N^*) ,$$

où N est le fibré normal de X dans Y.

Le membre de droite ne se déduit pas directement du théorème de Borel-Weil. Cependant, tout fibré homogène $\mathcal{F}$ sur X admet une filtration homogène dont les quotients successifs dont irréductibles, c'est-à-dire produits de puissances de Schur de Q_X et S_X. La somme $\mathrm{gr}\,\mathcal{F}$ de ces quotients ne dépend pas de la filtration choisie, et le lemme de Schur implique l'existence d'une injection $H^0(X, \mathcal{F}) \hookrightarrow H^0(X, \mathrm{gr}\,\mathcal{F})$: le théorème de Borel-Weil explicite ce dernier espace de sections. Par exemple, $Q_Y|_X = \mathrm{Sym}^d Q_X$ est irréductible, et

$$\mathrm{gr}\, S_Y|_X = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathrm{Sym}^{d-i} Q_X \otimes \mathrm{Sym}^i S_X$$

a tous ses termes de degré supérieur ou égal à 1 en S_X. Cela implique que $E_{|X}$ est somme de fibrés de la forme $\mathrm{Sym}_\alpha Q_X \otimes \mathrm{Sym}_\beta S_X$, avec $|\beta| \geq j-e$. L'espace des sections globales d'un tel fibré est une puissance de Schur $\mathrm{Sym}_\lambda V$, où $\lambda = (\alpha, \beta)$ est la partition (si c'en est une) obtenue en concaténant α et β. En particulier, $|\lambda|_{>m} = |\beta| \geq j-e$, ce qui démontre le lemme pour les composantes de $\bigwedge^j(\mathrm{Sym}^d V)$ qui proviennent de Γ_0/Γ_1.

Pour étendre ce résultat à celles qui proviennent de Γ_l/Γ_{l+1} pour tout $l > 0$, il suffit de s'assurer que toute composante irréductible de $\mathrm{gr}\, N^*$ est de degré positif ou nul en S_X. Mais c'est une conséquence immédiate du fait que N^* est un sous-fibré homogène de $\Omega^1_Y|_X = Q^*_Y|_X \otimes S_Y|_X$, puisque $Q_Y|_X$ est de degré zéro, et chaque composante de $S_Y|_X$ de degré positif en S_X. ■

Revenons à la démonstration du théorème 3.4 ; posons $G = G(r, \mathbf{P}V)$ et $F = F_r(X)$. Il suffit de le vérifier pour la cohomologie complexe, donc, via la décomposition de Hodge, de démontrer que les morphismes $H^q(G, \Omega^p_G) \to H^q(F, \Omega^p_F)$ sont bijectifs pour $p+q < \delta_-$, et injectifs pour $p+q = \delta_-$. On va montrer que les morphismes $H^q(G, \Omega^p_G) \to H^q(F, \Omega^p_G|_F)$ et $H^q(F, \Omega^p_G|_F) \to H^q(F, \Omega^p_F)$ ont les mêmes propriétés.

Pour les premiers, il s'agit de vérifier que $H^q(G, \mathcal{I}_F \otimes \Omega^p_G) = 0$ pour $p+q \leq \delta_-$, donc, via le complexe de Koszul, que

$$H^{q+j-1}(G, \Omega^p_G \otimes \bigwedge^j(\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}} S)) = 0 \quad \text{pour tout} \quad j > 0 .$$

Rappelons que si Q est le fibré quotient sur G, on dispose d'un isomorphisme $\Omega^1_G \simeq Q^* \otimes S$, d'où la suite exacte $0 \to \Omega^1_G \to V^* \otimes S \to S^* \otimes S \to 0$. Sa puissance extérieure p-ième montre que l'annulation précédente est conséquence de

$$H^{q+j-i-1}(G, \bigwedge^j(\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}} S) \otimes \bigwedge^{p-i}(V^* \otimes S) \otimes \mathrm{Sym}^i(S^* \otimes S)) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad j > 0 \ , \ i \geq 0 \ ,$$

ce qu'assure la proposition 3.8 dès que $q \leq \delta_-$.

Pour les seconds, la suite exacte normale montre qu'il suffit de s'assurer que

$$\mathrm{H}^{q+i}(\mathrm{F}, \Omega_{\mathrm{G}}^{p-i-1}|_{\mathrm{F}} \otimes \mathrm{Sym}^i(\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S})) = 0 \qquad \text{pour tout } i > 0 \,,$$

donc, à cause encore une fois du complexe de Koszul, que

$$\mathrm{H}^{q+i+j}(\mathrm{G}, \Omega_{\mathrm{G}}^{p-i-1} \otimes \mathrm{Sym}^i(\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S}) \otimes \bigwedge^j(\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S})) = 0 \qquad \text{pour tout } i > 0\,, j \geq 0 \,.$$

En raisonnant comme on vient de le faire, on constate que cette annulation a lieu dès que $i + q < \delta_-$, ce qui conclut cette démonstration puisque $i < p$. ∎

4. Normalité projective, équations et degré

Théorème 4.1.– *Soit* X *un sous-schéma de* $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ *défini par des équations de degré* $\mathbf{d}$, *tel que* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *soit de dimension* δ . *Supposons* $n \geq r + \binom{\mathbf{d}+r}{r}$. *Alors* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *est projectivement normale, autrement dit les morphismes de restriction*

$$\rho_l : \mathrm{H}^0(\mathrm{G}(r, \mathbf{P}^n), \mathcal{O}(l)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}), \mathcal{O}(l))$$

sont surjectifs pour tout $l \geq 0$. *Par ailleurs,* ρ_l *est injectif pour* $l < d_- = \min\{d_1, \ldots, d_s\}$.

Posons $\mathrm{G} = \mathrm{G}(r, \mathbf{P}^n)$; d'après le théorème de Bott,

$$\mathrm{H}^j(\mathrm{G}, \bigwedge^j(\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S})(l)) = 0 \qquad \text{pour tout } j > 0 \text{ et tout } l \geq 0 \,.$$

En effet, si l'on raisonne comme dans la démonstration de la proposition 3.8, cet espace ne peut être non nul que si j est multiple de $n - r$; vue l'hypothèse $n - r \geq \operatorname{codim} \mathrm{F}_r(\mathrm{X})$, la seule possibilité est $j = n - r = \operatorname{codim} \mathrm{F}_r(\mathrm{X})$, auquel cas $\bigwedge^j (\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S})(l)$ est une puissance de $\mathcal{O}(1)$, et n'a donc pas non plus de cohomologie en degré $n - r$. La normalité projective s'ensuit, via le complexe de Koszul (3.7) tordu par $\mathcal{O}(l)$.

En fait, les arguments précédents impliquent plus précisément que la suite spectrale associée à ce complexe de Koszul tordu dégénère en E_2 , ce dont on déduit que le complexe des sections globales

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \bigwedge^2(\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S})(l)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S}(l)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathcal{I}_{\mathrm{F}_r(\mathrm{X})}(l)) \longrightarrow 0$$

est exact. Mais pour $l < d_-$, on a $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S}(l)) = 0$ d'après le théorème de Bott, d'où l'inexistence d'équations de $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ de degré l . ∎

Remarques 4.2. 1) Ce dernier complexe implique au passage que $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathcal{I}_{\mathrm{F}_r(\mathrm{X})}(d_-))$ n'est pas nul, et l'on peut calculer explicitement sa dimension.

