Vol. 57, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © August 1988

SUR LES VARIETES ABELIENNES DONT LE DIVISEUR THETA EST SINGULIER EN CODIMENSION 3

OLIVIER DEBARRE

Introduction. Dans leur article [A–M], Andreotti et Mayer introduisent les sous-ensembles suivants de l'espace des modules $\mathscr{A}_g$ des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g: pour $0 \leqslant k \leqslant g-2$, $\mathscr{N}_k^g$ est le lieu des variétés abéliennes principalement polarisées (A, Θ) avec $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geqslant k$.

Si on note $\mathscr{J}_g \subset \mathscr{A}_g$ le lieu des jacobiennes des courbes lisses de genre g, leur résultat principal peut s'énoncer ainsi:

THÉORÈME (Andreotti–Mayer). *Pour $g \geqslant 4$, l'adhérence $\bar{\mathscr{J}}_g$ de $\mathscr{J}_g$ dans $\mathscr{A}_g$ est une composante irréductible de $\mathscr{N}_{g-4}^g$.*

Les ensembles $\mathscr{N}_k^g$ seront étudiés aussi par la suite par Beauville dans [Be 1]. Si on note $\theta_{\text{null}, g}$ le lieu des variétés abéliennes principalement polarisées (A, Θ) de dimension g avec Θ symétrique telles que $\operatorname{Sing} \Theta$ contienne un point d'ordre 2, il montre par exemple:

THÉORÈME (Beauville). *Le diviseur $\mathscr{N}_0^4$ de $\mathscr{A}_4$ a deux composantes irréductibles, à savoir $\bar{\mathscr{J}}_4$ et $\theta_{\text{null}, 4}$.*

Il étudie aussi $\mathscr{N}_1^5$. Sa méthode consiste à généraliser la construction classique des variétés de Prym en permettant des courbes singulières. En particulier, toutes les variétés abéliennes principalement polarisées de dimension au plus 5 sont alors des variétés de Prym généralisées, pour lesquelles on a une description géométrique.

Mumford utilisera plus tard $\mathscr{N}_0^g$, dont Beauville a remarqué dans [Be 1] que c'est un diviseur de $\mathscr{A}_g$, pour montrer dans [Mu 1] que $\mathscr{A}_g$ est de type général pour $g \geqslant 7$.

Smith et Varley ont montré dans [S–V] le résultat suivant:

THÉORÈME (Smith–Varley). *Le diviseur $\mathscr{N}_0^5$ de $\mathscr{A}_5$ a deux composantes irréductibles, dont l'une est $\theta_{\text{null}, 5}$.*

Enfin, Beauville et moi-même avons montré dans [B–D] le résultat suivant (rappelons que chacune des propriétés (i), (ii), (iii) ci-dessous est satisfaite par les

Received April 12, 1986. Revision received November 13, 1987.

jacobiennes de courbes):

THÉORÈME (Beauville–Debarre). *Si une variété abélienne principalement polarisée* (A, Θ) *satisfait à l'une des propriétés suivantes*:

(i) *Il existe trois éléments non nuls* a, x *et* y *de* A, *distincts deux à deux, vérifiant*: $\Theta \cdot \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.

(ii) *L'hypothèse de Novikov est vérifiée.*

(iii) *La variété de Kummer associée admet une trisécante.*

Alors (A, Θ) *est dans* $\mathcal{N}_{g-4}^g$, *avec* $g = \dim A$.

Ce résultat justifie une étude plus approfondie des ensembles $\mathcal{N}_{g-4}^g$, qu'on entreprend ici pour $g \geqslant 5$.

Le point de départ est le théorème 4.10 de [Be 1], qui dresse la liste de toutes les variétés de Prym généralisées qui sont dans $\mathcal{N}_{g-4}^g$. La construction tétragonale de Donagi permet de réduire cette liste ([Do], 7.2). Ensuite, en utilisant la méthode d'Andreotti et Mayer ([A–M], 5.4.3, 5.4.5) ou les dégénérescences de rang 1 des variétés abéliennes ([Mu 1], 5.6.1), on montre que les familles ainsi construites sont des composantes irréductibles de $\mathcal{N}_{g-4}^g$. Ceci constitue la première partie de cet article. On montre aussi (cf. [We 1]):

THÉORÈME (5.2.5). *Pour* $g \geqslant 6$, *les variétés de Prym sont dans* $\mathcal{N}_{g-6}^g$.

