

SUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES DONT LE DIVISEUR THETA EST SINGULIER EN CODIMENSION 3

OLIVIER DEBARRE

Introduction. Dans leur article [A–M], Andreotti et Mayer introduisent les sous-ensembles suivants de l'espace des modules \mathcal{A}_g des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g : pour $0 \leq k \leq g - 2$, \mathcal{N}_k^g est le lieu des variétés abéliennes principalement polarisées (A, Θ) avec $\dim \text{Sing } \Theta \geq k$.

Si on note $\mathcal{J}_g \subset \mathcal{A}_g$ le lieu des jacobiniennes des courbes lisses de genre g , leur résultat principal peut s'énoncer ainsi:

THÉORÈME (Andreotti–Mayer). *Pour $g \geq 4$, l'adhérence $\bar{\mathcal{J}}_g$ de \mathcal{J}_g dans \mathcal{A}_g est une composante irréductible de \mathcal{N}_{g-4}^g .*

Les ensembles \mathcal{N}_k^g seront étudiés aussi par la suite par Beauville dans [Be 1]. Si on note $\theta_{\text{null}, g}$ le lieu des variétés abéliennes principalement polarisées (A, Θ) de dimension g avec Θ symétrique telles que $\text{Sing } \Theta$ contienne un point d'ordre 2, il montre par exemple:

THÉORÈME (Beauville). *Le diviseur \mathcal{N}_0^4 de \mathcal{A}_4 a deux composantes irréductibles, à savoir $\bar{\mathcal{J}}_4$ et $\theta_{\text{null}, 4}$.*

Il étudie aussi \mathcal{N}_1^5 . Sa méthode consiste à généraliser la construction classique des variétés de Prym en permettant des courbes singulières. En particulier, toutes les variétés abéliennes principalement polarisées de dimension au plus 5 sont alors des variétés de Prym généralisées, pour lesquelles on a une description géométrique.

Mumford utilisera plus tard \mathcal{N}_0^g , dont Beauville a remarqué dans [Be 1] que c'est un diviseur de \mathcal{A}_g , pour montrer dans [Mu 1] que \mathcal{A}_g est de type général pour $g \geq 7$.

Smith et Varley ont montré dans [S–V] le résultat suivant:

THÉORÈME (Smith–Varley). *Le diviseur \mathcal{N}_0^5 de \mathcal{A}_5 a deux composantes irréductibles, dont l'une est $\theta_{\text{null}, 5}$.*

Enfin, Beauville et moi-même avons montré dans [B–D] le résultat suivant (rappelons que chacune des propriétés (i), (ii), (iii) ci-dessous est satisfaite par les

Received April 12, 1986. Revision received November 13, 1987.

jacobiennes de courbes):

THÉOREME (Beauville–Debarre). *Si une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) satisfait à l'une des propriétés suivantes:*

(i) *Il existe trois éléments non nuls a, x et y de A , distincts deux à deux, vérifiant: $\Theta \cdot \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.*

(ii) *L'hypothèse de Novikov est vérifiée.*

(iii) *La variété de Kummer associée admet une trisécante.*

Alors (A, Θ) est dans \mathcal{N}_{g-4}^g , avec $g = \dim A$.

Ce résultat justifie une étude plus approfondie des ensembles \mathcal{N}_{g-4}^g , qu'on entreprend ici pour $g \geq 5$.

Le point de départ est le théorème 4.10 de [Be 1], qui dresse la liste de toutes les variétés de Prym généralisées qui sont dans \mathcal{N}_{g-4}^g . La construction tétragonale de Donagi permet de réduire cette liste ([Do], 7.2). Ensuite, en utilisant la méthode d'Andreotti et Mayer ([A–M], 5.4.3, 5.4.5) ou les dégénérescences de rang 1 des variétés abéliennes ([Mu 1], 5.6.1), on montre que les familles ainsi construites sont des composantes irréductibles de \mathcal{N}_{g-4}^g . Ceci constitue la première partie de cet article. On montre aussi (cf. [We 1]):

THÉOREME (5.2.5). *Pour $g \geq 6$, les variétés de Prym sont dans \mathcal{N}_{g-6}^g .*

Ce résultat sera précisé dans un article ultérieur, dans lequel nous montrerons que pour $g \geq 7$, l'ensemble des variétés de Prym est une composante irréductible de \mathcal{N}_{g-6}^g .

Il apparaît que certaines variétés de Prym qui sont dans \mathcal{N}_{g-4}^g sont des cas particuliers d'une construction très simple, qui fait l'objet de la seconde partie.

Cette construction (cf. §9) permet d'associer à toute paire de variétés abéliennes polarisées de même type δ (cf. §1), et de dimensions respectives g' et g'' , une variété abélienne principalement polarisée isogène à leur produit, donc en particulier de dimension $g' + g''$. On note $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$ la sous-variété de $\mathcal{A}_{g'+g''}$ ainsi construite.

Pour $g'' \geq g' \geq \deg \delta$, $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$ est une sous-variété de $\mathcal{N}_{g-2 \deg \delta}^g$ et en est même une composante irréductible dans certains cas (cf. 12.5). On obtient ainsi de nouvelles composantes de \mathcal{N}_{g-4}^g , \mathcal{N}_{g-6}^g et \mathcal{N}_{g-8}^g .

On obtient aussi le résultat annexe suivant:

THÉOREME (10.12). *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension $g \geq 2$. Alors, pour tout élément de torsion non nul a de A , $\Theta \cdot \Theta_a$ est lisse de codimension 2, irréductible pour $g \geq 3$. En particulier, si Θ est symétrique, les seuls points de torsion sur Θ sont d'ordre 2.*

Nos résultats sur \mathcal{N}_{g-4}^g peuvent se résumer ainsi:

THÉOREME (4.1, 12.5, et 13.2). *Pour $g \geq 5$, les sous-ensembles suivants de \mathcal{A}_g sont des composantes irréductibles distinctes de \mathcal{N}_{g-4}^g :*

• *L'adhérence du lieu des jacobiennes des courbes lisses de genre g . Sa dimension est $3g - 3$.*

- L'adhérence $\mathcal{E}_{g,0}$ du lieu des variétés de Prym correspondant aux revêtements doubles admissibles des courbes obtenues à partir d'une courbe hyperelliptique lisse de genre $g - 1$ en identifiant deux paires de points. Sa dimension est $2g$.

- L'adhérence $\mathcal{E}_{g,1}$ du lieu des variétés de Prym correspondant aux revêtements doubles admissibles des courbes réunion d'une courbe rationnelle et d'une courbe hyperelliptique lisse de genre $g - 2$ se coupant en 4 points. Sa dimension est $2g - 1$.

- Les familles $\mathcal{A}_{t, g-t}^2$ pour $2 \leq t \leq g/2$, de codimension $t(g - t)$ dans \mathcal{A}_g .

Toutes ces composantes, à part $\bar{\mathcal{J}}_g$, sont dans $\theta_{\text{null}, g}$ (5.2.3, 12.6).

De plus, pour $g = 5$, on obtient les 5 composantes irréductibles de \mathcal{N}_1^5 , à savoir $\bar{\mathcal{J}}_5$; $\mathcal{E}_{5,0}$; $\mathcal{E}_{5,1}$; $\mathcal{A}_{2,3}^2$ et $\mathcal{A}_{1,4}$ (produits de deux variétés abéliennes de dimensions 1 et 4), de dimensions respectives 12, 10, 9, 9, et 11.

En conclusion, on peut dire que beaucoup de problèmes restent ouverts dans l'étude des ensembles \mathcal{N}_k^g , en particulier celui de trouver toutes les composantes de \mathcal{N}_{g-4}^g pour $g \geq 6$.

Je tiens à remercier A. Beauville de l'aide et des encouragements qu'il m'a apportés, ainsi que de l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail. Je remercie aussi R. Donagi des explications qu'il m'a données sur un point particulier de cet article.

Terminologie et notations. On travaillera uniquement sur le corps \mathbb{C} des complexes. Une variété est un schéma réduit de type fini sur \mathbb{C} . Un point d'une variété sera toujours un point rationnel sur \mathbb{C} . Si F est un faisceau cohérent sur une variété projective X , on notera $h^i(X, F) = \dim H^i(X, F)$ pour $i \geq 0$. Si F est de plus inversible, on note $|F|$ le système linéaire des diviseurs effectifs D de X tels que $\mathcal{O}_X(D) \simeq F$ et $\phi_{|F|}: X \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(X, F)^\vee$ l'application rationnelle associée si $h^0(X, F) \geq 2$.

1. Variétés abéliennes. Pour toute variété abélienne A , on désigne par $A[2]$ le noyau de la multiplication par deux. On notera $\hat{A} = \text{Pic}^0 A$ le groupe des classes d'isomorphisme des faisceaux inversibles sur A algébriquement équivalents à 0. C'est une variété abélienne appelée variété abélienne duale de A ([Mu 6], page 74). A tout morphisme $f: A \rightarrow B$, on associe de façon fonctorielle un morphisme dual $\hat{f}: \hat{B} \rightarrow \hat{A}$.

Pour $a \in A$, on note τ_a l'automorphisme $x \mapsto x + a$ de A . Pour tout faisceau inversible L (resp. diviseur D) sur A , on écrira $L_a = \tau_{-a}^* L$ (resp. $D_a = \tau_{-a}^*(D) = D + a$).