2) Les schémas $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ ne sont en général pas projectivement normaux; si l'on revient au cas $\mathbf{d} = (2, 2)$ et $n = 2g + 1$ (*cf.* rem. 3.6.1), la dimension des espaces vectoriels

$\mathrm{H}^0(\mathrm{F}_{g-2}(\mathrm{X}),\mathcal{O}(l))$ est donnée par la formule de Verlinde ([Sz]), et aucun ρ_l $(l>0)$ n'est surjectif.

3) Le théorème d'annulation de Kodaira entraîne que les groupes $\mathrm{H}^i(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}),\mathcal{O}(l))$ sont nuls pour $i>0$ et $l\geq -n+\binom{\mathbf{d}+r}{r+1}$. Si l'on raisonne comme dans la preuve de la proposition 3.8, on montre facilement la même annulation lorsque $0<i<\min(\delta, n-(l+2)r-s)$. A l'extérieur du domaine défini par ces inégalités, il peut ne pas y avoir annulation : pour une sextique X dans $\mathbf{P}^6$, on peut montrer que $\mathrm{H}^2(\mathrm{F}_1(\mathrm{X}),\mathcal{O}(6))$ est de dimension ≥ 10024 (alors que $\mathrm{F}_1(\mathrm{X})$ est de dimension 3).

Introduisons des polynômes à $r+1$ variables, $e(x)=x_0+\cdots+x_r$, et

$$\mathrm{Q}_{r,d}(x)=\prod_{a_0+\cdots+a_r=d}(a_0x_0+\cdots+a_rx_r)\ ,$$

puis $\mathrm{Q}_{r,\mathbf{d}}(x)=\mathrm{Q}_{r,d_1}(x)\cdots\mathrm{Q}_{r,d_s}(x)$.

Théorème 4.3.– *Soit X un sous-schéma de $\mathbf{P}^n_k$ défini par des équations de degré $\mathbf{d}$, tel que $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ soit de dimension δ. Le degré de $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ pour le plongement de Plücker de $\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n)$ est égal au coefficient du monôme $x_0^nx_1^{n-1}\cdots x_r^{n-r}$ dans le produit du polynôme $\mathrm{Q}_{r,\mathbf{d}}\times e^\delta$ et du Vandermonde.*

Ce degré est

$$\deg(\mathrm{F})=\int_{\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n)}c_{\max}(\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S}^*)c_1(\mathcal{O}(1))^\delta\ .$$

Rappelons que l'anneau de Chow de $\mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n)$ est un quotient de l'anneau des polynômes symétriques à $r+1$ variables $x_0,\ldots,x_r$, $e(x)$ relevant $c_1(\mathcal{O}(1))$, et $\mathrm{Q}(x)$ relevant $c_{\max}(\mathrm{Sym}^d\,\mathrm{S}^*)$ ([Fu], 14.7). De plus, intégrer sur G revient, au niveau des polynômes, à décomposer sur les polynômes de Schur ([M]), et ne retenir que le coefficient de celui qui est associé à la partition rectangle ayant $r+1$ parts égales à $n-r$, à savoir $(x_0\ldots x_r)^{n-r}$.

Il suffit donc de montrer que si P est un polynôme symétrique, que l'on décompose sur les polynômes de Schur, le coefficient du précédent est égal à celui du monôme $x_0^nx_1^{n-1}\cdots x_r^{n-r}$ dans le produit de P et du Vandermonde. Mais par linéarité, il suffit de le vérifier lorsque P est lui-même un polynôme de Schur, auquel cas c'est une conséquence immédiate de l'expression de Jacobi de ces polynômes ([FH], (A.23), p. 459). ∎

Donnons quelques exemples numériques, d'abord pour le cas des droites d'une hypersurface, qui est dû à Van der Waerden ([vW]), puis pour $r\geq 2$, toujours dans le cas d'une hypersurface.

d	n	dim F	deg F	d	n	dim F	deg F
3	3	0	27	5	5	2	6 125
3	4	2	45	5	6	4	16 100
3	5	4	108	5	7	6	46 625
4	4	1	320	6	5	1	60 480
4	5	3	736	6	6	3	154 224
4	6	5	1 984	7	5	0	698 005
4	7	7	5 824	7	6	2	1 707 797
5	4	0	2 875	9	6	0	305 093 061

1. Degrés de schémas $\mathrm{F}_1(\mathrm{X})$.

r	d	n	dim F	deg F	r	d	n	dim F	deg F
2	3	6	2	2 835	2	5	9	0	2 103 798 896 875
2	3	7	5	24 219	3	3	8	0	321 489
2	3	8	8	274 590	3	3	9	4	10 344 510
2	4	7	0	3 297 280	4	3	11	0	1 812 768 336

2. Degrés de schémas $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ pour $r = 2, 3, 4$.

La même méthode permet en fait de déterminer la décomposition

$$[\mathrm{F}_r(\mathrm{X})] = \sum_{|\lambda| = \operatorname{codim} \mathrm{F}_r(\mathrm{X})} f_\lambda \sigma_\lambda$$

de la classe fondamentale de $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ sur les classes des cycles de Schubert de la grassmannienne, où l'on note σ_λ la classe du cycle de codimension $|\lambda|$ associé à la partition $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$.

Proposition 4.4.– *Si l'on écrit* $\mathrm{Q}_{r,\mathbf{d}}(x) = \sum_\alpha q_\alpha x^\alpha$ *, et si* κ *désigne la suite* $(r, \ldots, 1, 0)$ *, alors*

$$f_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{r+1}} \varepsilon(\sigma) q_{\sigma(\lambda+\kappa)-\kappa} \ .$$

Notons que si l'on adopte pour les cycles de Schubert la même convention que pour les polynômes de Schur, à savoir que pour chaque suite d'entiers α , on pose $\sigma_\alpha = \varepsilon(\tau)\sigma_\lambda$ s'il existe une partition λ et une permutation $\tau \in \mathcal{S}_{r+1}$ telles que $\alpha + \kappa = \tau(\lambda + \kappa)$, et $\sigma_\alpha = 0$ sinon, la proposition précédente se traduit par la simple égalité

$$[\mathrm{F}_r(\mathrm{X})] = \sum_\alpha q_\alpha \sigma_\alpha .$$

Donnons par exemple les classes de quelques variétés $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ en bas degré.