Ce résultat sera précisé dans un article ultérieur, dans lequel nous montrerons que pour $g \geqslant 7$, l'ensemble des variétés de Prym est une composante irréductible de $\mathcal{N}_{g-6}^g$.

Il apparaît que certaines variétés de Prym qui sont dans $\mathcal{N}_{g-4}^g$ sont des cas particuliers d'une construction très simple, qui fait l'objet de la seconde partie.

Cette construction (cf. §9) permet d'associer à toute paire de variétés abéliennes polarisées de même type δ (cf. §1), et de dimensions respectives g' et g'', une variété abélienne principalement polarisée isogène à leur produit, donc en particulier de dimension $g' + g''$. On note $\mathcal{A}_{g', g''}^{\delta}$ la sous-variété de $\mathcal{A}_{g'+g''}$ ainsi construite.

Pour $g'' \geqslant g' \geqslant \deg \delta$, $\mathcal{A}_{g', g''}^{\delta}$ est une sous-variété de $\mathcal{N}_{g-2\deg\delta}^g$ et en est même une composante irréductible dans certains cas (cf. 12.5). On obtient ainsi de nouvelles composantes de $\mathcal{N}_{g-4}^g$, $\mathcal{N}_{g-6}^g$ et $\mathcal{N}_{g-8}^g$.

On obtient aussi le résultat annexe suivant:

THÉORÈME (10.12). *Soit* (A, Θ) *une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension* $g \geqslant 2$. *Alors, pour tout élément de torsion non nul* a *de* A, $\Theta \cdot \Theta_a$ *est lisse de codimension* 2, *irréductible pour* $g \geqslant 3$. *En particulier, si* Θ *est symétrique, les seuls points de torsion sur* Θ *sont d'ordre* 2.

Nos résultats sur $\mathcal{N}_{g-4}^g$ peuvent se résumer ainsi:

THÉORÈME (4.1, 12.5, et 13.2). *Pour* $g \geqslant 5$, *les sous-ensembles suivants de* $\mathcal{A}_g$ *sont des composantes irréductibles distinctes de* $\mathcal{N}_{g-4}^g$:

• *L'adhérence du lieu des jacobiennes des courbes lisses de genre* g. *Sa dimension est* $3g - 3$.

• *L'adhérence* $\mathscr{E}_{g,0}$ *du lieu des variétés de Prym correspondant aux revêtements doubles admissibles des courbes obtenues à partir d'une courbe hyperelliptique lisse de genre* $g - 1$ *en identifiant deux paires de points. Sa dimension est* $2g$.

• *L'adhérence* $\mathscr{E}_{g,1}$ *du lieu des variétés de Prym correspondant aux revêtements doubles admissibles des courbes réunion d'une courbe rationnelle et d'une courbe hyperelliptique lisse de genre* $g - 2$ *se coupant en* 4 *points. Sa dimension est* $2g - 1$.

• *Les familles* $\mathscr{A}^2_{t,g-t}$ *pour* $2 \leqslant t \leqslant g/2$, *de codimension* $t(g - t)$ *dans* $\mathscr{A}_g$.

Toutes ces composantes, à part $\bar{\mathscr{J}}_g$, sont dans $\theta_{\text{null},g}$ (5.2.3, 12.6).

De plus, pour $g = 5$, on obtient les 5 composantes irréductibles de $\mathscr{N}^5_1$, à savoir $\bar{\mathscr{J}}_5$; $\mathscr{E}_{5,0}$; $\mathscr{E}_{5,1}$; $\mathscr{A}^2_{2,3}$ et $\mathscr{A}_{1,4}$ (produits de deux variétés abéliennes de dimensions 1 et 4), de dimensions respectives 12, 10, 9, 9, et 11.

En conclusion, on peut dire que beaucoup de problèmes restent ouverts dans l'étude des ensembles $\mathscr{N}^g_k$, en particulier celui de trouver toutes les composantes de $\mathscr{N}^g_{g-4}$ pour $g \geqslant 6$.

Je tiens à remercier A. Beauville de l'aide et des encouragements qu'il m'a apportés, ainsi que de l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail. Je remercie aussi R. Donagi des explications qu'il m'a données sur un point particulier de cet article.

