C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, p. 887–892, 2000
Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Sur les intersections complètes réelles

Olivier DEBARRE [a], Laurent MANIVEL [b]

[a] Irma, Université Louis-Pasteur, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France
Courriel : debarre@math.u-strasbg.fr

[b] Institut Fourier, Université Joseph-Fourier, B.P. 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères cedex, France
Courriel : Laurent.Manivel@ujf-grenoble.fr

(Reçu le 26 septembre 2000, accepté le 2 octobre 2000)

Résumé. Soit X une sous-variété algébrique réelle de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Nous montrons que si n est assez grand devant les degrés des équations qui définissent X, ces degrés étant supposés impairs, la variété des r-plans réels contenus dans X est non vide et de la dimension attendue. Cette variété peut cependant ne pas être connexe, et les r-plans qu'elle paramètre peuvent ne couvrir qu'un sous-ensemble semi-algébrique propre de X d'intérieur non vide. En revanche, il passe par un point général de X une conique réelle contenue dans X. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On real complete intersections

Abstract. *Let X be a real algebraic subvariety of $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. We prove that if n is large enough with respect to the degrees of the equations defining X, these degrees being odd, the variety of real r-planes contained in X is not empty and has the expected dimension. This variety can be disconnected, and the r-planes it parametrizes may cover only a proper semi-algebraic subset of X with a non-empty interior. However, through a general point of X passes a real conic contained in X.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

A real projective variety with a defining equation of even degree may very well contain no line. We prove that if the degrees of the defining equations are all odd, there are "as many" real lines as complex lines.

PROPOSITION 1. – *Let $\mathbf{e}$ be a sequence of positive integers and let X be a subvariety of $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ whose defining equations have multidegree $2\mathbf{e}-1$. If*

$$n-r \geqslant \sum_{j\leqslant r/2} \binom{r}{2j}\binom{\mathbf{e}-j-1+r}{r},$$

Note présentée par Jean-Pierre DEMAILLY.

S0764-4442(00)01721-3/FLA

the variety $F_r(X)$ of real r-planes contained in X is not empty, and its (*real*) *dimension is at least equal to the expected dimension $\delta(n, 2\mathbf{e}-1, r)$.*

See the French version for the notation. To prove this proposition, we note that $F_r(X_{\mathbb{C}})$ is the zero locus of a section of a vector bundle on a Grassmann variety. We compute the top Chern class of this vector bundle and we check that for n large enough, it is non-zero mod 2, which implies the non-emptiness of $F_r(X)$. The assertion on the dimension easily follows.

Contrary to the complex case, $F_r(X)$ may be disconnected even when the expected dimension is positive. Moreover, the locus in X covered by real r-planes can very well be a proper subset of X with non-empty interior.

We illustrate this with the case of real cubic hypersurfaces in $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$, whose equation has the form $x_0^3 + P(x_1, \ldots, x_4) = 0$, where the polynomial P defines a smooth cubic surface in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. These hypersurfaces are quite special, in particular they are homeomorphic to $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. By [1], $F_1(X_{\mathbb{C}})$ is smooth of dimension 5 and $X_{\mathbb{C}}$ is uniruled. We check that $F_1(X)$ is also smooth and connected. The real lines cover a semi-algebraic closed subset of X with non-empty interior, but we prove that they do cover the whole of X only in a very special case.

PROPOSITION 3. – *A smooth real cubic hypersurface X in $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ with equation $x_0^3 + P(x_1, \ldots, x_4) = 0$ is uniruled by real lines if and only if the cubic surface defined by P is equianharmonic.*

Recall from [5] that the *equianharmonic* cubic surface has equation $x_1x_2(x_1+x_2) + x_3x_4(x_3+x_4) = 0$ in suitable coordinates. To prove this proposition, we use the existence of *elliptic* points on X, that is, points at which the Hessian of the defining equation is a definite quadratic form. Obviously, there can be no line contained in X passing through an elliptic point.