$$\begin{aligned}
&\text{Si } \mathbf{d}=(2)\,, && [\mathrm{F}_r] = 2^{r+1}\sigma_{r+1,r,\dots,1}\ ,\\
&\text{Si } \mathbf{d}=(3)\,, && [\mathrm{F}_1] = 9(2\sigma_{3,1}+3\sigma_{2,2})\ ,\\
& && [\mathrm{F}_2] = 27(8\sigma_{6,3,1}+12\sigma_{6,2,2}+20\sigma_{5,4,1}+50\sigma_{5,3,2}+42\sigma_{4,4,2}+35\sigma_{4,3,3})\ .\\
&\text{Si } \mathbf{d}=(4)\,, && [\mathrm{F}_1] = 32(3\sigma_{4,1}+10\sigma_{3,2})\ ,\\
& && [\mathrm{F}_2] = 512(54\sigma_{10,4,1}+180\sigma_{10,3,2}+369\sigma_{9,5,1}+1599\sigma_{9,4,2}+1230\sigma_{9,3,3}\\
& && \qquad +819\sigma_{8,6,1}+5022\sigma_{8,5,2}+8459\sigma_{8,4,3}+504\sigma_{7,7,1}+6039\sigma_{7,6,2}\\
& && \qquad +18889\sigma_{7,5,3}+13354\sigma_{7,4,4}+11660\sigma_{6,6,3}+23560\sigma_{6,5,4}+6440\sigma_{5,5,5})\ .\\
&\text{Si } \mathbf{d}=(5)\,, && [\mathrm{F}_1] = 25(24\sigma_{5,1}+130\sigma_{4,2}+91\sigma_{3,3})\ .\\
&\text{Si } \mathbf{d}=(2,2)\,, && [\mathrm{F}_1] = 16(\sigma_{4,2}+\sigma_{3,3})\ ,\\
& && [\mathrm{F}_2] = 64(\sigma_{6,4,2}+\sigma_{6,3,3}+\sigma_{5,5,2}+2\sigma_{5,4,3}+\sigma_{4,4,4})\ .
\end{aligned}$$

5. Espaces linéaires sur les schémas $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$

Le but de ce paragraphe est de montrer que les schémas $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ sont séparablement uniréglés en droites pour n assez grand (corollaire 5.5). Pour cela, nous commençons par généraliser les résultats du § 2 aux sous-schémas de $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ formés des r-plans contenant un sous-espace linéaire fixe de dimension $r_0 < r$. Pour de tels entiers, on pose

$$\delta(n,\mathbf{d},r,r_0) = (r-r_0)(n-r) + \binom{\mathbf{d}+r_0}{r_0} - \binom{\mathbf{d}+r}{r}$$

et

$$\delta_-(n,\mathbf{d},r,r_0) = \min\{\delta(n,\mathbf{d},r,r_0), n-2r+r_0+1-\binom{\mathbf{d}+r_0}{r_0+1}\}\ ,$$

de sorte que $\delta(n,\mathbf{d},r)=\delta(n,\mathbf{d},r,-1)$ et $\delta_-(n,\mathbf{d},r)=\delta_-(n,\mathbf{d},r,-1)$. De nouveau, il est utile de noter que lorsque $\mathbf{d}\neq(2)$, l'entier $\delta(n,\mathbf{d},r,r_0)$ est positif (resp. strictement positif) si et seulement si $\delta_-(n,\mathbf{d},r,r_0)$ l'est ; cela résulte de la convexité de la fonction $\psi : r \mapsto \binom{\mathbf{d}+r}{r} - r^2$, qui entraîne l'inégalité $\psi(r)-\psi(r_0) \geq (r-r_0)(\psi(r_0+1)-\psi(r_0))$ (puisque $r > r_0$). Le théorème suivant généralise le théorème 2.1.

Théorème 5.1.– *Soit* X *un sous-schéma de* $\mathbf{P}^n_k$ *défini par des équations de degré* $\mathbf{d}$, *soit* Λ_0 *un* r_0*-plan contenu dans* X, *et soit* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X},\Lambda_0)$, *avec* $r > r_0$, *le schéma de Hilbert des* r*-plans contenus dans* X *et contenant* Λ_0.

a) *Lorsque* $\delta_-(n,\mathbf{d},r,r_0) < 0$, *le schéma* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X},\Lambda_0)$ *est vide pour* X *générale et* Λ_0 *général contenu dans* X.

b) *Lorsque* $\delta_-(n,\mathbf{d},r,r_0) \geq 0$, *le schéma* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X},\Lambda_0)$ *est non vide ; il est lisse de dimension* $\delta(n,\mathbf{d},r,r_0)$ *pour* X *générale et* Λ_0 *général contenu dans* X.

c) *Lorsque* $\delta_-(n,\mathbf{d},r,r_0) > 0$, *le schéma* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X},\Lambda_0)$ *est connexe.*

En gardant les notations de la démonstration du théorème 2.1, on considère $\mathrm{G}_0 = \{[\Lambda] \in \mathrm{G}(r,\mathbf{P}^n) \mid \Lambda \supset \Lambda_0\}$. La dimension de $\mathrm{I}_0 = q^{-1}(\mathrm{G}_0)$ est égale à

$$\dim \mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{V}^* - \binom{\mathbf{d}+r}{r} + (r-r_0)(n-r)\ .$$

Le cône S_0 dans $\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}} V^*$ correspondant aux sous-schémas contenant Λ_0 est de codimension $\binom{\mathbf{d}+r_0}{r_0}$, de sorte que $\dim I_0 = \dim S_0 + \delta$. Supposons $\delta_- < 0$; si $\mathbf{d} = (2)$, cela signifie $2r \geq n$, et on a déjà vu qu'une quadrique lisse dans $\mathbf{P}^n$ ne contenait pas de r-plan ; si $\mathbf{d} \neq (2)$, on a $\delta < 0$, et le morphisme $p_r^0 : I_0 \to S_0$ induit par p_r n'est pas surjectif.

Cela montre a). On suppose maintenant $\delta_- \geq 0$; fixons un r-plan Λ contenant Λ_0, et choisissons des coordonnées de façon que Λ_0 soit défini par les équations $x_{r_0+1} = \cdots = x_n = 0$, et Λ par $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$. Pour tout entier positif m, on note $\Gamma_0(m)$ le noyau du morphisme $\Gamma_\Lambda(m) \to \Gamma_{\Lambda_0}(m)$.

La démarche est entièrement analogue à celle de la démonstration du théorème 2.1. Soit $\mathbf{f}$ un élément de S_0 ; pour que p_r^0 soit lisse en un point $(X_{\mathbf{f}}, \Lambda)$ de I_0, il faut et il suffit que le morphisme $\alpha_0 : \Gamma_0(1)^{n-r} \to \Gamma_0(\mathbf{d})$ induit par le morphisme α du lemme 2.2 soit surjectif.

Soit Z_0 le lieu des points de I_0 où p_r^0 n'est pas lisse ; on montre comme en 2.6–2.7, par récurrence sur $r - r_0$, que $p_r^0(Z_0)$ est distinct de S_0. Soit $\mu_0 : \Gamma_0(1) \times \Gamma_\Lambda(\mathbf{d}-1) \to \Gamma_0(\mathbf{d})$ le morphisme induit par la multiplication μ. On montre de la même façon que si h est un entier compris entre 1 et $r - r_0$, l'ensemble des formes linéaires ℓ_0 sur $\Gamma_0(\mathbf{d})$ telles que $\mathrm{codim}\mu_0^{-1}(\ell_0) = h$ est de dimension

$$\leq h(r - r_0 - h) + \binom{\mathbf{d} + r_0 + h}{r_0 + h} - \binom{\mathbf{d} + r_0}{r_0} .$$

On en déduit que la codimension de Z_0 dans I_0 est

$$\begin{aligned} &\geq \min_{1 \leq h \leq r - r_0} [h(n-r) - h(r - r_0 - h) - \binom{\mathbf{d} + r_0 + h}{r_0 + h} + \binom{\mathbf{d} + r_0}{r_0}] + 1 \\ &= \min\{n - 2r + r_0 + 1 - \binom{\mathbf{d} + r_0}{r_0 + 1}, \delta\} + 1 = \delta_- + 1 , \end{aligned}$$

puisque la fonction entre crochets est une fonction concave de h lorsque $\mathbf{d} \neq (2)$, et croissante lorsque $\mathbf{d} = (2)$ puisque δ_- est positif (*cf.* (2.9)). La fin de la démonstration est la même que celle du théorème 2.1. ■

Soient X un sous-schéma de $\mathbf{P}_k^n$ défini par des équations de degré $\mathbf{d}$, et Λ un $(r+1)$-plan contenu dans X. Les r-plans contenus dans Λ définissent une inclusion de Λ^* dans $F_r(X)$, dont l'image par le plongement de Plücker est un $(r+1)$-plan.