Tout faisceau inversible L définit un morphisme de groupes ([Mu 6], page 59):

$$\phi_L: A \rightarrow \hat{A}$$

$$a \mapsto L_a \otimes L^{-1}$$

dont le noyau est noté $H(L) = \{a \in A \mid L \simeq L_a\}$.

L'ensemble $\mathcal{G}(L) = \{(a, \alpha) \mid a \in A, \alpha: L \xrightarrow{\sim} L_a\}$ admet une structure de groupe naturelle ([Mu 5], page 289) pour laquelle on a une suite exacte:

$$(1.1) \quad 1 \rightarrow \mathbf{C}^* \rightarrow \mathcal{G}(L) \xrightarrow{p} H(L) \rightarrow 0.$$

On définit une application bilinéaire alternée par:

$$e^L: H(L) \times H(L) \rightarrow \mathbf{C}^*$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 \cdot \tilde{x}_1^{-1} \cdot \tilde{x}_2^{-1} \quad \text{où } p(\tilde{x}_j) = x_j.$$

Par exemple, si $L \in \text{Pic}^0 A$ alors $H(L) = A$ ([Mu 6], page 74), $\mathcal{G}(L)$ est un groupe commutatif et $e^L \equiv 1$.

A l'opposé, si L est ample, $H(L)$ est fini, le centre de $\mathcal{G}(L)$ est \mathbf{C}^* et e^L est non-dégénérée ([Mu 7], Theorem 1, page 293). Il existe une suite d'entiers $\delta = (d_1, \dots, d_k)$, $k \leq g$, $1 < d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_k$, appelée type de L , telle que la suite (1.1) soit isomorphe à ([Mu 5], Corollary, page 294):

$$1 \rightarrow \mathbf{C}^* \rightarrow \mathcal{G}(\delta) \rightarrow H(\delta) \rightarrow 0$$

où

$$K(\delta) = \bigoplus_{i=1}^k \mathbf{Z}/d_i\mathbf{Z}, \quad \widehat{K(\delta)} = \text{Hom}(K(\delta), \mathbf{C}^*)$$

$$H(\delta) = K(\delta) \oplus \widehat{K(\delta)}, \quad \mathcal{G}(\delta) = \mathbf{C}^* \times K(\delta) \times \widehat{K(\delta)}$$

avec $(\alpha, x, l) \cdot (\alpha', x', l') = (\alpha\alpha'l'(x), x + x', ll')$.

L'entier $d = d_1 \dots d_k$ est le degré de L et vérifie, avec $g = \dim A$:

$$(1.2) \quad \forall n, i > 0 \quad h^0(A, L^{\otimes n}) = dn^g, \quad h^i(A, L^{\otimes n}) = 0.$$

$$(1.3) \quad \text{Si } L = \mathcal{O}_A(D), \quad D^g = d \cdot g!.$$

$$(1.4) \quad d^2 = \text{Card } H(L) = \text{Degré } \phi_L.$$

On notera \sim l'équivalence algébrique entre faisceaux inversibles sur A . Toutes les constructions précédentes, à savoir ϕ_L , $H(L)$, $\mathcal{G}(L)$, e^L , ne dépendent que de la classe d'équivalence algébrique de L .

Si L est ample, les faisceaux inversibles équivalents à L sont les translatés L_a , pour a élément de A . Une polarisation de type δ sur A est une classe d'équivalence de faisceaux inversibles amples de type δ . Par abus de langage, on notera encore L la polarisation définie par la classe de L . Une polarisation principale est

une polarisation L de degré 1. On notera alors généralement Θ le seul élément de $|L|$ (cf. 1.2), défini donc à translation près.

Si (A_1, L_1) et (A_2, L_2) sont deux variétés abéliennes polarisées, on notera $L_1 \boxtimes L_2$ la polarisation $\text{pr}_1^*L_1 \otimes \text{pr}_2^*L_2$ sur $A_1 \times A_2$, où $\text{pr}_j: A_1 \times A_2 \rightarrow A_j$, $j = 1, 2$, sont les deux projections.

On pose $\mathcal{H}_g = \{\tau \in \mathcal{M}_{g \times g}(\mathbb{C}) \mid \tau \text{ symétrique et } \text{Im } \tau \text{ définie positive}\}$. Pour tout "type" $\delta = (d_1, \dots, d_k)$, Δ_δ est la matrice diagonale $g \times g$ de diagonale $(1, \dots, 1, d_1, \dots, d_k)$ et J_δ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \Delta_\delta \\ -\Delta_\delta & 0 \end{pmatrix}$. Le groupe $\Gamma_g(\delta) = \{M \in \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}) \mid {}^tMJ_\delta M = J_\delta\}$ agit sur \mathcal{H}_g . Le quotient $\mathcal{A}_{g,\delta}$ est un espace analytique normal irréductible quasi-projectif de dimension $\binom{g+1}{2}$, qui est un espace de modules grossier pour les variétés abéliennes polarisées de dimension g et type δ ([Ig 2]).

Les fonctions $\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z, \tau)$ sont définies pour $a, b \in \mathbb{R}^g$, $z \in \mathbb{C}^g$, $\tau \in \mathcal{H}_g$ par:

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i [{}^t(n+a)\tau(n+a) + 2{}^t(n+a)(z+b)].$$

Si (A, L) est la variété abélienne polarisée de type δ correspondant à $\tau \in \mathcal{H}_g$, une base de $H^0(A, L)$ est donnée par:

$$(1.5) \quad \left\{ \theta \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}(\cdot, \tau) \mid r \in \Delta_\delta^{-1} \mathbb{Z}^g / \mathbb{Z}^g \right\}.$$

2. Courbes. Une courbe est une variété projective C de dimension 1. Son genre est défini par $g(C) = 1 - \chi(\mathcal{O}_C)$. On ne considérera que des courbes connexes avec au plus des points doubles ordinaires comme singularités. La jacobienne JC de C est un groupe algébrique lisse commutatif dont les points sont naturellement identifiés aux classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur C dont la restriction à chaque composante de C est de degré 0. Ce groupe JC est extension de la jacobienne JN de la normalisée N de C , qui est une variété abélienne principalement polarisée, par un tore. La dimension de JC est $g(C)$. On note aussi $\text{Pic}(C)$ le groupe de Picard de C .

Si C est irréductible, on désigne par $\text{Pic}^d(C)$, pour $d \in \mathbb{Z}$, le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles de degré d sur C , de sorte que $\text{Pic}^0(C)$ est JC .

Pour $g \geq 1$, on note $\mathcal{J}_g \subset \mathcal{A}_g$ le lieu des jacobienes de courbes lisses connexes de genre g .

Un revêtement double $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ de courbes projectives lisses connexes est un morphisme fini de degré 2. Sa donnée est équivalente à celle de la classe d'un diviseur δ sur C non équivalent à 0 et d'un diviseur lisse $\Delta \in |2\delta|$.

On a:

$$\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(-\delta)$$

$$\forall L \in \text{Pic}(C) \quad H^i(\tilde{C}, \pi^*L) = H^i(C, L) \oplus H^i(C, L \otimes \mathcal{O}_C(-\delta)).$$

Première partie: Les variétés de Prym de \mathcal{N}_{g-4}^g

3. Rappel des résultats de Beauville. Commençons par rappeler brièvement la construction des variétés de Prym, en suivant les grandes lignes de [Mu 2].

Si $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ est un revêtement étale de degré deux de courbes projectives lisses connexes, on a une application norme entre les jacobiniennes de ces courbes notée $Nm_\pi: J\tilde{C} \rightarrow JC$ ([EGA], II.6.5). Son noyau a deux composantes connexes et la variété de Prym P associée au revêtement π en est par définition la composante neutre. La polarisation principale de $J\tilde{C}$ induit le double d'une polarisation principale sur P .

De façon plus globale, si on désigne par \mathcal{R}_{g+1}^0 l'espace des modules des courbes C projectives lisses connexes de genre $g+1$ munies d'un tel revêtement π , alors \mathcal{R}_{g+1}^0 est irréductible de dimension $3g$ et on a une application Prym:

$$\text{Pr}^0: \mathcal{R}_{g+1}^0 \rightarrow \mathcal{A}_g.$$

Beauville a étendu dans [Be 1] la construction des variétés de Prym à certains revêtements de courbes singulières, afin de prolonger l'application Prym en une application propre.

Il définit un revêtement admissible (de degré 2) comme étant un morphisme $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ de degré 2, où \tilde{C} et C sont des courbes projectives connexes avec au plus des points doubles ordinaires comme singularités. On suppose de plus que l'involution σ de \tilde{C} associée satisfait à:

(1) Les seuls points fixes de σ sont des points doubles de \tilde{C} et les deux branches ne sont pas échangées.

(2) Le nombre de points doubles échangés par σ est égal au nombre de composantes de \tilde{C} échangées par σ .

On désigne par $J\tilde{C}$ et JC les jacobiniennes généralisées de \tilde{C} et C (cf. 2). Ce sont des groupes algébriques lisses, extensions d'une variété abélienne par un tore. Il y a encore une application norme ([EGA], II.6.5) et $P = (\text{Ker Nm})^0$ est une variété abélienne principalement polarisée, appelée variété de Prym associée au revêtement π . Sa dimension est $g(C) - 1$.