We check in Proposition 2 that if the surface $P = 0$ has an elliptic point, this also holds true for X. Then we use the assertion of [5], § 108, p. 162, that every smooth real cubic surface has elliptic points, except the Clebsch cubic, whose equation is $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3$ in suitable coordinates, and the equianharmonic cubic. In the former case, we nevertheless find an elliptic point on X. In the latter case, a careful study is needed to prove that X is indeed uniruled.

Finally, we prove the following result about *real conics* through a general point of a real variety.

PROPOSITION 4. – *Let X be a subvariety of $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ defined by real general equations of multidegree $\mathbf{d}$ such that $|\mathbf{d}| < n$. Through a general point of X passes a smooth real conic or a real line contained in X.*

1. Espaces linéaires contenus dans une variété réelle

Il est clair qu'une variété réelle projective dont l'une des équations qui la définit est de degré pair peut très bien ne contenir aucune droite. Nous allons voir que dans le cas contraire, il y a « autant » de droites réelles que de droites complexes.

On adopte les notations suivantes : pour toute suite finie $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_s)$ d'entiers positifs et tout entier positif r, on note

$$|\mathbf{d}| = \sum_{i=1}^{s} d_i, \quad \mathbf{d} + r = (d_1 + r, \ldots, d_s + r), \quad \mathbf{d}^r = \sum_{i=1}^{s} d_i^r, \quad \binom{\mathbf{d}}{r} = \sum_{i=1}^{s} \binom{d_i}{r}$$

et

$$\delta(n, \mathbf{d}, r) = (r+1)(n-r) - \binom{\mathbf{d}+r}{r}.$$

C'est la « dimension attendue » de la famille des r-plans contenus dans une sous-variété de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ définie par des équations de multidegré $\mathbf{d}$ ([2], th. 2.1).

PROPOSITION 1. – *Soient $\mathbf{e}$ une suite d'entiers positifs et X une sous-variété de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ définie par des équations réelles de multidegré $2\mathbf{e}-1$. Si*

$$n-r \geqslant \sum_{j\leqslant r/2} \binom{r}{2j}\binom{\mathbf{e}-j-1+r}{r},$$

la variété $F_r(X)$ des r-plans réels contenus dans X n'est pas vide et sa dimension (réelle) est au moins égale à $\delta(n, 2\mathbf{e}-1, r)$.

Démonstration. – Posons $\mathbf{d} = 2\mathbf{e}-1$ et introduisons comme dans [2] des polynômes à $r+1$ variables

$$Q_{r,d}(x) = \prod_{a_0+\cdots+a_r=d} (a_0x_0+\cdots+a_rx_r),$$

puis $Q_{r,\mathbf{d}}(x) = Q_{r,d_1}(x)\cdots Q_{r,d_s}(x)$, qui est homogène de degré $N(\mathbf{d},r) = \binom{\mathbf{d}+r}{r}$.

La variété $F_r(X_{\mathbb{C}})$ est le lieu des zéros d'une section d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang $N(\mathbf{d},r)$ sur la Grassmannienne $\mathbb{G}(r,\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$. On a montré dans [2], Prop. 4.4, que si l'on écrit $Q_{r,\mathbf{d}}(x) = \sum_\alpha q_\alpha x^\alpha$, les coefficients de la décomposition $\mathrm{c}_{r,\mathbf{d}} = \sum_{|\lambda|=N(\mathbf{d},r)} f_\lambda \sigma_\lambda$ de la classe de Chern de degré maximal de $\mathcal{E}$ sur les classes des cycles de Schubert, où l'on note σ_λ la classe du cycle de codimension $|\lambda|$ associé à la partition $\lambda = (\lambda_0,\ldots,\lambda_r)$, sont donnés par la formule

$$f_\lambda = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{r+1}} \varepsilon(\sigma) q_{\sigma(\lambda+\kappa)-\kappa},$$

où κ désigne la suite $(r,\ldots,1,0)$.