Corollaire 5.2.– *Soit* X *un sous-schéma de* $\mathbf{P}_k^n$ *défini par des équations de degré* $\mathbf{d}$*.*

a) *Si* $\mathbf{d} \neq (2)$ *et* $n \geq \frac{1}{r}\binom{\mathbf{d}+r}{r} + r - \frac{s}{r}$*, ou si* $\mathbf{d} = (2)$ *et* $n \geq 2r + 1$*, la variété* X *est recouverte par des* r*-plans.*

b) *Si* $n \geq \binom{\mathbf{d}+r}{r+1} + r + 1$*, la sous-variété* $F_r(X)$ *de* $G(r, \mathbf{P}^n)$ *est uniréglée en droites.*

Le point a) résulte du théorème avec $r_0 = 0$. Soit Λ_0 un r-plan contenu dans X ; sous les hypothèses de b), le théorème 5.1.b) entraîne qu'il existe un $(r+1)$-plan Λ_1 contenu dans X et contenant Λ_0. Le $(r+1)$-plan Λ_1^*, contenu dans $F_r(X)$, passe par $[\Lambda_0]$. En particulier, il passe une droite par tout point de $F_r(X)$. ■

Théorème 5.3.– *Soit* X *un sous-schéma général de* $\mathbf{P}_k^n$ *défini par des équations de degré* $\mathbf{d}$ *; on suppose* $n \geq \binom{\mathbf{d}+r}{r+1} + r + 1$ *. Soit* Λ *un* $(r+1)$*-plan général contenu dans* X *. La restriction à une droite générale de* Λ^* *du fibré normal à* Λ^* *dans* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *est isomorphe à*

$$\mathcal{O}^{r(n-r-1)+\binom{\mathbf{d}+r}{r+1}-\binom{\mathbf{d}+r}{r}} \oplus \mathcal{O}(1)^{n-r-1-\binom{\mathbf{d}+r}{r+1}} .$$

Soit N le fibré normal à Λ^* dans $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$; on a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{N}_{\Lambda^*/\mathrm{G}} & \longrightarrow & \big(\mathrm{N}_{\mathrm{F}_r(\mathrm{X})/\mathrm{G}}\big)|_{\Lambda^*} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \| & & \| & & \\ & & & & (\mathrm{S}^*|_{\Lambda^*})^{n-r-1} & & \mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S}^*|_{\Lambda^*} & & \end{array}$$

dont la restriction à une droite ℓ contenue dans Λ^* est

$$(5.4) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{N}|_\ell \longrightarrow (\mathrm{S}^*|_\ell)^{n-r-1} \xrightarrow{u} \mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S}^*|_\ell \longrightarrow 0 .$$

Comme $\mathrm{S}^*|_\ell$ est isomorphe à $\mathcal{O}^r \oplus \mathcal{O}(1)$, cela entraîne que $\mathrm{N}|_\ell$ est isomorphe à une somme directe $\bigoplus_j \mathcal{O}(a_j)$ avec $a_j \leq 1$ pour tout j. On vérifie que $\mathrm{H}^0(\ell, \mathrm{S}^*|_\ell)$ s'identifie à $\mathrm{H}^0(\Lambda, \mathcal{O}(1))$, c'est-à-dire à l'espace vectoriel noté $\Gamma_\Lambda(1)$ dans la démonstration du théorème 2.1 et $\mathrm{H}^0(\ell, \mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S}^*|_\ell)$ à $\Gamma_\Lambda(\mathbf{d})$. Soient x_0 un point de ℓ, et Λ_0 l'hyperplan de Λ associé. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_0(1)^{n-r-1} & \longrightarrow & \Gamma_\Lambda(1)^{n-r-1} & \longrightarrow & \Gamma_{\Lambda_0}(1)^{n-r} \\ {\scriptstyle\alpha_0}\big\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Gamma_0(\mathbf{d}) & \longrightarrow & \Gamma_\Lambda(\mathbf{d}) & \longrightarrow & \Gamma_{\Lambda_0}(\mathbf{d}) \end{array}$$

où les notations sont celles de la démonstration du théorème 5.1. On vérifie que α s'identifie à $\mathrm{H}^0(u)$, et α_0 à $\mathrm{H}^0(u(-x_0)) : \mathrm{H}^0(\ell, (\mathrm{S}^*|_\ell)(-x_0)^{n-r-1}) \to \mathrm{H}^0(\ell, \mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\,\mathrm{S}^*|_\ell(-x_0))$. Comme

$$\delta_-(n, \mathbf{d}, r+1, r) = n - r - 1 - \binom{\mathbf{d}+r}{r+1}$$

est positif par hypothèse, la démonstration du théorème 5.1 entraîne que $\mathrm{H}^0(u(-x_0))$ est surjectif; il en résulte que $\mathrm{H}^1(\ell, \mathrm{N}|_\ell(-x_0))$ est nul, donc que les a_j sont tous positifs. Le rang et le degré de N_ℓ étant donnés par (5.4), cela démontre le théorème. ∎

Il n'est pas vrai en général que le fibré normal à Λ^* dans $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ soit somme de fibrés en droites; cependant, c'est le cas lorsque $\delta(n, \mathbf{d}, r+1)$ est nul ([BV], prop. 3).

Corollaire 5.5.– *Soit* X *un sous-schéma général de* $\mathbf{P}^n_k$ *défini par des équations de degré* $\mathbf{d}$ *; on suppose* $n \geq \binom{\mathbf{d}+r}{r+1} + r + 1$ *. La variété* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *est séparablement uniréglée en droites.*

L'hypothèse sur n entraîne que $\delta_-(n, \mathbf{d}, r+1)$ est positif; soient Λ_1 un $(r+1)$-plan général contenu dans X, et ℓ une droite générale contenue dans Λ_1^*. Le théorème précédent entraîne que le fibré normal à ℓ dans $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est somme de copies de $\mathcal{O}_\ell$ et $\mathcal{O}_\ell(1)$, donc que ℓ est *libre* au sens de [K], p. 113. Le corollaire résulte alors de *loc.cit.*, p. 188. ■

6. Cycles algébriques

On voudrait montrer que pour n assez grand, les groupes de Chow rationnels de $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ sont les mêmes que ceux de la grassmannienne ambiante $\mathrm{G}(r, \mathbf{P}^n)$, généralisant ainsi des résultats de [P], [K] p. 266, et [ELV], qui traitent le cas $r = 0$. On n'obtient malheureusement de résultats nouveaux que pour les groupes $\mathrm{A}_1(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}))_{\mathbf{Q}}$, en caractéristique nulle. Les idées sont celles de [K].