Terminologie et notations. On travaillera uniquement sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes. Une variété est un schéma réduit de type fini sur $\mathbb{C}$. Un point d'une variété sera toujours un point rationnel sur $\mathbb{C}$. Si F est un faisceau cohérent sur une variété projective X, on notera $h^i(X, F) = \dim H^i(X, F)$ pour $i \geqslant 0$. Si F est de plus inversible, on note $|F|$ le système linéaire des diviseurs effectifs D de X tels que $\mathscr{O}_X(D) \simeq F$ et $\phi_{|F|}$: $X \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(X, F)^\vee$ l'application rationnelle associée si $h^0(X, F) \geqslant 2$.

1. Variétés abéliennes. Pour toute variété abélienne A, on désigne par $A[2]$ le noyau de la multiplication par deux. On notera $\hat{A} = \mathrm{Pic}^0 A$ le groupe des classes d'isomorphisme des faisceaux inversibles sur A algébriquement équivalents à 0. C'est une variété abélienne appelée variété abélienne duale de A ([Mu 6], page 74). A tout morphisme f: $A \to B$, on associe de façon fonctorielle un morphisme dual $\hat{f}$: $\hat{B} \to \hat{A}$.

Pour $a \in A$, on note τ_a l'automorphisme $x \mapsto x + a$ de A. Pour tout faisceau inversible L (resp. diviseur D) sur A, on écrira $L_a = \tau^*_{-a}L$ (resp. $D_a = \tau^*_{-a}(D) = D + a$).

Tout faisceau inversible L définit un morphisme de groupes ([Mu 6], page 59):

$$\phi_L \colon A \to \hat{A}$$

$$a \mapsto L_a \otimes L^{-1}$$

dont le noyau est noté $H(L) = \{a \in A \mid L \simeq L_a\}$.

L'ensemble $\mathscr{G}(L) = \{(a, \alpha) | a \in A, \alpha: L \xrightarrow{\sim} L_a\}$ admet une structure de groupe naturelle ([Mu 5], page 289) pour laquelle on a une suite exacte:

$$1 \to \mathbf{C}^* \to \mathscr{G}(L) \xrightarrow{p} H(L) \to 0. \tag{1.1}$$

On définit une application bilinéaire alternée par:

$$e^L: H(L) \times H(L) \to \mathbf{C}^*$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 \cdot \tilde{x}_1^{-1} \cdot \tilde{x}_2^{-1} \quad \text{où } p(\tilde{x}_j) = x_j.$$

Par exemple, si $L \in \mathrm{Pic}^0 A$ alors $H(L) = A$ ([Mu 6], page 74), $\mathscr{G}(L)$ est un groupe commutatif et $e^L \equiv 1$.

A l'opposé, si L est ample, $H(L)$ est fini, le centre de $\mathscr{G}(L)$ est $\mathbf{C}^*$ et e^L est non-dégénérée ([Mu 7], Theorem 1, page 293). Il existe une suite d'entiers $\delta = (d_1, \ldots, d_k)$, $k \leqslant g$, $1 < d_1 | d_2 | \cdots | d_k$, appelée type de L, telle que la suite (1.1) soit isomorphe à ([Mu 5], Corollary, page 294):

$$1 \to \mathbf{C}^* \to \mathscr{G}(\delta) \to H(\delta) \to 0$$

où

$$K(\delta) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbf{Z}/d_i\mathbf{Z}, \qquad \widehat{K(\delta)} = \mathrm{Hom}(K(\delta), \mathbf{C}^*)$$

$$H(\delta) = K(\delta) \oplus \widehat{K(\delta)}, \quad \mathscr{G}(\delta) = \mathbf{C}^* \times K(\delta) \times \widehat{K(\delta)}$$

avec $(\alpha, x, l) \cdot (\alpha', x', l') = (\alpha\alpha' l'(x), x + x', ll')$.

L'entier $d = d_1 \ldots d_k$ est le degré de L et vérifie, avec $g = \dim A$:

$$\forall\, n, i > 0 \quad h^0(A, L^{\otimes n}) = dn^g, \qquad h^i(A, L^{\otimes n}) = 0. \tag{1.2}$$

$$\text{Si } L = \mathscr{O}_A(D), \quad D^g = d \cdot g!. \tag{1.3}$$

$$d^2 = \mathrm{Card}\, H(L) = \text{Degré}\, \phi_L. \tag{1.4}$$

On notera $\sim$ l'équivalence algébrique entre faisceaux inversibles sur A. Toutes les constructions précédentes, à savoir ϕ_L, $H(L)$, $\mathscr{G}(L)$, e^L, ne dépendent que de la classe d'équivalence algébrique de L.