Pour montrer que $F_r(X)$ n'est pas vide et de dimension réelle au moins égale à $(r+1)(n-r)-N(\mathbf{d},r)$, il suffit de montrer que pour une partition λ_0, le coefficient f_{λ_0} est *impair*. En effet, si c'est le cas, et si Σ est un cycle de Schubert réel d'intersection 1 avec σ_{λ_0}, la classe de Stiefel–Whitney de degré maximal de la restriction de $\mathcal{E}$ à Σ est alors non nulle. Ceci signifie que toute section de $\mathcal{E}|_\Sigma$ a un zéro, ou encore que $F_r(X)$ rencontre Σ, donc aussi toute image de Σ par l'action de groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. La restriction $\rho : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\times\Sigma \to \mathbb{G}(r,\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})$ de l'action du groupe est $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-équivariante. En particulier,

$$\dim\bigl(\rho^{-1}\bigl(F_r(X)\bigr)\bigr) = \dim\bigl(F_r(X)\bigr) + \dim\bigl(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\bigr) + \dim(\Sigma) - \dim\bigl(G\bigl(r,\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}\bigr)\bigr).$$

On vient de voir que $\rho^{-1}(F_r(X))$ se projette surjectivement sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, donc est de dimension plus grande. Cela montre les propriétés cherchées.

Il nous reste à montrer que sous les hypothèses du théorème, au moins un des f_λ est impair. Dans chaque terme du produit définissant le polynôme $Q_{r,2e-1}$, l'ensemble I des indices i pour lesquels a_i est impair a un nombre impair d'éléments puisque la somme des a_i est impaire. À I fixé, il y a $\binom{\frac{2e-1-|I|}{2}+r}{r}$ termes. On a donc

$$Q_{r,2e-1}(x) \equiv \prod_{0\leqslant j\leqslant r/2}\ \prod_{\substack{I\subset\{0,\ldots,r\}\\ \mathrm{Card}(I)=2j+1}} \Bigl(\sum_{i\in I} x_i\Bigr)^{\binom{e-j-1+r}{r}} \mod 2.$$

Dans le second produit, le plus grand terme dans l'ordre lexicographique est $x_0^{s(j,0)}x_1^{s(j,1)}\cdots x_{r-2j}^{s(j,r-2j)}$ avec $s(j,k) = \binom{r-k}{2j}$, *et son coefficient vaut* 1. Cela entraîne que le plus grand monôme de $Q_{r,2e-1}$ modulo 2 dans l'ordre lexicographique est

$$\prod_{j\leqslant r/2}\left(x_0^{s(j,0)}x_1^{s(j,1)}\cdots x_{r-2j}^{s(j,r-2j)}\right)^{\binom{e-j-1+r}{r}}=\prod_{i=0}^{r}x_i^{\sum_{2j\leqslant r-i}\binom{r-i}{2j}\binom{e-j-1+r}{r}}.$$

Notons a_i l'exposant de x_i dans ce produit. Comme $(a_0,\ldots,a_r)$ est la plus grande suite d'exposants classés en ordre décroissant qui apparaît dans $Q_{r,2e-1}$ modulo 2, il s'ensuit que $f_{a_0,\ldots,a_r}$ est impair. La classe correspondante $\sigma_{a_0,\ldots,a_r}$ est non nulle dans la Grassmannienne dès que

$$n-r\geqslant\sum_{j\leqslant r/2}\binom{r}{2j}\binom{e-j-1+r}{r}.$$

Ceci termine la démonstration. □

Remarque. – Sous les hypothèses du théorème, lorsque X est de plus générale, la variété $F_r(X)$ est lisse de dimension exactement $\delta(n,2\mathbf{e}-1,r)$, puisque $F_r(X_{\mathbb{C}})$ a la même propriété ([2], th. 2.1.b)).