De nouveau, si on désigne par \mathcal{R}_{g+1} l'espace des modules des revêtements admissibles des courbes stables de genre $g+1$, on a une application:

$$\text{Pr}: \mathcal{R}_{g+1} \rightarrow \mathcal{A}_g$$

qui étend Pr^0 et qui est *propre* ([Be 1], [D-S]).

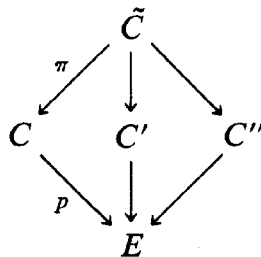
L'application Pr est surjective pour $g \leq 5$ ([Be 1]) et génériquement injective pour $g \geq 6$ ([F-S 2]).

Dans le théorème 4.10 de [Be 1], Beauville fait, pour $g \geq 5$, la liste des revêtements admissibles qui sont dans $\text{Pr}^{-1}(\mathcal{N}_{g-4}^g)$ et qui satisfont à deux conditions supplémentaires: la condition (*) de la page 157 de loc. cit. et la stabilité de la courbe C (cf. [D-M], page 76). Il ressort de 4.11.3 et 5.4 de [Be 1]

que les variétés de Prym associées aux revêtements de cette liste recouvrent $(\mathcal{N}_{g-4}^g - \bar{\mathcal{J}}_g - \mathcal{A}_g^{\text{Pr}}) \cap \text{Pr}(\mathcal{R}_{g+1})$, où $\mathcal{A}_g^{\text{Pr}}$ désigne l'ensemble des éléments de \mathcal{A}_g produits de deux variétés abéliennes non triviales.

Cette liste en question se décompose en les familles suivantes d'éléments de \mathcal{R}_{g+1} (comme dans [Be 1], une courbe hyperelliptique est une courbe connexe, revêtement de degré 2 de \mathbb{P}^1):

1. La courbe C est superelliptique, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de degré 2, $p: C \rightarrow E$ de C sur une courbe stable de genre 1. Le groupe de Galois de $p\pi: \tilde{C} \rightarrow E$ est le groupe diédral D_4 . La famille \mathcal{S}'_{g+1} obtenue est de dimension $2g$.
2. La courbe C est superelliptique, mais le groupe de Galois de $p\pi: \tilde{C} \rightarrow E$ est $(\mathbb{Z}/2)^2$. On a un diagramme commutatif:



La famille $\mathcal{S}'_{g+1,t}$ est la famille des revêtements pour lesquels $g - t + 1 = g(C'') \geq g(C') = t + 1$ (cf. 3.1). Elle est de dimension $2g$ et l'entier t prend les valeurs $0, 1, \dots, [g/2]$.

3. La courbe C est obtenue à partir d'une courbe hyperelliptique de genre $g - 1$ en identifiant deux paires de points. La famille $\mathcal{H}'_{g+1,0}$ obtenue est de dimension $2g + 1$.
4. La courbe C est réunion d'une courbe rationnelle et d'une courbe hyperelliptique de genre $g - 2$ se coupant en 4 points. La famille $\mathcal{H}'_{g+1,1}$ obtenue est de dimension $2g$.
5. La courbe C est réunion d'une courbe de genre $t - 1 \geq 1$ et d'une courbe de genre $g - t - 1 \geq t - 1$ se coupant en 4 points. Les familles obtenues, pour $2 \leq t \leq g/2$, sont notées $\mathcal{H}'_{g+1,t}$. Elles sont de dimension $3g - 4$.
6. Dans le cas où $g = 5$, C est réunion d'une courbe rationnelle coupant une courbe de genre 3 en les 4 points d'un diviseur canonique. La famille \mathcal{F}'_6 obtenue est de dimension 9.
7. Dans tous les autres cas cités par Beauville, la variété de Prym obtenue est une jacobienne. (Le seul cas restant, à savoir le cas e) des revêtements "pairs" des quintiques planes est traité dans [Be 2], [Ma], [Tj 1], [Tj 2].)

Remarque 3.1. Ces familles ne sont pas fermées dans \mathcal{R}_{g+1} . Si \mathcal{F}' est l'une d'elles (\mathcal{S}'_{g+1} ; $\mathcal{S}'_{g+1,t}$; $\mathcal{H}'_{g+1,t}$ ou \mathcal{F}'_6), on notera $\bar{\mathcal{F}}$ son adhérence dans \mathcal{R}_{g+1} . Il est facile de voir que le sous-ensemble de $\bar{\mathcal{F}}$ formé des revêtements $\tilde{C} \rightarrow C$

pour lesquels

- (a) pour les cas 1 et 2, C et E sont lisses connexes;
- (b) pour le cas 3, la normalisée de C est connexe de genre $g - 1$;
- (c) pour les cas 4, 5, 6, C a deux composantes irréductibles qui sont lisses est dense dans \mathcal{F}' . On le notera \mathcal{F} .

D'autre part, toutes ces familles sont *irréductibles*. Faisons d'abord la remarque suivante. Soit $\mathcal{C} \rightarrow S$ une famille irréductible de courbes lisses. Pour tout entier $d \geq 1$, on note $\mathcal{C}_S^d = \mathcal{C} \times_S \cdots \times_S \mathcal{C}$ (d fois) et $\mathcal{J}^d = \overline{\text{Pic}}^d(\mathcal{C}/S)$ le schéma de Picard relatif en degré d . On a un morphisme canonique $\mathcal{C}_S^d \rightarrow \mathcal{J}^d$. Soit $m: \mathcal{J}^d \rightarrow \mathcal{J}^{2d}$ le morphisme induit par l'élévation au carré. Alors le S -schéma $\mathcal{J}^d \times_{\mathcal{J}^{2d}} \mathcal{C}_S^{2d}$ est irréductible puisque la fibre de tout point de S est irréductible de dimension $2d$ (cf., par exemple, Ex. G.8, page 202 de [ACGH]). On en déduit aussitôt l'irréductibilité de $\mathcal{S}_{g+1,0}$ (irréductibilité de la famille des courbes elliptiques avec structure de niveau 2 et remarque précédente avec les courbes elliptiques et $d = g$), celle de $\mathcal{S}_{g+1,t}$, $0 < t \leq g/2$ (remarque précédente avec les courbes elliptiques et $d = t, g - t$), celle de $\mathcal{H}_{g+1,t}$, $t = 0, 1$ (courbes hyperelliptiques de genre $g - 1, g - 2$ et $d = 2$) et celle de $\mathcal{H}_{g+1,t}$, $2 \leq t \leq g/2$ (courbes de genre t et $g - t$ avec $d = 2$). L'irréductibilité de \mathcal{T}_6 se montre de façon analogue, celle de \mathcal{S}_{g+1} découle de l'existence d'une application dominante $\mathcal{H}_{g+1,0} \rightarrow \mathcal{S}_{g+1}$ fournie par la construction tétragonale (7.2.4).

4. Énoncé des résultats. Le théorème ci-dessous rassemble les résultats de la première partie et mentionne aussi les paragraphes où l'on peut trouver les démonstrations.

THÉORÈME 4.1. *Pour $g \geq 5$, on a:*

- (i) $\mathcal{E}_{g,0} = \overline{\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,0})} = \overline{\text{Pr}(\mathcal{H}_{g+1,0})} = \overline{\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1})}$ (cf. 7.2.3, 7.2.4) est de dimension $2g$ dans \mathcal{A}_g (cf. 5.4.2). C'est une composante irréductible de \mathcal{N}_{g-4}^g (cf. 5.4.5) qui contient les jacobiniennes hyperelliptiques (cf. 7.1.2).
- (ii) $\mathcal{E}_{g,1} = \overline{\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,1})} = \overline{\text{Pr}(\mathcal{H}_{g+1,1})}$ (cf. 7.2.3) est de dimension $2g - 1$ dans \mathcal{A}_g (cf. 5.4.2). C'est une composante irréductible de \mathcal{N}_{g-4}^g (cf. 5.6.1, 8.2) qui contient les jacobiniennes superelliptiques (cf. 5.5.3, 7.1.2). On a aussi $\text{Pr}(\mathcal{T}_6) \subset \mathcal{E}_{5,1}$ (cf. 6.2).
- (iii) Pour $2 \leq t \leq g/2$, on a $\overline{\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,t})} \subset \overline{\text{Pr}(\mathcal{H}_{g+1,t})} \subset \mathcal{A}_{t,g-t}^2$ (cf. 7.2.3, 6.1 et 9.3 pour la définition de $\mathcal{A}_{t,g-t}^2$).
- (iv) On a ainsi, avec $\tilde{\mathcal{J}}_g$, $2 + [g/2]$ composantes irréductibles (cf. 12.5) distinctes (cf. 8.1 et 8.2) de \mathcal{N}_{g-4}^g .

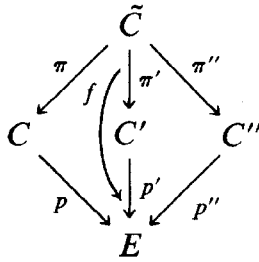
On en déduit immédiatement (cf. 8.2) que \mathcal{N}_1^5 a 5 composantes irréductibles, à savoir $\tilde{\mathcal{J}}_5$; $\mathcal{A}_{1,4}$; $\mathcal{E}_{5,0}$; $\mathcal{E}_{5,1}$ et $\mathcal{A}_{2,3}^2$, de dimensions respectives 12, 11, 10, 9, et 9 ($\mathcal{A}_{1,4}$ désigne l'ensemble des variétés abéliennes produit d'une courbe elliptique par une variété abélienne de dimension 4).