Si L est ample, les faisceaux inversibles équivalents à L sont les translatés L_a, pour a élément de A. Une polarisation de type δ sur A est une classe d'équivalence de faisceaux inversibles amples de type δ. Par abus de langage, on notera encore L la polarisation définie par la classe de L. Une polarisation principale est une polarisation L de degré 1. On notera alors généralement Θ le seul élément de $|L|$ (cf. 1.2), défini donc à translation près.

Si (A_1, L_1) et (A_2, L_2) sont deux variétés abéliennes polarisées, on notera $L_1 \boxtimes L_2$ la polarisation $\mathrm{pr}_1^*L_1 \otimes \mathrm{pr}_2^*L_2$ sur $A_1 \times A_2$, où $\mathrm{pr}_j\colon A_1 \times A_2 \to A_j$, $j = 1, 2$, sont les deux projections.

On pose $\mathscr{H}_g = \{\tau \in \mathscr{M}_{g\times g}(\mathbb{C}) | \tau$ symétrique et $\operatorname{Im}\tau$ définie positive$\}$. Pour tout "type" $\delta = (d_1, \dots, d_k)$, Δ_δ est la matrice diagonale $g \times g$ de diagonale $(1, \dots, 1, d_1, \dots, d_k)$ et J_δ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \Delta_\delta \\ -\Delta_\delta & 0 \end{pmatrix}$. Le groupe $\Gamma_g(\delta) = \{M \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}) | {}^tMJ_\delta M = J_\delta\}$ agit sur $\mathscr{H}_g$. Le quotient $\mathscr{A}_{g,\delta}$ est un espace analytique normal irréductible quasi-projectif de dimension $\binom{g+1}{2}$, qui est un espace de modules grossier pour les variétés abéliennes polarisées de dimension g et type δ ([Ig 2]).

Les fonctions $\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z, \tau)$ sont définies pour $a, b \in \mathbb{R}^g$, $z \in \mathbb{C}^g$, $\tau \in \mathscr{H}_g$ par:

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i\left[{}^t(n+a)\tau(n+a) + 2{}^t(n+a)(z+b)\right].$$

Si (A, L) est la variété abélienne polarisée de type δ correspondant à $\tau \in \mathscr{H}_g$, une base de $H^0(A, L)$ est donnée par:

$$\left\{\theta\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}(\cdot, \tau) | r \in \Delta_\delta^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g\right\}. \tag{1.5}$$

2. Courbes. Une courbe est une variété projective C de dimension 1. Son genre est défini par $g(C) = 1 - \chi(\mathcal{O}_C)$. On ne considérera que des courbes *connexes avec au plus des points doubles ordinaires* comme singularités. La jacobienne JC de C est un groupe algébrique lisse commutatif dont les points sont naturellement identifiés aux classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur C dont la restriction à chaque composante de C est de degré 0. Ce groupe JC est extension de la jacobienne JN de la normalisée N de C, qui est une variété abélienne principalement polarisée, par un tore. La dimension de JC est $g(C)$. On note aussi $\mathrm{Pic}(C)$ le groupe de Picard de C.

Si C est irréductible, on désigne par $\mathrm{Pic}^d(C)$, pour $d \in \mathbb{Z}$, le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles de degré d sur C, de sorte que $\mathrm{Pic}^0(C)$ est JC.

Pour $g \geq 1$, on note $\mathscr{J}_g \subset \mathscr{A}_g$ le lieu des jacobiennes de courbes lisses connexes de genre g.

Un revêtement double $\pi\colon \tilde{C} \to C$ de courbes projectives lisses connexes est un morphisme fini de degré 2. Sa donnée est équivalente à celle de la classe d'un diviseur δ sur C non équivalent à 0 et d'un diviseur *lisse* $\Delta \in |2\delta|$.

On a:

$$\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \simeq \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(-\delta)$$

$$\forall L \in \mathrm{Pic}(C) \quad H^i(\tilde{C}, \pi^*L) \simeq H^i(C, L) \oplus H^i(C, L \otimes \mathcal{O}_C(-\delta)).$$

Première partie: Les variétés de Prym de $\mathcal{N}^g_{g-4}$

3. Rappel des résultats de Beauville. Commençons par rappeler brièvement la construction des variétés de Prym, en suivant les grandes lignes de [Mu 2].