En revanche, il se peut très bien que $F_r(X)$ ne soit pas connexe (alors que $F_r(X_{\mathbb{C}})$ l'est dès que sa dimension attendue est strictement positive), comme le montre l'exemple suivant, dû à V. Kharlamov. Soit X l'hypersurface cubique d'équation homogène $x_0(x_0^2+x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)=0$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, avec $n\geqslant 4$. Elle est réunion d'un hyperplan H et d'une quadrique Q contenant une famille lisse connexe de dimension $2n-5$ de droites dont aucune n'est contenue dans H : la variété $F_1(X)$ a deux composantes connexes. On peut rendre X lisse en ajoutant à son équation un petit multiple de l'équation d'une cubique lisse C contenant une droite contenue dans Q. Cette droite reste contenue dans X, ainsi que toutes les droites contenues dans $C\cap H$, de sorte que $F_1(X)$ reste non connexe.

2. Le cas des hypersurfaces cubiques

Soit X une hypersurface cubique réelle lisse dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, avec $n\geqslant 4$. La variété $F_1(X_{\mathbb{C}})$ est *lisse* de dimension $2n-3$ ([1], Prop. 5), donc aussi $F_1(X)$ par la proposition. De plus, la variété complexe $X_{\mathbb{C}}$ est uniréglée en droites, c'est-à-dire qu'il passe par chaque point de $X_{\mathbb{C}}$ une droite contenue dans $X_{\mathbb{C}}$ ([2], th. 5.1). En d'autres termes, la variété $I_{\mathbb{C}}=\{(p,\Lambda)\in X_{\mathbb{C}}\times\mathbb{G}(r,\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})\mid p\in\Lambda\subset X_{\mathbb{C}}\}$ est lisse et la première projection $\pi: I_{\mathbb{C}}\to X_{\mathbb{C}}$ est surjective. Au-dessus d'un point général de X, la différentielle de π est surjective, donc aussi celle de la projection $I\to X$. Il s'ensuit que la réunion des droites réelles contenues dans X est un fermé semi-algébrique *d'intérieur non vide* [1] .

Ce fermé peut très bien être distinct de X : pour la cubique de Fermat d'équation $x_0^3+\cdots+x_n^3=0$, la Hessienne en un point $p=(1,x_1,\ldots,x_n)$ est la restriction de la forme quadratique $x_1t_1^2+\cdots+x_nt_n^2$ à l'hyperplan $x_1^2t_1+\cdots+x_n^2t_n=0$. Lorsque tous les x_i sont strictement négatifs, celle-ci est définie négative et le point p est elliptique sur X ; la cubique de Fermat n'est donc pas uniréglée en droites réelles. On montre plus généralement le résultat suivant.

PROPOSITION 2. – *Si le polynôme $P(x_1,\ldots,x_n)$ définit une cubique lisse avec des points elliptiques, il en est de même du polynôme $x_0^3+P(x_1,\ldots,x_n)$.*

Remarque. – Ces hypersurfaces cubiques de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ sont très particulières ; elles sont par exemple homéomorphes à $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. – Soit X la cubique d'équation $P(x)=0$, soit S la cubique définie par $x_0=P(x)=0$ et soit p un point *elliptique* sur S. On fait tous les calculs dans l'ouvert défini par $x_n=1$ avec les coordonnées $(x_0,\ldots,x_{n-1})$; on peut supposer $p=(0,\ldots,0)$ et

$$P(x_1,\ldots,x_{n-1},1)=x_1+\left(x_1P_1(x_1,\ldots,x_{n-1})+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\right)+P_3(x_1,\ldots,x_{n-1}),$$

où P_j est un polynôme homogène de degré j. Pour ε petit, considérons le point

$$p(\varepsilon)=\left(\varepsilon\sqrt[3]{1-\varepsilon^3P_1(1,0,\ldots,0)+\varepsilon^6P_3(1,0,\ldots,0)},-\varepsilon^3,0,\ldots,0\right)$$

de X voisin de p. Au premier ordre, on a $p(\varepsilon)=(\varepsilon,0,\ldots,0)$, l'espace tangent est défini par $x_1=0$ et la Hessienne est $6\varepsilon t_0^2+t_2^2+\cdots+t_{n-1}^2$. Elle est donc définie positive pour ε petit strictement positif. □