Proposition 6.1.– *Soit* X *un sous-schéma de* $\mathbf{P}^n_k$ *défini par des équations de degré* $\mathbf{d}$ *; on suppose* $n \geq \binom{\mathbf{d}+r}{r+1}$ *. Le schéma* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *est connexe par chaînes rationnelles ; en particulier,* $\mathrm{A}_0(\mathrm{F}_r(\mathrm{X})) \simeq \mathbf{Z}$*.*

Lorsque X est générale, il résulte du théorème 2.1 et de la remarque 3.6.1) que $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est une variété de Fano lisse connexe, donc est connexe par chaînes rationnelles ([K], 2.13, p. 254). Le cas général s'en déduit comme dans [K], 4.9, p. 271. ■

On suppose maintenant $k = \mathbf{C}$ (pour généraliser les résultats qui suivent en toute caractéristique, il suffirait de montrer que le groupe de Néron-Severi d'un schéma $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ général est de rang 1).

Proposition 6.2.– *Soit* X *un sous-schéma de* $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ *défini par des équations de degré* $\mathbf{d}$ *; on suppose* $n \geq \binom{\mathbf{d}+r}{r+1} + r + 1$ *. Deux points quelconques de* $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ *peuvent être joints par une courbe connexe de degré* $\delta(n, \mathbf{d}, r)$*, dont toutes les composantes sont des droites.*

On peut supposer X générale, de sorte que $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est une variété de Fano lisse uniréglée en droites (cor. 5.2.b)), de groupe de Néron-Severi de rang 1 (cor. 3.5), sauf dans le cas trivial $n = 3$, $r = 0$ et $\mathbf{d} = (2)$. Le corollaire résulte de [K], p. 252. ■

Soient X un k-schéma et m un entier positif; on note $\mathrm{A}_m(\mathrm{X})$ (resp. $\mathrm{B}_m(\mathrm{X})$) le groupe des classes d'équivalence rationnelle (resp. algébrique) de m-cycles sur X (*cf.* [K], p. 122). Pour l'application du théorème suivant, on notera que l'inégalité $n \geq \binom{\mathbf{d}+r+1}{r+2}$ entraîne $n \geq \binom{\mathbf{d}+r}{r+1} + r + 1$ sauf si $d = (2, \ldots, 2)$ et $r \leq s$.

Théorème 6.3.– *Soit* X *un sous-schéma de* $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ *défini par des équations de degré* $\mathbf{d}$ *; on suppose* $n \geq \binom{\mathbf{d}+r}{r+1} + r + 1$*.*

a) *L'espace vectoriel* $\mathrm{B}_1(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}))_{\mathbf{Q}}$ *est de rang* 1*.*

b) *Si de plus* $n \geq \binom{\mathbf{d}+r+1}{r+2}$*, l'espace vectoriel* $\mathrm{A}_1(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}))_{\mathbf{Q}}$ *est de rang* 1*.*

En raisonnant comme dans [K], p. 271, on voit que la proposition 6.2 entraîne que $\mathrm{A}_1(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}))_{\mathbf{Q}}$ est engendré par les classes des droites. Ces droites sont paramétrées par un fibré en $G(r-1,\mathbf{P}^{r+1})$ au-dessus de $F_{r+1}(X)$, de sorte qu'il existe un morphisme surjectif $A_0(F_{r+1}(X))_{\mathbf{Q}} \to A_1(F_r(X))_{\mathbf{Q}}$. Sous l'hypothèse de a), $F_{r+1}(X)$ est connexe. Sous l'hypothèse de b), il résulte du cor. 6.1 que $A_0(F_{r+1}(X))_{\mathbf{Q}}$ est de dimension 1. ■

(6.4) Supposons $F_r(X)$ lisse. La conclusion de la partie a) du théorème précédent reste valable sous l'hypothèse plus faible $n \geq \binom{\mathbf{d}+r}{r+1}$; cela résulte du corollaire 3.5 et de [BS] (*cf.* aussi [K], th. 3.14, p. 207). D'autre part, le théorème 3.6.(b) de [J] entraîne que sous les hypothèses de b), on a $H^{1,q}(F_r(X)) = 0$ pour tout $q > 1$, un résultat qui n'est pas couvert par le théorème 3.4.

Lorsque X contient un $(r+l)$-plan Λ, le plongement $G(r,\Lambda) \subset F_r(X) \subset G(r,\mathbf{P}^n)$ induit un isomorphisme $A_i(G(r,\Lambda)) \simeq A_i(G(r,\mathbf{P}^n))$ pour $i \leq l$ ([Fu], p. 271), de sorte qu'on a une surjection $A_i(F_r(X)) \twoheadrightarrow A_i(G(r,\mathbf{P}^n))$.

Conjecture 6.5.– *Soit* X *un sous-schéma de* $\mathbf{P}^n_k$ *défini par des équations de degré* $\mathbf{d}$. *Si* $n \geq \binom{\mathbf{d}+r+l}{r+l+1}$, *le morphisme* $A_l(F_r(X))_{\mathbf{Q}} \to A_l(G(r,\mathbf{P}^n))_{\mathbf{Q}}$ *induit par l'inclusion est bijectif.*

Lorsque $l=1$ et $k=\mathbf{C}$, c'est le théorème précédent ; pour $r=0$ c'est le théorème principal de [ELV].

7. Unirationalité

Nous allons maintenant démontrer l'unirationalité des schémas $F_r(X)$ pour n assez grand en nous ramenant à un résultat de [PS], qui fournit un critère explicite pour l'unirationalité d'une intersection complète dans un espace projectif.

Ce critère est le suivant. On définit tout d'abord, pour toute suite $\mathbf{d} = (d_1,\dots,d_s)$ d'entiers strictement positifs, des entiers $n(\mathbf{d})$ et $r(\mathbf{d})$ de la façon suivante : on pose $n(1) = r(1) = 0$ (dans [PS], on trouve $n(1) = 1$, mais $n(1) = 0$ suffit) ; si l'un des d_i vaut 1, on note $\mathbf{d}'$ la suite $\mathbf{d}$ privée de d_i, et on pose $n(\mathbf{d}) = n(\mathbf{d}') + 1$ et $r(\mathbf{d}) = r(\mathbf{d}')$; enfin, si tous les d_i sont > 1, on pose $r(\mathbf{d}) = n(\mathbf{d}-1)$ et $n(\mathbf{d}) = r(\mathbf{d}) + \binom{\mathbf{d}+r(\mathbf{d})-1}{r(\mathbf{d})}$. On a par exemple

$$r(2,\dots,2) = s-1 \qquad r(3,\dots,3) = s^2+s-1$$
$$r(4,\dots,4) = s^2+s-1+\frac{s^2(s+1)(s^2+s+1)}{2}\,.$$

Les bornes données dans [Ra] sont un peu meilleures, mais nous n'avons pas su extraire de cet article un critère effectif.