Si π: $\tilde{C} \to C$ est un revêtement étale de degré deux de courbes projectives lisses connexes, on a une application norme entre les jacobiennes de ces courbes notée Nm_π: $J\tilde{C} \to JC$ ([EGA], II.6.5). Son noyau a deux composantes connexes et la variété de Prym P associée au revêtement π en est par définition la composante neutre. La polarisation principale de $J\tilde{C}$ induit le double d'une polarisation principale sur P.

De façon plus globale, si on désigne par $\mathcal{R}^0_{g+1}$ l'espace des modules des courbes C projectives lisses connexes de genre $g + 1$ munies d'un tel revêtement π, alors $\mathcal{R}^0_{g+1}$ est irréductible de dimension $3g$ et on a une application Prym:

$$\mathrm{Pr}^0\colon \mathcal{R}^0_{g+1} \to \mathcal{A}_g.$$

Beauville a étendu dans [Be 1] la construction des variétés de Prym à certains revêtements de courbes singulières, afin de prolonger l'application Prym en une application propre.

Il définit un revêtement admissible (de degré 2) comme étant un morphisme π: $\tilde{C} \to C$ de degré 2, où $\tilde{C}$ et C sont des courbes projectives connexes avec au plus des points doubles ordinaires comme singularités. On suppose de plus que l'involution σ de $\tilde{C}$ associée satisfait à:

(1) Les seuls points fixes de σ sont des points doubles de $\tilde{C}$ et les deux branches ne sont pas échangées.

(2) Le nombre de points doubles échangés par σ est égal au nombre de composantes de $\tilde{C}$ échangées par σ.

On désigne par $J\tilde{C}$ et JC les jacobiennes généralisées de $\tilde{C}$ et C (cf. 2). Ce sont des groupes algébriques lisses, extensions d'une variété abélienne par un tore. Il y a encore une application norme ([EGA], II.6.5) et $P = (\operatorname{Ker} \mathrm{Nm})^0$ est une variété abélienne principalement polarisée, appelée variété de Prym associée au revêtement π. Sa dimension est $g(C) - 1$.

De nouveau, si on désigne par $\mathcal{R}_{g+1}$ l'espace des modules des revêtements admissibles des courbes stables de genre $g + 1$, on a une application:

$$\mathrm{Pr}\colon \mathcal{R}_{g+1} \to \mathcal{A}_g$$

qui étend Pr^0 et qui est *propre* ([Be 1], [D–S]).

L'application Pr est surjective pour $g \leqslant 5$ ([Be 1]) et génériquement injective pour $g \geqslant 6$ ([F–S 2]).

Dans le théorème 4.10 de [Be 1], Beauville fait, pour $g \geqslant 5$, la liste des revêtements admissibles qui sont dans $\mathrm{Pr}^{-1}(\mathcal{N}^g_{g-4})$ et qui satisfont à deux conditions supplémentaires: la condition $(*)$ de la page 157 de loc. cit. et la stabilité de la courbe C (cf. [D–M], page 76). Il ressort de 4.11.3 et 5.4 de [Be 1] que les variétés de Prym associées aux revêtements de cette liste recouvrent $(\mathcal{N}^g_{g-4} - \bar{\mathcal{J}}_g - \mathcal{A}_g^{\mathrm{pr}}) \cap \mathrm{Pr}(\mathcal{R}_{g+1})$, où $\mathcal{A}_g^{\mathrm{pr}}$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}_g$ produits de deux variétés abéliennes non triviales.

Cette liste en question se décompose en les familles suivantes d'éléments de $\mathcal{R}_{g+1}$ (comme dans [Be 1], une courbe hyperelliptique est une courbe connexe, revêtement de degré 2 de $\mathbb{P}^1$):

1. La courbe C est superelliptique, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de degré 2, $p\colon C \to E$ de C sur une courbe stable de genre 1. Le groupe de Galois de $p\pi\colon \tilde{C} \to E$ est le groupe diédral D_4. La famille $\mathcal{S}'_{g+1}$ obtenue est de dimension $2g$.
2. La courbe C est superelliptique, mais le groupe de Galois de $p\pi\colon \tilde{C} \to E$ est $(\mathbb{Z}/2)^2$. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{C} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
C \arrow[dr, "p"'] & C' \arrow[d] & C'' \arrow[dl] \\
 & E &
\end{tikzcd}$$