Remarque. – On peut aisément déterminer les droites contenues dans X et passant par un point $(0,x)$ de S ; elles s'écrivent

$$\left\{(-\beta\sqrt[3]{-P(y)},\alpha x+\beta y)\mid(\alpha,\beta)\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}\right\}\quad\text{avec}\quad \mathrm{d}P(x)(y)=\mathrm{d}^2P(x)(y)=0.$$

En d'autres termes, la droite xy dans $\mathbb{P}^{n-1}$ a un contact d'ordre 3 en x avec S. Pour qu'il existe une telle droite, il faut et il suffit que le point x ne soit pas elliptique sur S. L'application rationnelle $F_1(X)_{\mathbb{C}}\dashrightarrow S_{\mathbb{C}}$, qui associe à une droite contenue dans X mais pas dans S son point d'intersection avec l'hyperplan $x_0=0$, se prolonge à un morphisme après éclatement de la sous-variété lisse $F_1(S)_{\mathbb{C}}$ de codimension 2 dans $F_1(X)_{\mathbb{C}}$.

Lorsque $n=4$, la partie réelle de l'éclaté de $F_1(X)_{\mathbb{C}}$ est ainsi revêtement double du lieu des points hyperboliques de S, ramifié sur le lieu des points paraboliques. Le lieu hyperbolique est toujours connexe ([5], § 73, p. 106 ; § 79, p. 116 ; § 83, p. 123) ; il en est donc de même pour $F_1(X)$.

Si l'on en croit [5], § 108, p. 162, toutes les surfaces réelles cubiques lisses ont des points elliptiques, à l'exception de la cubique de Clebsch, d'équation

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=(x_1+x_2+x_3+x_4)^3,$$

et de la cubique « équianharmonique », d'équation

$$x_1x_2(x_1+x_2)+x_3x_4(x_3+x_4)=0.$$

On vérifie que le point $(1,\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)$, avec $\lambda=1/\sqrt[3]{60}$ est elliptique sur le solide cubique d'équation $x_0^3+x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=(x_1+x_2+x_3+x_4)^3$. En revanche, on obtient à partir de la seconde équation un solide cubique uniréglé en droites.

PROPOSITION 3. – *Une hypersurface cubique lisse réelle dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ dont l'équation peut s'écrire $x_0^3+P(x_1,\ldots,x_4)=0$ est uniréglée en droites réelles si et seulement si la surface cubique définie par P est équianharmonique.*

Démonstration. – Compte tenu des remarques précédentes, il nous faut démontrer que l'hypersurface X de $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ d'équation $x_0^3+x_1x_2(x_1+x_2)+x_3x_4(x_3+x_4)=0$ est uniréglée en droites réelles. D'après les remarques qui viennent d'être faites, le lieu des points p de X par lesquels passe une droite réelle est non vide et contient la surface S. Plaçons-nous en un point hors de S et supposons $x_0=1$. Une droite passant par un tel point est donnée par un point d'intersection de la quadrique $x_2t_1^2+x_1t_2^2+2(x_1+x_2)t_1t_2+x_4t_3^2+x_3t_4^2+2(x_3+x_4)t_3t_4=0$ et de la cubique $t_1t_2(t_1+t_2)+t_3t_4(t_3+t_4)=0$ dans le plan projectif d'équation $x_2(x_2+2x_1)t_1+x_1(x_1+2x_2)t_2+x_4(x_4+2x_3)t_3+x_3(x_3+2x_4)t_4=0$. Notons Q_x et C_x cette quadrique et cette cubique planes.