Théorème ([Pr], [PS]) 7.1.– *Soit* F *une intersection complète dans* $\mathbf{P}^N_k$ *définie par des équations* $\mathbf{g} = (g_1,\dots,g_S)$ *de degré* $\mathbf{D}$ *et contenant un* $r(\mathbf{D})$*-plan* Λ. *On suppose* $N \geq n(\mathbf{D})$, *que* F *est irréductible de codimension* S *et lisse le long de* Λ, *et que l'application* $\beta : k^{N+1} \to \Gamma_\Lambda(\mathbf{D}-1)$ *définie par*

$$\beta(a_0,\dots,a_N) = \Big(\sum_{j=0}^{N} a_j\Big(\frac{\partial g_1}{\partial x_j}\Big)_{|\Lambda},\dots,\sum_{j=0}^{N} a_j\Big(\frac{\partial g_S}{\partial x_j}\Big)_{|\Lambda}\Big)$$

est surjective. Alors F *est unirationnelle.*

On remarquera que la surjectivité de β entraîne celle de l'application α définie en 2.2, donc la lissité de $F_{r(\mathbf{D})}(F)$ en Λ.

Théorème 7.2.– *Il existe une constante explicite $n(\mathbf{d},r)$ telle que, pour $n \geq n(\mathbf{d},r)$, le schéma des r-plans contenus dans un sous-schéma générique X de $\mathbf{P}_k^n$ défini par des équations de degré $\mathbf{d}$, est unirationnel.*

Remarques 7.3. 1) La borne $n(\mathbf{d},r)$ que l'on obtient est très grande. Elle est définie de la façon suivante : soit $\mathbf{D}$ la suite d'entiers où chaque d_i est répété $\binom{d_i+r}{r}$ fois ; on pose $r_1 = (r(\mathbf{D})+1)(r+1)-1$ et

$$n(\mathbf{d},r) = r_1 + \binom{\mathbf{d}+r_1-1}{r_1} .$$

Pour le cas le plus simple $r=1$ et $\mathbf{d}=(3)$, c'est-à-dire pour le schéma des droites contenues dans une hypersurface cubique, on a $\mathbf{D}=(3,3,3,3)$, $r(3,3,3,3)=19$ et $n((3),1)=859$. Dans ce cas précis, il est facile d'améliorer la borne de [PS] en $r(3,3,3,3)=13$ (il suffit de remarquer qu'une intersection de 4 quadriques est rationnelle dès qu'elle contient un 3-plan dans son lieu lisse, en procédant par exemple comme dans [CTSSD]) ; on obtient alors $n((3),1)=433$.

On obtient aussi $n((2,\dots,2),r) = s(s+1)\binom{r+2}{2}(r+1)-1$. Rappelons que pour $\mathbf{d}=(2,2)$ et $n=2g+1$, la variété $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est une variété abélienne pour $r=g-1$ (*cf.* rem. 3.6.1), et qu'elle est *rationnelle* pour $r=g-2$ ([N]), donc unirationnelle pour $r \leq g-2$.

2) L'adjectif « générique » de l'énoncé du théorème peut être précisé : si $n \geq n(\mathbf{d},r)$, le schéma $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$ est unirationnel s'il est irréductible de dimension $\delta(n,\mathbf{d},r)$ et si X contient un r_1-plan Λ_1 pour lequel l'application β du théorème 7.1 est surjective.

Démonstration du théorème. Soit V l'espace vectoriel k^{n+1}. On note $(x^{(0)},\dots,x^{(r)})$, avec $x^{(j)} = (x_0^{(j)},\dots,x_n^{(j)})$, les coordonnées homogènes d'un point de l'espace projectif $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathrm{V}^{r+1}) = \mathbf{P}^{(r+1)(n+1)-1}$. Soit Σ la sous-variété de $\mathbf{P}$ définie comme le lieu des points $(x^{(0)},\dots,x^{(r)})$ tels que les points $[x^{(0)}],\dots,[x^{(r)}]$ de $\mathbf{P}\mathrm{V}$ ne soient pas linéairement indépendants. L'application

$$\rho : \mathbf{P} - \Sigma \longrightarrow \mathrm{G}(r,\mathbf{P}\mathrm{V})$$

qui à $(x^{(0)},\dots,x^{(r)})$ associe le r-plan engendré par les points $[x^{(0)}],\dots,[x^{(r)}]$ de $\mathbf{P}\mathrm{V}$ est une fibration lisse connexe localement triviale.

Soient $\mathbf{f} = (f_1\dots,f_s)$ les équations définissant X. On note F l'adhérence dans $\mathbf{P}$ de $\rho^{-1}(\mathrm{F}_r(\mathrm{X}))$; lorsque $\delta(n,\mathbf{d},r) \geq 0$, il ressort du théorème 2.1 que la variété F est irréductible de codimension $\binom{\mathbf{d}+r}{r}$ dans $\mathbf{P}$ et lisse en dehors de Σ pour $\mathbf{f}$ générique.

Pour tout entier d, on note $\mathcal{I}_d$ le sous ensemble de $\mathbf{N}^{r+1}$ formé des $(i_0,\dots,i_r)$ tels que $\sum i_\alpha = d$; il a $\binom{d+r}{r}$ éléments. Pour tout élément f de $\mathrm{Sym}^d\mathrm{V}^*$ et tout élément $\mathrm{I} = (i_0,\dots,i_r)$ de $\mathcal{I}_d$, on définit un polynôme f_I multihomogène de mutidegré $(i_0,\dots,i_r)$ sur $\mathbf{P}$ en posant

$$f(\lambda_0 x^{(0)} + \cdots + \lambda_r x^{(r)}) = \sum_{\mathrm{I}\in\mathcal{I}_d} \lambda^\mathrm{I} f_\mathrm{I}(x^{(0)},\dots,x^{(r)}) , \tag{7.4}$$

où $\lambda^\mathrm{I} = \lambda_0^{i_0}\cdots\lambda_r^{i_r}$; on convient aussi que f_I est nul si l'un des i_α est strictement négatif. En dehors de Σ, la variété F est définie par les équations

$$f_i(\lambda_0 x^{(0)} + \cdots + \lambda_r x^{(r)}) = 0 \qquad \text{pour} \quad i=1,\dots,s \quad \text{et pour tout} \quad (\lambda_0,\dots,\lambda_r) \in \mathbf{P}^r ,$$

c'est-à-dire par les $\binom{\mathbf{d}+r}{r}$ équations $f_{i,\mathrm{I}}$, pour $i=1,\ldots,s$ et $\mathrm{I}\in\mathcal{I}_{d_i}$. En fait, comme Σ est de codimension $n+1-r$ dans $\mathbf{P}$, si on suppose $n-r\geq\binom{\mathbf{d}+r}{r}$, ces équations définissent F dans $\mathbf{P}$; la variété F est alors une intersection complète irréductible, lisse en dehors de Σ. Son degré est la suite $\mathbf{D}$ où chaque d_i est répété $\binom{d_i+r}{r}$ fois. Posons $r_1=(r(\mathbf{D})+1)(r+1)-1$; on suppose $\delta(n,\mathbf{d},r_1)\geq 0$, de sorte qu'il existe un r_1-plan $\Lambda_1=\mathbf{P}\mathrm{W}_1$ contenu dans X ; on le suppose défini par les équations $x_{r_1+1}=\cdots=x_n=0$. On note Λ_1^{r+1} le $((r_1+1)(r+1)-1)$-plan $\mathbf{P}(\mathrm{W}_1^{r+1})$ dans $\mathbf{P}$.