Toutes les égalités apparaissant dans le théorème entre les images par l'application Pr de certaines familles de la liste de Beauville, c'est-à-dire tous les résultats

de notre section 7, sont dues à Donagi ([Do]). Cependant, il fait erreur sur la dimension de $\mathcal{E}_{5,0}$ et oublie $\mathcal{A}_{1,4}$ et l'inclusion $\text{Pr}(\mathcal{T}_6) \subset \mathcal{E}_{5,1}$.

5. Etude des familles $\mathcal{S}_{g+1,t}$.

5.1. *Notations.* On est dans la situation suivante (cf. 3.1): la courbe C est lisse de genre $g + 1 \geq 6$. Il existe une courbe elliptique lisse E et un morphisme de degré 2, $p: C \rightarrow E$ auquel on associe sa ramification $\Delta = P_1 + \dots + P_{2g}$ sur E , $\delta \in \text{Pic}^g E$ tel que $\Delta \equiv 2\delta$, et une involution τ de C . Il existe un diagramme commutatif:



On note:

$$g(C'') = g - t + 1 \geq g(C') = t + 1.$$

Au morphisme p' sont associés sa ramification $\Delta' = P_1 + \dots + P_{2t}$, $\delta' \in \text{Pic}^t E$ tel que $\Delta' \equiv 2\delta'$, et une involution τ'' de C' .

A p'' sont associés $\Delta'' = \Delta - \Delta'$, $\delta'' = \delta - \delta'$ et une involution τ'' de C'' .

Soient Q_1, \dots, Q_{2g} les points de ramification de p sur C . Le morphisme étale π est associé à l'élément suivant d'ordre 2 dans $\text{Pic}^0 C$:

$$\eta \equiv Q_1 + \dots + Q_{2t} - p^*\delta' \equiv Q_{2t+1} + \dots + Q_{2g} - p^*\delta''.$$

On note σ l'involution sans point fixe de \tilde{C} induite par π . Le morphisme π' (resp. π'') est ramifié sur $p'^*(\Delta')$ (resp. $p''*(\Delta')$) et induit une involution σ' (resp. $\sigma'' = \sigma\sigma'$) sur \tilde{C} .

5.2. *Etude du lieu singulier du diviseur thêta.* La variété de Prym (P, Ξ) associée à π peut être définie par ([Mu 2], Proposition page 242):

$$P = \{ L \in \text{Pic}^{2g} \tilde{C} \mid \text{Nm } L = \omega_C, h^0(L) \text{ pair} \}$$

$$\Xi = \{ L \in P \mid h^0(L) \geq 2 \}.$$

L'involution $x \mapsto -x$ de P est alors $L \mapsto \omega_{\tilde{C}} \otimes L^{-1}$ et le diviseur Ξ est symétrique.

PROPOSITION 5.2.1. *On a:*

$$\Xi = \left\{ \pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \mid L' \in \text{Pic}'C', L'' \in \text{Pic}^{g-t}C'', h^0(L') \geq 1, h^0(L'') \geq 1, \right. \\ \left. \text{Nm}_{p'}L' \otimes \text{Nm}_{p''}L'' = \mathcal{O}(\delta) \right\}.$$

Démonstration. Soit $L \in \Xi$. On considère $\pi_*: |L| \rightarrow |\omega_C|$. Comme $\dim |L| \geq 1$, son image rencontre l'hyperplan $p^*|\delta|$ de $|\omega_C|$, et:

$$\exists D \in |L| \quad \pi_*D = p^*M \quad \text{avec } M \in |\delta|.$$

On peut alors écrire $D = \pi'^*D' + \pi''^*D''$ avec D' et D'' effectifs. L'espace Ξ est donc recouvert par les fermés:

$$Z_a = \left\{ \pi'^*\mathcal{O}(D') \otimes \pi''^*\mathcal{O}(D'') \mid D' \text{ (resp. } D'') \text{ diviseur effectif de degré } t + a \right. \\ \left. \text{(resp. } g - t - a) \text{ vérifiant } p'_*D' + p''_*D'' \equiv \delta \right\},$$

pour $-t \leq a \leq g - t$.

Or, pour $L \in Z_{g-t}$, on a:

$$\begin{aligned} h^0(L) &= h^0(\pi'^*\mathcal{O}(D')) = h^0(D') + h^0(D' - p'^*\delta'') \\ &= h^0(D') + h^0(K_{C'} - D' + p'^*\delta'') + t - g \\ &= h^0(D') + h^0(p'^*\delta - D') + t - g \\ &= h^0(D') + h^0(\tau'^*D') + t - g = 2h^0(D') + t - g. \end{aligned}$$

On déduit de [Mu 3], page 187, que:

$$Z_a \subset P \Leftrightarrow a \text{ est pair.}$$

On remarque alors que pour $|a| \geq 2$, on a par Riemann–Roch $h^0(D') \geq 2$ ou $h^0(D'') \geq 2$. Or on a:

$$\dim Z_a \leq \dim |\delta| - \min_{L \in Z_a} (\dim |D'| + \dim |D''|),$$

donc $\dim Z_a < g - 1 = \dim \Xi$ pour $|a| \geq 2$. Le diviseur Ξ est donc égal à Z_0 . ■

Le lieu singulier du diviseur Ξ est réunion des deux ensembles suivants ([Mu 2], §6):

$$\{ L \in \Xi \mid h^0(L) \geq 4 \}$$

et

$$\{L \in \Xi \mid L = \pi^*M \otimes N \text{ avec } M \in \text{Pic } C, N \in \text{Pic } \tilde{C}, h^0(M) \geq 2, h^0(N) \geq 1\}.$$

Les points du premier ensemble seront dits singularités stables (elles existent sur toute variété de Prym de dimension au moins 6 par 5.2.5), ceux du second, singularités exceptionnelles (elles n'existent pas sur une variété de Prym générale).

Une singularité peut bien sûr être à la fois stable et exceptionnelle.

PROPOSITION 5.2.2. *On suppose qu'on est en un point générique (cf. 5.2.9) de $\mathcal{S}_{g+1,t}$ et que $g \geq 5$. Alors:*

(i) *Le lieu singulier de Ξ est réunion de V, W_{-2}, W_0, W_2 , où:*

$$V = \left\{ \pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \mid \text{Nm}_{p'}L' = \mathcal{O}(\delta'), \text{Nm}_{p''}L'' = \mathcal{O}(\delta''), \right. \\ \left. h^0(L') \geq 2, h^0(L'') \geq 2 \right\}$$

$$W_a = \left\{ \pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \otimes f^*M \mid L' \in \text{Pic}^{t-2+a}C', \right.$$

$$L'' \in \text{Pic}^{g-t-2-a}C'', M \in \text{Pic}^2E, h^0(L') \geq 1,$$

$$\left. h^0(L'') \geq 1, \text{Nm}_{p'}L' \otimes \text{Nm}_{p''}L'' \otimes M^{\otimes 2} = \mathcal{O}(\delta) \right\}.$$

(ii) *L'ensemble V est vide pour $t \leq 2$, non vide de dimension pure $g - 6$ et non inclus dans W_a pour $t \geq 3$. Ses composantes irréductibles sont au nombre de 4 pour $t = 3, g = 6$; de 2 pour $t = 3, g > 6$; de 1 pour $t > 3$.*

(iii) *L'ensemble W_2 est vide pour $(t, g) = (2, 5)$ ou $(3, 6)$, irréductible de dimension $g - 4$ sinon.*

(iv) *L'ensemble W_0 est vide pour $t \leq 1$, irréductible de dimension $g - 4$ pour $t \geq 2$.*

(v) *L'ensemble W_{-2} est vide pour $t \leq 3$, irréductible de dimension $g - 4$ pour $t \geq 4$.*

Remarque 5.2.3. Les singularités de Ξ correspondant à un point générique de chacun de ces ensembles sont stables pour V , exceptionnelles pour W_0 , stables et exceptionnelles pour W_{-2} et W_2 .

D'autre part, tout ensemble W_a non vide contient un élément d'ordre 2 de P (prendre L' (resp. L'') somme de points de ramification de p' (resp. p'')). Comme Ξ est symétrique (cf. début de 5.2), on en déduit que $\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,t})$ est contenu dans $\theta_{\text{null},g}$ (cf. introduction).

On déduit de la proposition les deux résultats suivants:

COROLLAIRE 5.2.4. *Sous les hypothèses de 5.2.2, $\text{Sing } \Xi$ est irréductible dans les seuls cas suivants:*

- (i) $t = 0$ ou 1 . On a $\text{Sing } \Xi = W_2$.
- (ii) $t = 2$ et $g = 5$. On a $\text{Sing } \Xi = W_0$.

COROLLAIRE 5.2.5. *Pour $g \geq 6$ et toute variété de Prym (P, Ξ) de dimension g , on a $\dim \text{Sing } \Xi \geq g - 6$.*

Démonstration. Il ressort de la proposition que pour $g \geq 6$ et (P, Ξ) générique dans $\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,3})$, $\text{Sing } \Xi$ a une composante irréductible de dimension $g - 6$ correspondant à des singularités stables, à savoir V .