L'idée de la démonstration est simplement qu'un point d'intersection transverse de Q_x et C_x doit persister localement. Pour démontrer que X est uniréglée, il suffit donc de vérifier qu'en un point par où passe une droite multiple (correspondant à une intersection non transverse de la quadrique et de la cubique précédentes) passe également une droite simple, ou au moins une droite qui subsiste localement. Pour ce faire, on vérifie d'abord qu'un point par lequel passe une droite multiple est tel que $x_1x_2(x_1+x_2)=0$ ou $x_3x_4(x_3+x_4)=0$. On peut donc supposer, quitte à changer de coordonnées, $x_4=0$. L'intersection de cet hyperplan avec X contient un point de S en lequel on s'assure que passe une droite simple. Enfin, cette droite ne peut devenir multiple qu'en un autre point de S, ou bien en un point tel que $x_3 = x_4 = 0$. Dans les deux cas, on s'assure qu'il existe une droite passant par x qui persiste localement. $\square$

3. Coniques contenues dans une variété réelle

PROPOSITION 4. – *Soit X une sous-variété de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ définie par des équations réelles* générales *de multidegré $\mathbf{d}$ vérifiant $|\mathbf{d}| < n$. Par tout point* général *de X passe une conique réelle lisse ou une droite réelle contenue dans X.*

Démonstration. – Par [2], th. 5.1, passent par chaque point x de X une droite complexe D^+ et sa conjuguée D^-. On considére en suivant [3] trois courbes rationnelles C_0, C^+ et C^-, puis la courbe nodale C obtenue en identifiant le point $(1, \pm i)$ sur C_0 avec le point $(1, 0)$ sur $C^\pm$ et le morphisme $f : C \to X_{\mathbb{C}}$ défini en contractant C_0 sur x et en envoyant $C^\pm$ sur $D^\pm$. Ce morphisme est *défini sur* $\mathbb{R}$.

Soit T une courbe affine réelle lisse avec un point réel t_0, et soit $S \to T \times \mathbb{P}^1$ l'éclatement des points $(t_0, (1, i))$ et $(t_0, (1, -i))$, de sorte que la fibre en t_0 de $h : S \to T$ s'identifie à C.

D'après [4], pour X et D^+ générales, le fibré vectoriel $T_X|_{D^\pm}$ est isomorphe à

$$\mathcal{O}_{D^\pm}(2) \oplus \mathcal{O}_{D^\pm}(1)^{\oplus(d-1)} \oplus \mathcal{O}_{D^\pm}^{\oplus(n-1-d)}.$$

Comme $f^*\mathrm{T}_X|_{C_0}$ est trivial, il ressort du lemme 2.4 de [3] que $\mathrm{H}^1(C, f^*\mathrm{T}_X(-p))$ s'annule, où p désigne le point $(t_0, (1, 0))$ de S. On peut appliquer la proposition 2.2 de [3] avec le sous-schéma $Z = T \times \{(1, 0)\}$ de S : il existe une courbe lisse T' avec un point réel t'_0, un morphisme étale $T' \to T$ envoyant t'_0 sur t_0 et un T'-morphisme $S \times_T T' \to X \times T'$ prolongeant f et contractant Z sur x. Si on choisit un point réel de T' autre que t'_0, on obtient une déformation lisse réelle de la courbe $D^+ \cup D^-$ passant par x, qui fournit la conique cherchée. $\square$

---

[1] On peut faire le même raisonnement avec n'importe quelle variété réelle X comme dans la proposition, dès que l'on sait que $F_r(X_{\mathbb{C}})$ a la dimension attendue.

Références bibliographiques

[1] Barth W., Van de Ven A., Fano varieties of lines on hypersurfaces, Arch. Math. 31 (1978) 96–104.

[2] Debarre O., Manivel L., Sur la variété des espaces linéaires contenus dans une intersection complète, Math. Ann. 312 (1998) 549–574.

[3] Kollár J., Rationnaly connected varieties over local fields, Ann. Math. 150 (1999) 357–367.

[4] Kollár J., Rational Curves on Algebraic Varieties, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[5] Segre B., The Non-Singular Cubic Surfaces, Oxford University Press, Oxford, 1942.