Soit Λ un $r(\mathbf{D})$-plan contenu dans Λ_1^{r+1} et disjoint de Σ (on précisera plus bas notre choix de Λ). En vue d'appliquer le théorème 7.1, on veut vérifier que l'application $\beta: k^{(r+1)(n+1)}\to\Gamma_\Lambda(\mathbf{D}-1)$ définie par

$$\beta(a^{(0)},\ldots,a^{(r)})=\Big(\sum_{j,l}a_l^{(j)}\Big(\frac{\partial f_{i,\mathrm{I}}}{\partial z_l^{(j)}}\Big)_{|\Lambda}\Big)_{1\leq i\leq s,\ \mathrm{I}\in\mathcal{I}_{d_i}}$$

est surjective. Dérivons l'égalité (7.4) par rapport à $x_l^{(j)}$; on obtient

$$\lambda_j\frac{\partial f}{\partial z_l}(\lambda_0x^{(0)}+\cdots+\lambda_rx^{(r)})=\sum_{\mathrm{I}\in\mathcal{I}_d}\lambda^{\mathrm{I}}\frac{\partial f_{\mathrm{I}}}{\partial z_l^{(j)}}(x^{(0)},\ldots,x^{(r)})\ ,$$

de sorte que si ϵ_j est l'élément de $\mathcal{I}_1$ dont toutes les composantes sauf la $j$ième sont nulles, on a

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial z_l}\Big)_{\mathrm{I}-\{\epsilon_j\}}=\frac{\partial f_{\mathrm{I}}}{\partial z_l^{(j)}}\ ,$$

pour tout I dans $\mathcal{I}_d$ et tout $j=0,\ldots,r$. On peut donc écrire

$$\beta(a^{(0)},\ldots,a^{(r)})=\Big(\sum_{j,l}a_l^{(j)}\Big(\frac{\partial f_i}{\partial z_l}\Big)_{\mathrm{I}-\{\epsilon_j\}|_\Lambda}\Big)_{1\leq i\leq s,\ \mathrm{I}\in\mathcal{I}_{d_i}}\ ,$$

ou encore, en posant $\partial_af=\sum a_l\Big(\frac{\partial f}{\partial z_l}\Big)_{|\Lambda_1}$ pour tout f dans $\mathrm{Sym}^\bullet\mathrm{V}^*$,

$$\beta(a^{(0)},\ldots,a^{(r)})=\Big(\sum_j(\partial_{a^{(j)}}f_i)_{\mathrm{I}-\{\epsilon_j\}}\ _{|\Lambda}\Big)_{1\leq i\leq s,\ \mathrm{I}\in\mathcal{I}_{d_i}}\ .$$

Lemme 7.5.– *Pour $n\geq r_1+\binom{\mathbf{d}+r_1-1}{r_1}$ et $\mathbf{f}$ générique dans $\mathrm{Sym}^{\mathbf{d}}\mathrm{V}^*$ nul sur Λ_1, l'application*

$$\begin{aligned}\beta_1: k^{n+1}&\longrightarrow\Gamma_{\Lambda_1}(\mathbf{d}-1)\\ a&\longmapsto(\partial_af_1,\ldots,\partial_af_s)\end{aligned}$$

est surjective.

Il suffit de trouver un $\mathbf{f}$ pour lequel les $\Big(\frac{\partial f_1}{\partial z_l},\ldots,\frac{\partial f_s}{\partial z_l}\Big)_{0\leq l\leq n}$ engendrent $\Gamma_{\Lambda_1}(\mathbf{d}-1)$. Soient $\mathrm{J}_1,\ldots,\mathrm{J}_s$ des sous-ensembles disjoints de $\{r_1+1,\ldots,n\}$ tels que $\mathrm{Card}\,\mathrm{J}_i=\binom{d_i+r_1-1}{r_1}$, et soit $\{g_j\}_{j\in\mathrm{J}_i}$ une base de $\Gamma_{\Lambda_1}(d_i-1)$. Il suffit de prendre $f_i=\sum_{j\in\mathrm{J}_i}x_jg_j$. ∎

Puisque Λ est contenu dans Λ_1^{r+1}, l'application β se factorise par $(\beta_1)^{r+1}$, et il suffit de démontrer que les applications

$$\begin{array}{rcl} \Omega_d : \left(\Gamma_{\Lambda_1}(d-1)\right)^{r+1} & \longrightarrow & \Gamma_\Lambda(d-1)^{\mathcal{I}_d} \\ (g^{(0)},\dots,g^{(r)}) & \longmapsto & \Big(\sum_j g^{(j)}_{\mathrm{I}-\{\epsilon_j\}}\big|_\Lambda\Big)_{\mathrm{I}\in\mathcal{I}_d} \end{array}$$

sont surjectives pour $d = d_1,\dots,d_s$. Nous allons montrer qu'elles sont surjectives pour tout d, pour un choix convenable de Λ. Posons $x_{\alpha\beta} = x_{\alpha(r(\mathbf{D})+1)+\beta}$, de sorte que les $x_{\alpha\beta}$, pour $0 \le \alpha \le r$ et $0 \le \beta \le r(\mathbf{D})$, forment des coordonnées sur Λ_1. Prenons pour Λ le $r(\mathbf{D})$-plan de Λ_1^{r+1} défini par les équations

$$x^{(j)}_{\alpha\beta} = x^{(0)}_{0\beta}\,\delta_{\alpha,j} \ ;$$

il est bien disjoint de Σ, et paramétré par les $y_\beta = x^{(0)}_{0\beta}$, pour $\beta = 0,\dots,r(\mathbf{D})$.

Lemme 7.6.– *Pour tout entier d, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \Omega'_{d,q} : \Gamma_{\Lambda_1}(d-1) & \longrightarrow & \Gamma_\Lambda(d-1)^{\mathcal{I}_{d-1}} \\ g & \longmapsto & \left(g_{\mathrm{I}}\big|_\Lambda\right)_{\mathrm{I}\in\mathcal{I}_{d-1}} \end{array}$$

est surjective.

Soit $g = \prod\limits_{\alpha,\beta} x_{\alpha\beta}^{n_{\alpha\beta}}$; on a

$$g(\lambda_0 x^{(0)} + \cdots + \lambda_r x^{(r)})\big|_\Lambda = \prod_{\alpha,\beta}(\lambda_0 x^{(0)}_{\alpha\beta} + \cdots + \lambda_r x^{(r)}_{\alpha\beta})^{n_{\alpha\beta}}_{|\Lambda} = \prod_{\alpha,\beta}(\lambda_\alpha y_\beta)^{n_{\alpha\beta}} \ ,$$

de sorte que $g_{\mathrm{I}}\big|_\Lambda$ est le monôme $\prod_\beta y_\beta^{\sum_\alpha n_{\alpha\beta}}$ si $\sum_\beta n_{\alpha\beta} = i_\alpha$ pour tout α, et est nul sinon. Il reste à montrer que si $\mathrm{I} = (i_0,\dots,i_r)$ est fixé dans $\mathcal{I}_{d-1}$, et si $n_0,\dots,n_{r(\mathbf{D})}$ sont des entiers positifs de somme $d-1$, il existe des entiers positifs $n_{\alpha\beta}$ avec $\sum_\alpha n_{\alpha\beta} = n_\beta$ et $\sum_\beta n_{\alpha\beta} = i_\alpha$ pour tous α et β, ce pour quoi il suffit de se donner deux partitions d'un ensemble à n éléments en parties $(\mathrm{A}_\alpha)_{0\le\alpha\le r}$ et $(\mathrm{B}_\beta)_{0\le\beta\le r(\mathbf{D})}$ de cardinaux respectifs i_α et n_β, et de prendre pour $n_{\alpha\beta}$ le cardinal de $\mathrm{A}_\alpha \cap \mathrm{B}_\beta$. ∎

Pour montrer la surjectivité de Ω_d, il suffit donc de montrer celle de l'application

$$\begin{array}{rcl} \left(\mathrm{E}^{\mathcal{I}_{d-1}}\right)^{r+1} & \longrightarrow & \mathrm{E}^{\mathcal{I}_d} \\ ((g^{(0)}_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}},\dots,(g^{(r)}_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}}) & \longmapsto & \left(g^{(0)}_{\mathrm{J}-\{\epsilon_0\}} + \cdots + g^{(r)}_{\mathrm{J}-\{\epsilon_r\}}\right)_{\mathrm{J}\in\mathcal{I}_d} \end{array}$$

où E est l'espace vectoriel $\Gamma_{\Lambda_1}(d-1)$; cela se fait sans difficulté pour n'importe quel espace vectoriel E par récurrence sur r.