Or il est connu ([Ha], [We 1]) que pour toute famille de revêtements doubles $\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow T$, à laquelle correspond une famille de variétés de Prym $\mathcal{P} \rightarrow T$, l'ensemble:

$$\bigcup_{t \in T} \{ \text{singularités stables de } \Xi_t \}$$

est soit vide, soit de codimension au plus 6 dans \mathcal{P} . Or, si on prend une telle famille contenant notre exemple, cet ensemble est de codimension 6 en un point d'une fibre, donc se projette surjectivement sur T . ■

Remarque 5.2.6. Il ressort de [We 1] et de 5.2.5 que pour une variété de Prym générique (P, Ξ) de dimension $g \geq 6$, $\text{Sing } \Xi$ est de dimension pure $g - 6$ et que ses composantes connexes sont ses composantes irréductibles. Or une jacobienne générique est simple, donc aussi une variété de Prym générique. On déduit de [Ba] que, pour $g \geq 12$, $\text{Sing } \Xi$ est génériquement irréductible de dimension $g - 6$.

Démonstration de la proposition 5.2.2. On commence par la définition suivante. Soit $p: C \rightarrow B$ un revêtement double de courbes lisses, D un diviseur effectif sur C . On dira que D est p -simple s'il n'existe pas de diviseur effectif E sur B tel que $D - p^*E$ soit effectif. On a alors ([Mu 2], page 338):

PROPOSITION 5.2.7. *Soit $p: C \rightarrow B$ un revêtement double de courbes lisses associé à Δ, δ (cf. 2); L un faisceau inversible sur B , D un diviseur effectif p -simple sur C . On pose $M = p^*L \otimes \mathcal{O}(D)$. On a alors une suite exacte de \mathcal{O}_B -modules:*

$$0 \rightarrow L \rightarrow p_*M \rightarrow L \otimes \mathcal{O}_B(p_*D - \delta) \rightarrow 0.$$

COROLLAIRE 5.2.8. *Dans notre situation, on considère $L = \pi'^*\mathcal{O}(D') \otimes \pi''^*\mathcal{O}(D'')$ où D' et D'' sont effectifs, D' est p' -simple et $\text{Nm}_\pi L = \omega_C$. Alors:*

$$h^0(\tilde{C}, L) \leq 2h^0(C'', D'') + g - t - \deg D''.$$

Démonstration. Le diviseur π'^*D' est π'' -simple; donc la proposition 5.2.7 donne:

$$h^0(L) \leq h^0(D'') + h^0(D'' + \pi''_*\pi'^*D' - p''^*\delta').$$

Or on a $p'_*D' + p''_*D'' \equiv \delta$; donc:

$$\begin{aligned} D'' + \pi''_*\pi'^*D' - p''^*\delta' &\equiv D'' + \tau''_*D'' + p''^*p'_*D' - \tau''_*D'' - p''^*\delta' \\ &\equiv p''^*(\delta - \delta') - \tau''_*D'' \equiv \tau''^*(K_{C''} - D''). \end{aligned}$$

On en déduit par Riemann–Roch l'inégalité cherchée. ■

Soit L un élément de Ξ correspondant à une singularité de Ξ . Par 5.2.1, on peut écrire:

$$L = \pi'^*[\mathcal{O}(D') \otimes p'^*\mathcal{O}(F')] \otimes \pi''^*[\mathcal{O}(D'') \otimes p''^*\mathcal{O}(F'')]$$

avec D', D'', F', F'' effectifs, D' p' -simple, D'' p'' -simple et $\deg D' + 2 \deg F' = t = g(C') - 1$, $\deg D'' + 2 \deg F'' = g - t = g(C'') - 1$.

Supposons d'abord cette singularité exceptionnelle non stable. Tout élément de $|L|$ s'écrit alors $\pi^*D + G$, avec $h^0(D) \geq 2$ et G π -simple. On décompose alors D en somme d'un diviseur p -simple et de l'image inverse d'un diviseur effectif sur E . Par 5.2.7, on est dans l'un des cas suivants:

(i) Il existe F de degré 2 sur E tel que $p^*F \leq D$. On a alors $F \leq F' + F''$ et on est dans W_{-2} , W_0 , ou W_2 .

(ii) D est p -simple, $G = 0$ et $p_*D \equiv \delta$. On a alors $\pi^*D = \pi'^*D' + \pi''^*D''$, ce qui n'est possible que si $D' \leq \text{Ram } p'$ et $D'' \leq \text{Ram } p''$. On en déduit:

$$|\delta| \ni p_*D = p'_*D' + p''_*D'' \leq \Delta' + \Delta'' = \Delta.$$

Pour exclure ce cas, on fera l'hypothèse suivante, satisfaite génériquement sur $\mathcal{S}_{g+1, t}$:

(5.2.9) Δ n'est pas somme de deux éléments de $|\delta|$.

Sans cette hypothèse, il peut apparaître un nombre fini de singularités exceptionnelles isolées, qui sont des points d'ordre deux de P .

On suppose maintenant $h^0(L) \geq 4$. Si $\deg F' \geq 1$, le corollaire 5.2.8 donne:

$$4 \leq h^0(L) \leq 2h^0(D'' + p''^*F'' + p''^*F') - 2 \deg F',$$

soit $h^0(D'' + p''^*F'' + p''^*F') \geq 3$.

On applique 5.2.7:

$$\begin{aligned} 3 &\leq h^0(F' + F'') + h^0(p'_*D'' + F' + F'' - \delta'') \\ &\leq \deg(F' + F'') + \max(\deg(F' - F''), 0) \\ &\leq 2 \max(\deg F', \deg F''), \end{aligned}$$

de sorte que soit F' , soit F'' est de degré au moins deux, et qu'on est soit dans W_2 , soit dans W_{-2} .

Le cas $\deg F'' \geq 1$ se traite de façon identique.

Si $\deg F' = \deg F'' = 0$, le corollaire 5.2.8 donne $h^0(D') \geq 2$ et $h^0(D'') \geq 2$. Par ([We 2], 3.4), on est dans V .

Ceci termine la démonstration de la première partie de la proposition.

L'ensemble V est évidemment vide pour $t = \deg L' \leq 1$. Pour $t = 2$, il est vide si C' n'est pas hyperelliptique, ce qui est le cas génériquement. Les assertions sur le nombre de composantes irréductibles découlent de [We 2], Proposition 3.6, pour $t \geq 5$, de [Te] pour $t = 4$ et, pour $t = 3$, du fait que les deux g_3^1 de C' (supposée non-hyperelliptique), image l'un de l'autre par τ'^* , satisfont à $\text{Nm}_{p'} g_3^1 = \mathcal{O}(\delta')$ (utiliser 5.2.7). Enfin, l'ensemble V n'est contenu dans aucun W_a ; en effet, un élément générique s'écrit:

$$L = \pi'^*L' \otimes \pi''^*L'', \text{Nm } L' = \mathcal{O}(\delta'), \text{Nm } L'' = \mathcal{O}(\delta''),$$

$$\text{avec } h^0(L') = h^0(L'') = 2.$$

De plus, tous les diviseurs de $|L'|$ (resp. $|L''|$) sont p' -simples (resp. p'' -simples). Un tel fibré ne peut être dans un W_a , $a \in \mathbb{Z}$.

Enfin, les assertions d'irréductibilité et de dimension sur les W_a sont conséquences de:

LEMME 5.2.10. Soient $p: C \rightarrow E$ une courbe superelliptique et $G \in \text{Pic}^d E$ fixé. Alors, pour $5 \leq d \leq g(C) + 1$, l'ensemble:

$$\left\{ p^*M \otimes \mathcal{O}_C(D) \mid M \in \text{Pic}^2 E, D \in C^{(d-4)}, \mathcal{O}(p_*D) \otimes M^2 \simeq G \right\}$$

est irréductible de dimension $d - 4$.

Démonstration. On pose:

$$Z(G) = \left\{ (x_1, \dots, x_{d-4}, M) \in C^{d-4} \times \text{Pic}^2 E \mid \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{d-4} px_i\right) \otimes M^{\otimes 2} = G \right\}.$$

On remarque tout d'abord que $Z(G)$ est irréductible de dimension $d - 4$ pour $d \geq 5$: c'est évident pour $d = 5$ et la première projection $\text{pr}_1: Z(G) \rightarrow C$ a pour

fibre $Z(G \otimes \mathcal{O}(-px_1))$. Pour un élément générique (x_1, \dots, x_{d-4}, M) de $Z(G)$, le diviseur $D = \sum x_i$ est p -simple (cf. 5.2.7) et on a une suite exacte:

$$0 \rightarrow H^0(E, M) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}(D) \otimes p^*M) \rightarrow H^0(E, \mathcal{O}(p_*D - \delta) \otimes M) \rightarrow 0.$$

Ce dernier espace est nul lorsque:

$$0 \geq \text{deg}[\mathcal{O}(p_*D - \delta) \otimes M] = d - 1 - g(C)$$

sauf si:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(p_*D - \delta) \otimes M &= \mathcal{O}_E \\ \Leftrightarrow M &= G \otimes \mathcal{O}(-\delta). \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $d \leq g(C) + 1$, on en déduit que pour un élément générique (x_1, \dots, x_{d-4}, M) de $Z(G)$, $D = \sum x_i$ est fixe dans $|\mathcal{O}(D) \otimes p^*M|$, donc que l'application:

$$\begin{aligned} Z(G) &\rightarrow \text{Pic}^d C \\ (x_1, \dots, x_{d-4}, M) &\mapsto \mathcal{O}_C \left(\sum_{i=1}^{d-4} x_i \right) \otimes p^*M \end{aligned}$$

est génériquement finie. Son image est donc irréductible de dimension $d - 4$. ■

5.3. *Les quadriques associées aux points doubles du diviseur thêta.* On est toujours dans la situation 5.1, mais on s'intéresse ici aux seuls cas $t = 0$ et $t = 1$.