   La famille $\mathcal{S}'_{g+1,t}$ est la famille des revêtements pour lesquels $g - t + 1 = g(C'') \geqslant g(C') = t + 1$ (cf. 3.1). Elle est de dimension $2g$ et l'entier t prend les valeurs $0, 1, \ldots, [g/2]$.
3. La courbe C est obtenue à partir d'une courbe hyperelliptique de genre $g - 1$ en identifiant deux paires de points. La famille $\mathcal{H}'_{g+1,0}$ obtenue est de dimension $2g + 1$.
4. La courbe C est réunion d'une courbe rationnelle et d'une courbe hyperelliptique de genre $g - 2$ se coupant en 4 points. La famille $\mathcal{H}'_{g+1,1}$ obtenue est de dimension $2g$.
5. La courbe C est réunion d'une courbe de genre $t - 1 \geqslant 1$ et d'une courbe de genre $g - t - 1 \geqslant t - 1$ se coupant en 4 points. Les familles obtenues, pour $2 \leqslant t \leqslant g/2$, sont notées $\mathcal{H}'_{g+1,t}$. Elles sont de dimension $3g - 4$.
6. Dans le cas où $g = 5$, C est réunion d'une courbe rationnelle coupant une courbe de genre 3 en les 4 points d'un diviseur canonique. La famille $\mathcal{T}_6'$ obtenue est de dimension 9.
7. Dans tous les autres cas cités par Beauville, la variété de Prym obtenue est une jacobienne. (Le seul cas restant, à savoir le cas e) des revêtements "pairs" des quintiques planes est traité dans [Be 2], [Ma], [Tj 1], [Tj 2].)

Remarque 3.1. Ces familles ne sont pas fermées dans $\mathcal{R}_{g+1}$. Si $\mathcal{F}'$ est l'une d'elles ($\mathcal{S}'_{g+1}$; $\mathcal{S}'_{g+1,t}$; $\mathcal{H}'_{g+1,t}$ ou $\mathcal{T}_6'$), on notera $\bar{\mathcal{F}}$ son adhérence dans $\mathcal{R}_{g+1}$. Il est facile de voir que le sous-ensemble de $\mathcal{F}'$ formé des revêtements $\tilde{C} \to C$

pour lesquels

(a) pour les cas 1 et 2, C et E sont lisses connexes;

(b) pour le cas 3, la normalisée de C est connexe de genre $g-1$;

(c) pour les cas 4, 5, 6, C a deux composantes irréductibles qui sont lisses est dense dans $\mathcal{F}'$. On le notera $\mathcal{F}$.

D'autre part, toutes ces familles sont *irréductibles*. Faisons d'abord la remarque suivante. Soit $\mathscr{C} \to S$ une famille irréductible de courbes lisses. Pour tout entier $d \geqslant 1$, on note $\mathscr{C}_S^d = \mathscr{C} \times_S \cdots \times_S \mathscr{C}$ (d fois) et $\mathscr{J}^d = \underline{\mathrm{Pic}}^d(\mathscr{C}/S)$ le schéma de Picard relatif en degré d. On a un morphisme canonique $\mathscr{C}_S^d \to \mathscr{J}^d$. Soit m: $\mathscr{J}^d \to \mathscr{J}^{2d}$ le morphisme induit par l'élévation au carré. Alors le S-schéma $\mathscr{J}^d \times_{\mathscr{J}^{2d}} \mathscr{C}_S^{2d}$ est irréductible puisque la fibre de tout point de S est irréductible de dimension $2d$ (cf., par exemple, Ex. G.8, page 202 de [ACGH]). On en déduit aussitôt l'irréductibilité de $\mathscr{S}_{g+1,0}$ (irréductibilité de la famille des courbes elliptiques avec structure de niveau 2 et remarque précédente avec les courbes elliptiques et $d = g$), celle de $\mathscr{S}_{g+1,t}$, $0 < t \leqslant g/2$ (remarque précédente avec les courbes elliptiques et $d = t, g - t$), celle de $\mathscr{H}_{g+1,t}$, $t = 0, 1$ (courbes hyperelliptiques de genre $g - 1$, $g - 2$ et $d = 2$) et celle de $\mathscr{H}_{g+1,t}$, $2 \leqslant t \leqslant g/2$ (courbes de genre t et $g - t$ avec $d = 2$). L'irréductibilité de $\mathscr{T}_6$ se montre de façon analogue, celle de $\mathscr{S}_{g+1}$ découle de l'existence d'une application dominante $\mathscr{H}_{g+1,0} \to \mathscr{S}_{g+1}$ fournie par la construction tétragonale (7.2.4).