On a montré que toutes les applications Ω_{d_i}, donc aussi l'application β, sont surjectives. Si $(r+1)(n+1)-1 \ge n(\mathbf{D})$, on peut appliquer le théorème 7.1 pour conclure que F est unirationnelle, donc aussi $\mathrm{F}_r(\mathrm{X})$; ceci termine la démonstration du théorème. ∎

RÉFÉRENCES

[AK] A. Altman, S. Kleiman : *Foundations of the theory of Fano schemes*, Comp. Math. **34** (1977), 3–47.

[BVV] W. Barth, A. Van de Ven : *Fano varieties of lines on hypersurfaces*, Arch. Math. **31** (1978), 96-104.

[BD] A. Beauville, R. Donagi : *La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension* 4, C.R.A.S., t. 301, Série I (1985), 703–706.

[BS] S. Bloch, V. Srinivas : *Remarks on correspondences and algebraic cycles*, Am. J. of Math. **105** (1983), 1235–1253.

[BV] L. Bonavero, C. Voisin : *Schémas de Fano et variétés de Moishezon*, C.R.A.S., t. 323, Série I (1996), 1019–1024.

[B1] C. Borcea : *Deforming varieties of k-planes of projective complete intersections*, Pacific J. Math. **143** (1990), 25–36.

[B2] C. Borcea : *Homogeneous Vector Bundles and Families of Calabi-Yau Threefolds. II*, in Several Complex Variables and Complex Geometry (Santa Cruz 1989), Part 2, Proc. Symp. Pure Math. **52** (1991), 83–91.

[Bo] R. Bott : *Homogeneous vector bundles*, Ann. Math. **66** (1957), 203–248.

[C1] F. Campana : *Remarques sur le revêtement universel des variétés kähleriennes compactes*, Bull. S.M.F. **122** (1994), 255–284.

[C2] F. Campana : *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sci. E.N.S. **25** (1992), 539–545.

[Ch] X. Chen : *Unirationality of Fano Varieties*, Duke Math. J. **90** (1997), 63–71.

[CTSSD] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, P. Swinnerton-Dyer : *Intersection of two quadrics and Châtelet surfaces. I*, J. reine angew. Math. **373** (1987), 37–107.

[D] O. Debarre : *Théorèmes de connexité pour les produits d'espaces projectifs et les grassmanniennes*, Am. J. of Math. **118** (1996), 1347–1367.

[D2] O. Debarre : Sur la cohomologie de $\mathrm{N}(r,d)$, in *Modules des Fibrés Stables sur les Courbes Algébriques*, éditeurs J.-L. Verdier et J. Le Potier. Progress in Mathematics 54, Birkhäuser (1985), 105–128.

[De] M. Demazure : *A very simple proof of Bott's theorem*, Invent. Math. **33** (1976), 271–272.

[DR] U. Desale, S. Ramanan : *Classification of Vector Bundles of Rank* 2 *on Hyperelliptic Curves*, Invent. Math. **38** (1976), 161–185.

[ELV] H. Esnault, M. Levine, E. Viehweg : *Chow groups of projective varieties of very small degrees*, Duke Math. J. **87** (1997), 29–58.

[F] G. Fano : *Sul sistema ∞^2 di rette contenuto in una varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni*, Atti Reale Accad. Sci. Torino **39** (1904), 778–792.

[Fu] W. Fulton : Intersection theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **2**, Springer Verlag, Berlin, 1984.

[FH] W. Fulton, J. Harris : Representation theory, Graduate Text in Mathematics **129**, Springer Verlag, Berlin, 1991.

[H] D. Husemoller : Fibre bundles, 2nd ed., Graduate Text in Mathematics **20**, Springer Verlag, Berlin, 1966.

[J] U. Jannsen : *Motivic Sheaves and Filtrations on Chow Groups*, in Motives (Seattle, 1991), Part 1, Proc. Symp. Pure Math. **55** (1994), 245–302.

[K] J. Kollár : Rational Curves on Algebraic Varieties, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **32**, Springer Verlag, Berlin, 1996.

[KMM1] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori : *Rationally Connected Varieties*, J. Alg. Geom. **1** (1992), 429–448.

[KMM2] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori : *Rational Connectedness and Boundedness of Fano Manifolds*, J. Diff. Geom. **36** (1992), 765–769.

[M] I.G. Macdonald : Symmetric functions and Hall polynomials, Clarendon Press, Oxford, 1979.

[Ma1] L. Manivel : *Théorèmes d'annulation pour les fibrés associés à un fibré ample*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **19** (1992), 515–565.

[Ma2] L. Manivel : *Applications de Gauss et pléthysme*, Ann. Inst. Fourier **47**, 3 (1997), 715-773.

[Mu] J. Murre : *Discussion of a theorem of Morin*, notes de séminaire « Argomenti di Geometrica Algebrica », Povo, Trento, 1979.

[N] P.E. Newstead : *Rationality of moduli spaces of stable bundles*, Math. Ann. **215** (1975), 251–268.

[P] K. Paranjape : *Cohomological and cycle-theoretic connectivity*, Ann. Math. **139** (1994), 641–660.

[PS] K. Paranjape, V. Srinivas : *Unirationality of the general Complete Intersection of small multidegree*, in Flips and Abundance for Algebraic Threefolds, ed. J. Kollár, Astérisque **211** (1992), 241–248.

[Pr] A. Predonzan : *Intorno agli* S_k *giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **5** (1948), 238–242.

[R] S. Ramanan : *The moduli spaces of vector bundles over an algebraic curve*, Math. Ann. **200** (1973), 69–84.

[Ra] L. Ramero : *Effective bounds for unirationality of complete intersections*, Manuscr. Math. **68** (1990), 435–445.

[Sz] A. Szenes : *Verification of Verlinde's formulas for* $\mathrm{SU}(2)$, Internat. Math. Res. Notices **7** (1991), 93–98.

[S] A. Sommese : *Complex Subspaces of Homogeneous Complex Manifolds II—Homotopy Results*, Nagoya J. Math. **86** (1982), 101–129.

[vW] B.L. van der Waerden : *Zur algebraischen Geometrie 2. Die geraden Linien auf den Hyperflächen des* $\mathbf{P}_n$, Math. Ann. **108** (1933), 253–259.