Commençons par quelques rappels sur les singularités stables de multiplicité 2 de Ξ ([Mu 2], [Tj 3]). Une telle singularité correspond à un faisceau inversible L sur \tilde{C} tel que $h^0(L) = 4$ et $\text{Nm } L = \omega_C$.

On a une application:

$$\begin{aligned} \phi: \Lambda^2 H^0(L) &\rightarrow H^0(C, K_C + \eta) \\ s \wedge t &\mapsto s\sigma t - t\sigma s. \end{aligned}$$

Si $\{s_1, \dots, s_4\}$ est une base de $H^0(L)$, on pose:

$$\begin{aligned} Q_L &= \phi(s_1 \wedge s_2) \cdot \phi(s_3 \wedge s_4) - \phi(s_1 \wedge s_3) \cdot \phi(s_2 \wedge s_4) \\ &\quad + \phi(s_1 \wedge s_4) \cdot \phi(s_2 \wedge s_3) \in S^2 H^0(C, K_C + \eta). \end{aligned}$$

Lorsque Q_L est non nul, c'est une équation du cône tangent à Ξ en L dans P (on rappelle que $T_0 P \simeq H^0(C, K_C + \eta)^\vee$). De plus, la quadrique d'équation Q_L

dans $\mathbb{P}H^0(C, K_C + \eta)^\vee$ contient l'image X de C par le morphisme associé au système linéaire $|K_C + \eta|$ (appelée *courbe semi-canonique*).

On déduit facilement de 5.4.1 par exemple que

- (a) pour $t = 0$, X est la courbe elliptique $\phi_{|\delta''_1|}(E)$;
- (b) pour $t = 1$, X est tracée sur le cône Σ de sommet un point S et de base $\phi_{|\delta''_1|}(E)$. Elle a un point double en S et toute quadrique contenant X contient Σ .

PROPOSITION 5.3.1. *Soit (P, Ξ) un élément générique de $\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1, t})$, avec $g \geq 5$. Alors:*

(1) *Si $t = 0$, l'intersection des quadriques correspondant aux singularités quadratiques de Ξ est la courbe semi-canonique X . L'espace vectoriel qu'elles engendrent dans $S^2T_0^\vee P$ est de codimension $2g$.*

(2) *Si $t = 1$, l'intersection des quadriques est le cône Σ . L'espace vectoriel engendré est de codimension $3g - 2$.*

Démonstration. Par 5.2.4(i), il nous suffit de calculer les quadriques Q_L pour les éléments L de W_2 , qui s'écrivent:

$$L = \pi'^*L' \otimes \pi''^*L''$$

avec

$$L' = \mathcal{O}(D') \otimes p'^*M, \quad D' \geq 0, \text{ deg } L' = t + 4, \text{ deg } M = 2$$

$$L'' = \mathcal{O}(D''), \quad D'' \geq 0.$$

Si D' est p' -simple, 5.2.7 donne la suite exacte:

$$0 \rightarrow H^0(E, M) \xrightarrow{\alpha} H^0(C', L') \xrightarrow{\beta} H^0(E, M \otimes \mathcal{O}(p'_*D' - \delta')) \rightarrow 0.$$

Les morphismes α et β peuvent être définis comme suit:

$$\forall v \in H^0(E, M) \quad \alpha(v) = p'^*(v)u' \quad \text{où } \text{div}(u') = D',$$

$$\forall u \in H^0(C', L') \quad u\tau'(u') - \tau'(u)u' = t'p'^*(\beta(u))$$

où $\text{div}(t')$ est la ramification de p' sur C' .

On prend une base $\{v_1, v_2\}$ de $H^0(E, M)$ et une base $\{v_3, v_4\}$ de $H^0(E, M \otimes \mathcal{O}(p'_*D' - \delta'))$. Il existe alors une base $\{u'_1, \dots, u'_4\}$ de $H^0(C', L')$ telle que:

$$u'_1 = \alpha(v_1), \quad u'_2 = \alpha(v_2), \quad \beta(u'_3) = v_3, \quad \beta(u'_4) = v_4.$$

Une base de $H^0(L)$ est alors $\{s_j = \pi'^*(u'_j)\pi''^*(u'')\}_{1 \leq j \leq 4}$, où $\text{div}(u'') = D''$.

On a:

$$\begin{aligned} \pi^*(\phi(s_j \wedge s_k)) &= \pi'^*(u'_j) \pi''^*(u'') \pi'^*(\tau'^* u'_k) \pi''^*(\tau''^* u'') \\ &\quad - \pi'^*(\tau'^* u'_j) \pi''^*(\tau''^* u'') \pi'^*(u'_k) \pi''^*(u'') \\ &= f^*(v'') \pi'^*(\phi(u'_j \wedge u'_k)) \quad \text{où } \operatorname{div}(v'') = p''_* D''. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \phi(s_1 \wedge s_2) &= 0. \\ \pi^*(\phi(s_1 \wedge s_3)) &= f^*(v'') \cdot \pi'^*[u' \cdot p'^*(v_1) \tau'^* u'_3 - \tau'^* u' \cdot p'^*(v_1) \cdot u'_3] \\ &= f^*(v'' v_1 v_3) \cdot \pi'^*(t'). \end{aligned}$$

Dans l'identification 5.4.1, cela s'écrit:

$$\phi(s_1 \wedge s_3) = p^*(v'' v_1 v_3) \cdot s'.$$

On a donc:

$$Q_L = -(v_1 v_3 v'') s' \cdot (v_2 v_4 v'') s' + (v_1 v_4 v'') s' \cdot (v_2 v_3 v'') s'.$$

Il suffit alors de montrer que les quadriques ainsi obtenues engendrent l'espace des quadriques de \mathbb{P}^{g-t-1} contenant $\phi_{|s'_1}(E)$. C'est l'objet du lemme suivant, qui termine donc la démonstration de la proposition.

LEMME 5.3.2. *Soit E une courbe elliptique plongée par un faisceau inversible L de degré $d \geq 4$ dans $\mathbb{P}H^0(L)^\vee \simeq \mathbb{P}^{d-1}$. On considère les quadriques*

$$(v_1 v_3 v) \cdot (v_2 v_4 v) - (v_1 v_4 v) \cdot (v_2 v_3 v) \in S^2 H^0(L),$$

définies pour

$$\begin{aligned} M, N &\in \operatorname{Pic}^2(E) \\ \{v_1, v_2\} &\text{ base de } H^0(E, M) \\ \{v_3, v_4\} &\text{ base de } H^0(E, N) \\ v &\in H^0(E, L \otimes M^{-1} \otimes N^{-1}). \end{aligned}$$

Alors l'idéal de E dans \mathbb{P}^{d-1} est engendré par ces quadriques.

Démonstration. L'assertion est triviale pour $d = 4$ puisque E est alors intersection complète de deux quadriques.

On procède par récurrence sur d , en supposant $d \geq 5$.

Si on désigne par W_L l'espace des quadriques contenant $\phi_{|L|}(E)$, on a, pour tout couple (P_1, P_2) d'éléments de E , une flèche:

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{Eléments de } W_L \\ \text{singuliers en } P_1 \end{array} \right\} \oplus \left\{ \begin{array}{l} \text{Eléments de } W_L \\ \text{singuliers en } P_2 \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{Eléments de } W_L \\ \text{contenant la droite } P_1P_2 \end{array} \right\}, \\ \left| \downarrow \right. & & \left| \downarrow \right. \\ W_{L(-P_1)} & & W_{L(-P_2)} \end{array}$$

dont la surjectivité résulte facilement du fait que son noyau est isomorphe à $W_{L(-P_1-P_2)}$ et d'un calcul de dimension. Par hypothèse de récurrence, les quadriques que nous considérons engendrent donc l'espace de droite, ceci pour tout couple (P_1, P_2) . Pour conclure, il suffit alors de remarquer que pour tout couple (Q_1, Q_2) d'éléments de W_L et toute corde P_1P_2 , une combinaison linéaire de Q_1 et de Q_2 contient cette corde. Nos quadriques engendrent donc W_L tout entier, donc aussi l'idéal de E . ■

5.4. *Rang de l'application Prym sur $\mathcal{S}_{g+1,t}$. Le théorème d'Andreotti et Mayer.* On rappelle ([Be 2], Proposition 7.5) que la codifférentielle de l'application $\text{Pr}: \mathcal{R}_{g+1} \rightarrow \mathcal{A}_g$ en un point $(C, \eta) \in \mathcal{R}_{g+1}^0$ est:

$$T_{(C, \eta)}^\vee \text{Pr}: S^2H^0(C, K_C + \eta) \rightarrow H^0(C, 2K_C).$$

On s'intéresse à la différentielle de la restriction Pr_t de Pr à $\mathcal{S}_{g+1,t} \subset \mathcal{R}_{g+1}^0$. Soient s' et s'' deux sections telles que:

$$\text{div}(s') = Q_1 + \dots + Q_{2t} \quad (\text{notations 5.1})$$

$$\text{div}(s'') = Q_{2t+1} + \dots + Q_{2g}$$

$$s = s's'', \quad \text{div}(s) = Q_1 + \dots + Q_{2g}.$$

On a alors les décompositions suivantes:

$$T_{(C, \eta)}^\vee \mathcal{R}_{g+1} \simeq H^0(C, 2K_C) \simeq p^*H^0(E, 2\delta) \oplus p^*H^0(E, \delta)s. \\ (\tau = \text{id}) \qquad (\tau = -\text{id})$$

La partie τ -invariante correspond au lieu dans l'espace des déformations de C où

l'involution se prolonge, c'est-à-dire à $T_{(C, \eta)}^{\vee} \mathcal{S}_{g+1, t}$. On a aussi:

LEMME 5.4.1. $H^0(C, K_C + \eta) \simeq p^*H^0(E, \delta'')s' \oplus p^*H^0(E, \delta')s''$.