4. Enoncé des résultats. Le théorème ci-dessous rassemble les résultats de la première partie et mentionne aussi les paragraphes où l'on peut trouver les démonstrations.

THÉORÈME 4.1. *Pour* $g \geqslant 5$, *on a*:

(i) $\mathscr{E}_{g,0} = \mathrm{Pr}(\overline{\mathscr{S}_{g+1,0}}) = \mathrm{Pr}(\overline{\mathscr{H}_{g+1,0}}) = \mathrm{Pr}(\overline{\mathscr{S}_{g+1}})$ (*cf.* 7.2.3, 7.2.4) *est de dimension* $2g$ *dans* $\mathscr{A}_g$ (*cf.* 5.4.2). *C'est une composante irréductible de* $\mathscr{N}_{g-4}^g$ (*cf.* 5.4.5) *qui contient les jacobiennes hyperelliptiques* (*cf.* 7.1.2).

(ii) $\mathscr{E}_{g,1} = \mathrm{Pr}(\overline{\mathscr{S}_{g+1,1}}) = \mathrm{Pr}(\overline{\mathscr{H}_{g+1,1}})$ (*cf.* 7.2.3) *est de dimension* $2g-1$ *dans* $\mathscr{A}_g$ (*cf.* 5.4.2). *C'est une composante irréductible de* $\mathscr{N}_{g-4}^g$ (*cf.* 5.6.1, 8.2) *qui contient les jacobiennes superelliptiques* (*cf.* 5.5.3, 7.1.2). *On a aussi* $\mathrm{Pr}(\mathscr{T}_6) \subset \mathscr{E}_{5,1}$ (*cf.* 6.2).

(iii) *Pour* $2 \leqslant t \leqslant g/2$, *on a* $\mathrm{Pr}(\overline{\mathscr{S}_{g+1,t}}) \subset \mathrm{Pr}(\overline{\mathscr{H}_{g+1,t}}) \subset \mathscr{A}_{t,g-t}^2$ (*cf.* 7.2.3, 6.1 *et* 9.3 *pour la définition de* $\mathscr{A}_{t,g-t}^2$).

(iv) *On a ainsi, avec* $\mathscr{J}_g$, $2 + [g/2]$ *composantes irréductibles* (*cf.* 12.5) *distinctes* (*cf.* 8.1 *et* 8.2) *de* $\mathscr{N}_{g-4}^g$.

On en déduit immédiatement (cf. 8.2) que $\mathscr{N}_1^5$ a 5 composantes irréductibles, à savoir $\bar{\mathscr{J}}_5$; $\mathscr{A}_{1,4}$; $\mathscr{E}_{5,0}$; $\mathscr{E}_{5,1}$ et $\mathscr{A}_{2,3}^2$, de dimensions respectives 12, 11, 10, 9, et 9 ($\mathscr{A}_{1,4}$ désigne l'ensemble des variétés abéliennes produit d'une courbe elliptique par une variété abélienne de dimension 4).

Toutes les égalités apparaissant dans le théorème entre les images par l'application Pr de certaines familles de la liste de Beauville, c'est-à-dire tous les résultats de notre section 7, sont dues à Donagi ([Do]). Cependant, il fait erreur sur la dimension de $\mathscr{E}_{5,0}$ et oublie $\mathscr{A}_{1,4}$ et l'inclusion $\Pr(\mathscr{T}_6) \subset \mathscr{E}_{5,1}$.

5. Etude des familles $\mathscr{S}_{g+1,t}$.

5.1. *Notations.* On est dans la situation suivante (cf. 3.1): la courbe C est lisse de genre $g+1 \geqslant 6$. Il existe une courbe elliptique lisse E et un morphisme de degré 2, $p\colon C \to E$ auquel on associe sa ramification $\Delta = P_1 + \cdots + P_{2g}$ sur E, $\delta \in \operatorname{Pic}^g E$ tel que $\Delta \equiv 2\delta$, et une involution τ de C. Il existe un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
& \tilde{C} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "\pi'"] \arrow[dr, "\pi''"] \arrow[dd, bend right, "f"'] & \\
C \arrow[dr, "p"'] & C' \arrow[d, "p'"] & C'' \arrow[dl, "p''"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

On note:

$$g(C'') = g - t + 1 \geqslant g(C') = t + 1.$$

Au morphisme p' sont associés sa ramification $\Delta' = P_1 + \cdots + P_{2t}$, $\delta' \in \operatorname{Pic}^t E$ tel que $\Delta' \equiv 2\delta'$, et une involution τ'' de C'.