Démonstration. On a (cf. 5.1):

$$\eta \equiv Q_1 + \cdots + Q_{2t} - p^*\delta' \equiv Q_{2t+1} + \cdots + Q_{2g} - p^*\delta''$$

$$K_C + \eta \equiv \text{div}(s') + p^*\delta'' \equiv \text{div}(s'') + p^*\delta'.$$

On a donc un morphisme:

$$H^0(E, \delta'') \oplus H^0(E, \delta') \rightarrow H^0(C, K_C + \eta)$$

$$(u'', u') \mapsto p^*u'' \cdot s' + p^*u' \cdot s''$$

dont le noyau est isomorphe à:

$$H^0(p^*\delta'' - \text{div}(s'')) = H^0(p^*\delta' - \text{div}(s')) = H^0(C, \eta) = 0. \blacksquare$$

On peut donc écrire:

$$\begin{aligned} S^2H^0(C, K_C + \eta) &\simeq [p^*S^2H^0(E, \delta'')s'^2 \oplus p^*S^2H^0(E, \delta')s''^2] \\ &\oplus [p^*H^0(E, \delta'') \otimes p^*H^0(E, \delta')]s's''. \end{aligned}$$

Si $s_{\Delta'}$ (resp. $s_{\Delta''}$) est une section de diviseur Δ' (resp. Δ'') telle que $p^*s_{\Delta'} = s'^2$ (resp. $p^*s_{\Delta''} = s''^2$), on peut écrire $T^{\vee}\text{Pr}$ comme la somme de:

$$T^{\vee}\text{Pr}_t: S^2H^0(E, \delta') \oplus S^2H^0(E, \delta'') \rightarrow H^0(E, 2\delta)$$

$$(u' \cdot v', u'' \cdot v'') \mapsto u'v's_{\Delta''} + u''v''s_{\Delta'}$$

et de:

$$H^0(E, \delta') \otimes H^0(E, \delta'') \rightarrow H^0(E, \delta)$$

$$u' \otimes u'' \mapsto u'u''.$$

PROPOSITION 5.4.2. Pour $g \geq 4$, $(g, t) \neq (4, 2)$ et (C, η) générique dans $\mathcal{S}_{g+1, t}$, on a

$$\dim \text{Ker } T_{(C, \eta)}\text{Pr}_t = \begin{cases} 0 & \text{pour } t = 0 \\ 1 & \text{pour } 0 < t \leq g/2. \end{cases}$$

En particulier, sous les mêmes hypothèses sur g et t , on a:

$$\dim \text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1, t}) = \begin{cases} 2g & \text{pour } t = 0 \\ 2g - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On rappelle que $t = \deg \delta'$. Si $t = 0$, $\dim \text{Ker } T \text{Pr}_0$ est le corang de $S^2 H^0(E, \delta'') \rightarrow H^0(E, 2\delta'') = H^0(E, 2\delta)$, qui est surjective pour $g = \deg \delta'' \geq 3$ ([Mu 4], page 55). On suppose $t > 0$. On peut écrire $T^\vee \text{Pr}_t$ comme la composée de:

$$\phi' \oplus \phi'': S^2 H^0(E, \delta') \oplus S^2 H^0(E, \delta'') \rightarrow H^0(E, 2\delta') \oplus H^0(E, 2\delta'')$$

et de:

$$\begin{aligned} \phi: H^0(E, 2\delta') \oplus H^0(E, 2\delta'') &\rightarrow H^0(E, 2\delta) \\ (u', u'') &\mapsto u' s_{\Delta''} + u'' s_{\Delta'}. \end{aligned}$$

Comme Δ' et Δ'' sont à supports disjoints, le noyau de ϕ est engendré par $(s_{\Delta'} - s_{\Delta''})$.

Si $t = 1$, on a:

$$\text{Im}(\phi' \oplus \phi'') \cap \text{Ker } \phi = [\mathbb{C} s_{\delta'}^2 \oplus H^0(2\delta'')] \cap \mathbb{C}(s_{\Delta'} - s_{\Delta''}) = 0,$$

puisque Δ' est somme de deux points distincts (ϕ'' est surjective puisque $\deg \delta'' = g - 1 \geq 3$). On a donc:

$$\text{Rang } T^\vee \text{Pr}_1 = \text{Rang}(\phi' \oplus \phi'') = 1 + 2(g - 1) = 2g - 1.$$

Si $t = 2$, le même raisonnement s'applique sauf si Δ' est somme de deux éléments de $|\delta'|$, ce qui n'est pas le cas génériquement, ou si $\deg \delta'' = g - 2 < 3$, cas qu'on a exclu.

Si $t \geq 3$, ϕ' et ϕ'' sont surjectives et:

$$\text{Rang } T^\vee \text{Pr}_t = \text{Rang } \phi = 2g - 1. \blacksquare$$

On peut maintenant montrer que $\mathcal{E}_{g,0} = \text{Pr}(\overline{\mathcal{F}}_{g+1,0})$ est une composante irréductible de \mathcal{N}_{g-4}^g . On rappelle le théorème d'Andreotti–Mayer dont on peut trouver la démonstration, sinon l'énoncé, dans [A–M].

THÉORÈME 5.4.3 (Andreotti–Mayer). Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension g . On suppose que

- (a) $\text{Sing } \Theta$ est de dimension pure k , et
- (b) l'ensemble $\text{Sing}_2 \Theta$ des points de multiplicité deux sur Θ est dense dans $\text{Sing } \Theta$ et l'image de chaque composante de $\text{Sing}_2 \Theta$ par l'application:

$$(5.4.4) \quad \text{Sing}_2 \Theta \rightarrow \mathbb{P} S^2 T_0^\vee A$$

$$x \mapsto \tau_x^* \quad (\text{cône tangent à } \Theta \text{ en } x)$$

engendre un espace linéaire de dimension $\geq N$. Alors la codimension de \mathcal{N}_k^g en (A, Θ) est $\geq N$.

COROLLAIRE 5.4.5. *L'ensemble $\mathcal{E}_{g,0}$ est, pour $g \geq 5$, une composante irréductible de \mathcal{N}_{g-4}^g de dimension $2g$.*

Démonstration. En effet, pour un élément générique (P, Ξ) de $\mathcal{E}_{g,0}$, $\text{Sing } \Xi$ est irréductible pour $g \geq 5$ par 5.2.4. L'image de 5.4.4 engendre un espace linéaire de dimension $\binom{g+1}{2} - 2g$ (5.3.1) et $\dim \mathcal{E}_{g,0} = 2g$ (5.4.2). Le théorème 5.4.3 permet de conclure. ■

Remarque 5.4.6. Bien que, pour un élément générique (P, Ξ) de $\mathcal{E}_{g,1}$, $\text{Sing } \Xi$ soit irréductible (5.2.4), l'image de 5.4.4 engendre un espace linéaire de dimension $\binom{g+1}{2} - (3g - 2)$ (5.3.1) et $\dim \mathcal{E}_{g,1} = 2g - 1$ (5.4.2). On ne peut appliquer 5.4.3. Pourtant, $\mathcal{E}_{g,1}$ est bien une composante de \mathcal{N}_{g-4}^g (5.6.1 et 8.2).

5.5. Quelques remarques. La famille $\mathcal{E}_{g,1}$ contient les jacobiniennes superelliptiques. On garde toujours les mêmes notations, auxquelles on ajoute:

$$P' = \text{Ker}(JC' \xrightarrow{\text{Nm}} JE)$$

$$P'' = \text{Ker}(JC'' \xrightarrow{\text{Nm}} JE).$$

La polarisation de JC' (resp. JC'') induit sur P' (resp. P'') une polarisation $L_{P'}$ (resp. $L_{P''}$) telle que ([Mu 2], Corollary 1, page 332; et 1) $H(L_{P'}) \simeq p'^*JE[2]$ (resp. $H(L_{P''}) \simeq p''^*JE[2]$). Cette polarisation est de type (2) et $(P', L_{P'}) \in \mathcal{A}_{t,(2)}$ (resp. $(P'', L_{P''}) \in \mathcal{A}_{g-t,(2)}$).

PROPOSITION 5.5.1. *Pour $t = 0$, on a une isogénie:*

$$g: P'' \xrightarrow{\pi''^*} P = \text{Prym}(\tilde{C}/C)$$

de noyau $\{0, p''^*\mathcal{O}(\delta')\}$ telle que $g^*L_P \sim L_{P'}$. Pour $0 < t \leq g/2$, on a une isogénie:

$$g: P' \times P'' \rightarrow P$$

$$(x', x'') \mapsto \pi'^*x' - \pi''^*x''$$

de noyau $(p'^*, p''^*)(JE[2])$ telle que $g^*L_P \sim L_{P'} \boxtimes L_{P''}$ (cf. Notations 1). En particulier, $\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,t}) \subset \mathcal{A}_{t,g-t}^2$ (cf. définition 9.3).

Démonstration. Il est facile de vérifier que g est bien à valeurs dans P et que $\text{Ker } g \subset P'[2] \times P''[2]$, donc que g est une isogénie. Pour les polarisations, il faut montrer que:

$$\hat{\pi}'^*\phi_{L_P}\pi'^* = \phi_{L_{P'}} \quad \text{et} \quad \hat{\pi}''^*\phi_{L_P}\pi''^* = 0.$$

On montre par exemple la première égalité. On pose:

$$\begin{aligned} i: P \hookrightarrow J\tilde{C} & & i': P' \hookrightarrow JC' \\ \phi: J\tilde{C} \xrightarrow{\sim} \widehat{J\tilde{C}} & & \phi': JC' \xrightarrow{\sim} \widehat{JC'} \end{aligned}$$

$\forall p' \in P'$

$$\begin{aligned} \hat{\pi}'^* \phi_{L_p} \pi'^*(2p') &= \hat{\pi}'^* \phi_{L_p^{\otimes 2}} \pi'^*(p') \\ &= \hat{\pi}'^* \hat{i} \phi i \pi'^*(p') = \hat{i}' \hat{\pi}'^* \phi \pi'^* i'(p') \\ &= \hat{i}' \phi' i'(2p') = \phi_{L_{p'}}(2p'). \blacksquare \end{aligned}$$

On peut remarquer que ce résultat ne dépend pas du genre de E . Si E est de genre $b \geq 2$, on obtient des variétés de Prym qui sont dans $\mathcal{A}_{t, g-t}^{\delta}$, où δ est la polarisation $(2, \dots, 2)$ de degré 2^b et $b-1 \leq t \leq g-(b-1)$.

Regardons de plus près les cas $t=0$ et $t=1$. Soit \mathcal{F}_g l'ensemble des variétés de Prym (au sens de [Mu 2]) associées aux courbes superelliptiques de genre $g+1$. C'est un sous-ensemble irréductible de $\mathcal{A}_{g,(2)}$.

PROPOSITION 5.5.2. (1) *Pour tout $(P, L) \in \mathcal{F}_g$ et $a \in H(L)$, $a \neq 0$, la variété abélienne principalement polarisée $P/\{0, a\}$ est dans $\mathcal{E}_{g,0}$.*

(2) *Pour $g \geq 4$ et tout $(P, L) \in \mathcal{F}_{g-1}$, toute courbe elliptique F et tout isomorphisme $\psi: H(L) \xrightarrow{\sim} F[2]$, la variété abélienne principalement polarisée $P \times F/\{(a, \psi a) | a \in H(L)\}$, élément de $\mathcal{A}_{1, g-1}^2$ (cf. définition 9.3) est dans $\mathcal{E}_{g,1}$.*

Démonstration. Le premier point découle immédiatement de 5.5.1. Pour le second, on remarque d'abord que la famille $\mathcal{F}_{g,1}$ ainsi construite est irréductible puisque la famille:

$$\left\{ p: C \rightarrow E \text{ structure superelliptique, } C \text{ de genre } g, \right. \\ \left. \text{avec un isomorphisme } E[2] \xrightarrow{\sim} H(2) \right\}$$

est irréductible. De plus, $\dim \mathcal{F}_{g,1} \leq 2g-2+1$. Par 5.5.1 et 9.1, $\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,1}) \subset \mathcal{F}_{g,1}$ et par 5.4.2, $\dim \mathcal{E}_{g,1} = 2g-1$ pour $g \geq 4$. On en déduit $\mathcal{E}_{g,1} = \overline{\mathcal{F}_{g,1}}$. ■

COROLLAIRE 5.5.3. *Pour $g \geq 4$, $\mathcal{E}_{g,1}$ contient les jacobiniennes superelliptiques.*

Démonstration. En effet ([Mu 2], Corollary 1(b)), pour $p: C \rightarrow E$ structure superelliptique, on a une isogénie $P \times JE \rightarrow JC$ de noyau $(p^*, id)(JE[2])$. ■

5.6. *L'espace $\mathcal{E}_{g,1}$ est une composante de \mathcal{N}_{g-4}^g .* On ne considère dans cette section que le cas $g \geq 6$. Le résultat est encore vrai pour $g=5$ et sera montré en 8.2.

THÉORÈME 5.6.1. *Pour $g \geq 6$, $\mathcal{E}_{g,1}$ est une composante irréductible de dimension $2g - 1$ de \mathcal{N}_{g-4}^g .*

Démonstration. On rappelle que la méthode d'Andreotti et Mayer ne s'applique pas à $\mathcal{E}_{g,1}$ (5.4.6). On va utiliser les dégénérescences de rang 1 des variétés abéliennes, telles qu'elles sont définies dans [Mu 1], page 350. Expliquons rapidement de quoi il s'agit. Les dégénérescences de rang 1 de variétés abéliennes de dimension g sont en correspondance biunivoque avec les extensions de groupes commutatifs des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension $g - 1$ par un tore de dimension 1. Par [Mu 6], page 227, ces extensions sont toutes du type:

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \xrightarrow{j} \mathcal{G}(L_a \otimes L^{-1}) \rightarrow A \rightarrow 0$$

où $(A, L) \in \mathcal{A}_{g-1}$, $a \in A$ (cf. 1.1. et [Mu 5], page 290). Si on change a en $-a$, j est changé en $-j$ et les groupes obtenus sont isomorphes.

Il existe ([Ig 1], [Mu 1], page 351, [Mu 7], [Na]) un espace de modules grossier $\overline{\mathcal{A}}_g^{(1)}$ pour les variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g et leurs dégénérescences de rang 1, qui est réunion disjointe de \mathcal{A}_g et d'un diviseur $\partial\mathcal{A}_g$. Ce dernier est fibré sur \mathcal{A}_{g-1} par $\rho_g: \partial\mathcal{A}_g \rightarrow \mathcal{A}_{g-1}$. La fibre de $(A, L) \in \mathcal{A}_{g-1}$ est isomorphe à $A/\text{Aut}(A, L)$ par la correspondance ci-dessus. Si Z est un fermé de \mathcal{A}_g , on notera ∂Z l'intersection de l'adhérence de Z dans $\overline{\mathcal{A}}_g^{(1)}$ avec $\partial\mathcal{A}_g$.

On aura besoin d'un calcul d'extension, fait dans [F-S 1], Theorem 5.2, relatif à la situation suivante. Soit $\pi_0: \tilde{N} \rightarrow N$ un revêtement étale connexe de degré 2, où N est lisse de genre g . On note σ l'involution induite sur \tilde{N} et $(P_0, L_0) \in \mathcal{A}_{g-1}$ la variété de Prym associée. Soit C (resp. \tilde{C}) la courbe singulière obtenue à partir de N (resp. \tilde{N}) en identifiant deux points p et q (resp. \tilde{p} et \tilde{q} , et $\sigma\tilde{p}$ et $\sigma\tilde{q}$ où $\pi_0(\tilde{p}) = p$, $\pi_0(\tilde{q}) = q$). On a un revêtement étale induit $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ qui n'est pas admissible. La variété de Prym $P = \text{Ker}(J\tilde{C} \xrightarrow{\text{Nm}} JC)^0$ est extension de P_0 par un tore de dimension 1. Plus précisément:

LEMME 5.6.2 (Friedman-Smith). *L'extension canonique $1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow P \rightarrow P_0 \rightarrow 0$ correspond à l'élément $\mathcal{O}_{\tilde{N}}(\pm(\tilde{q} - \tilde{p} - \sigma\tilde{q} + \sigma\tilde{p}))$ de P_0 .*

On considère maintenant un revêtement $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ dans $\mathcal{S}_{g,0}$, qui est donc associé à $\eta = p^*\delta'$, où $\mathcal{O}(\delta')$ est d'ordre 2 dans $\text{Pic}^0 E$. Si $f = p\pi: \tilde{C} \rightarrow E$, on notera $f^*(JE[2]) = \{0, \varepsilon\}$ (puisque $f^*\delta' \equiv 0$).

LEMME 5.6.3. *Soit $(P, L) \in \text{Pr}(\mathcal{S}_{g,0}) \subset \mathcal{E}_{g-1,0}$ et ε le seul élément non nul de $f^*(JE[2])$. Alors l'extension de P par ε est dans $\partial\mathcal{E}_{g,1}$.*

Démonstration. On considère un élément de $\mathcal{S}_{g+1,1}$, avec les notations 5.1. Si on fait "tendre" P_1 vers P_2 sur E , la courbe C' dégénère en $N'/Q' \sim \tau_0'Q'$ où N' est lisse, revêtement étale de E de degré 2 par $p'_0: N' \rightarrow E$ et $p'_0(Q') = P_1 = P_2$.