A p'' sont associés $\Delta'' = \Delta - \Delta'$, $\delta'' = \delta - \delta'$ et une involution τ'' de C''.

Soient $Q_1, \ldots, Q_{2g}$ les points de ramification de p sur C. Le morphisme étale π est associé à l'élément suivant d'ordre 2 dans $\operatorname{Pic}^0 C$:

$$\eta \equiv Q_1 + \cdots + Q_{2t} - p^*\delta' \equiv Q_{2t+1} + \cdots + Q_{2g} - p^*\delta''.$$

On note σ l'involution sans point fixe de $\tilde{C}$ induite par π. Le morphisme π' (resp. π'') est ramifié sur $p'^*(\Delta'')$ (resp. $p''^*(\Delta')$) et induit une involution σ' (resp. $\sigma'' = \sigma\sigma'$) sur $\tilde{C}$.

5.2. *Etude du lieu singulier du diviseur thêta.* La variété de Prym (P, Ξ) associée à π peut être définie par ([Mu 2], Proposition page 242):

$$P = \{ L \in \operatorname{Pic}^{2g}\tilde{C} \mid \operatorname{Nm} L = \omega_C,\ h^0(L) \text{ pair} \}$$

$$\Xi = \{ L \in P \mid h^0(L) \geqslant 2 \}.$$

L'involution $x \mapsto -x$ de P est alors $L \mapsto \omega_{\tilde{C}} \otimes L^{-1}$ et le diviseur Ξ est symétrique.

PROPOSITION 5.2.1. *On a*:

$$\Xi = \left\{ \pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \mid L' \in \operatorname{Pic}^t C',\ L'' \in \operatorname{Pic}^{g-t} C'',\ h^0(L') \geqslant 1,\ h^0(L'') \geqslant 1, \right.$$
$$\left. \operatorname{Nm}_{p'} L' \otimes \operatorname{Nm}_{p''} L'' = \mathcal{O}(\delta) \right\}.$$

Démonstration. Soit $L \in \Xi$. On considère $\pi_*\colon\ |L| \to |\omega_C|$. Comme $\dim|L| \geqslant 1$, son image rencontre l'hyperplan $p^*|\delta|$ de $|\omega_C|$, et:

$$\exists\, D \in |L| \quad \pi_* D = p^* M \quad \text{avec } M \in |\delta|.$$

On peut alors écrire $D = \pi'^*D' + \pi''^*D''$ avec D' et D'' effectifs. L'espace Ξ est donc recouvert par les fermés:

$$Z_a = \{ \pi'^*\mathcal{O}(D') \otimes \pi''^*\mathcal{O}(D'') \mid D' \text{ (resp. } D'') \text{ diviseur effectif de degré } t + a$$
$$\text{(resp. } g - t - a) \text{ vérifiant } p'_*D' + p''_*D'' \equiv \delta \},$$

pour $-t \leqslant a \leqslant g - t$.

Or, pour $L \in Z_{g-t}$, on a:

$$\begin{aligned} h^0(L) &= h^0(\pi'^*\mathcal{O}(D')) = h^0(D') + h^0(D' - p'^*\delta'') \\ &= h^0(D') + h^0(K_{C'} - D' + p'^*\delta'') + t - g \\ &= h^0(D') + h^0(p'^*\delta - D') + t - g \\ &= h^0(D') + h^0(\tau'^*D') + t - g = 2h^0(D') + t - g. \end{aligned}$$

On déduit de [Mu 3], page 187, que:

$$Z_a \subset P \Leftrightarrow a \text{ est pair}.$$

On remarque alors que pour $|a| \geqslant 2$, on a par Riemann–Roch $h^0(D') \geqslant 2$ ou $h^0(D'') \geqslant 2$. Or on a:

$$\dim Z_a \leqslant \dim|\delta| - \min_{L \in Z_a} (\dim|D'| + \dim|D''|),$$

donc $\dim Z_a < g - 1 = \dim \Xi$ pour $|a| \geqslant 2$. Le diviseur Ξ est donc égal à Z_0. ■

Le lieu singulier du diviseur Ξ est réunion des deux ensembles suivants ([Mu 2], §6):

$$\{ L \in \Xi \mid h^0(L) \geqslant 4 \}$$