Séminaire BOURBAKI Juin 2002
54ème année, 2001-2002, n° 905

VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES
[d'après T. GRABER, J. HARRIS, J. STARR et A.J. de JONG]

par **Olivier DEBARRE**

1. LE THÉORÈME POUR LES VARIÉTÉS COMPLEXES

Une variété complexe[1] X est *rationnellement connexe* si deux points généraux de X peuvent être reliés par une courbe rationnelle, c'est-à-dire sont dans l'image d'un morphisme $\mathbf{P}^1 \to X$. On peut donner les exemples suivants.

- Toute variété propre rationnelle, ou même seulement unirationnelle, c'est-à-dire dominée par un espace projectif, est rationnellement connexe. Toutes ces notions sont équivalentes pour les variétés propres et lisses de dimension au plus 2.
- Une variété de Fano (c'est-à-dire une variété projective et lisse dont le déterminant du fibré tangent est ample) est rationnellement connexe ([C1], [KMM1], [KMM2]). En particulier, une hypersurface lisse de $\mathbf{P}^n$ de degré au plus n est rationnellement connexe.

En dimension au moins 3, la connexité rationnelle devient une propriété plus générale que la rationalité (et, conjecturalement, que l'unirationalité) qui s'est révélée être aussi beaucoup plus maniable : pour les familles de variétés complexes propres et lisses, elle est ouverte et fermée (*cf.* § 2) et il en existe, au moins conjecturalement, une caractérisation numérique (*cf.* conjecture 3.3). On peut faire remonter au moins à Mumford au début des années 80 l'idée (orale) de la définition et de cette conjecture, mais c'est dans [KMM2] que Kollár, Miyaoka et Mori donnent véritablement son essor à cette théorie. Le résultat central qui restait manquant, la dernière pièce du puzzle, qui montre en un certain sens que l'intuition de Mumford, Kollár, Miyaoka et Mori était la bonne, et qui couronne leur théorie, est le théorème ci-dessous, conjecturé dans [KMM2], et qui fait l'objet de cet exposé. Il confirme la place centrale qu'occupe la connexité rationnelle dans l'étude des variétés de dimension supérieure.

[1] C'est-à-dire un schéma séparé, intègre et de type fini sur $\mathbf{C}$.

Théorème 1.1 (Graber–Harris–Starr). — *Un morphisme propre d'une variété complexe sur une courbe lisse dont les fibres générales sont rationnellement connexes a une section.*

Ce résultat est démontré dans la prépublication [GHS][2], et généralisé par de Jong et Starr dans la prépublication [dJS] au cas d'un corps de base algébriquement clos quelconque (th. 2.1). La démonstration dans le cas complexe est expliquée dans le § 4, tandis que les modifications à apporter dans le cas général font l'objet du § 5.

Soit K le corps des fonctions d'une courbe complexe, c'est-à-dire une extension de $\mathbf{C}$ de degré de transcendance 1. Le théorème 1.1 peut s'énoncer ainsi :

1.2.— *Toute variété X définie sur K, propre et rationnellement connexe*[3]*, a un point rationnel sur K.*

L'origine de ce genre de résultat remonte à M. Noether, qui montre dans [N] qu'une surface fibrée en coniques sur $\mathbf{P}^1$ admet une section, résultat généralisé ensuite par Enriques au cas d'une courbe base irrationnelle ([En]), puis enfin par Tsen, qui montre dans [T] qu'étant donné le corps des fonctions K d'une courbe, toute hypersurface de $\mathbf{P}^n_K$ de degré au plus n a un point rationnel sur K (dans la terminologie d'E. Artin, K est « quasi algébriquement clos », dans celle de Lang, K est C_1). On trouve aussi des cas particuliers du théorème de Tsen dans des articles postérieurs de Conforto et Severi[4]. Enfin, Campana, Peternell et Pukhlikov donnent dans [CPP] une démonstration différente du théorème 1.2 lorsque X est une variété de Fano de dimension 3.

L'énoncé 1.2 était aussi déjà connu lorsque X est une surface propre, lisse et rationnellement connexe et K un corps C_1 ([M], [CT]) ou un espace homogène sous un groupe algébrique linéaire connexe et K un corps C_1 parfait (théorème de Chevalley–Springer ; *cf.* [S], III-14-16 et [B], 18.2).

[2]Graber, Harris, Mazur et Starr annoncent aussi la « réciproque » suivante au théorème 1.1 : étant donné un morphisme $u : X \to B$ entre variétés complexes propres et lisses, il existe une famille de courbes projectives, lisses et connexes contenues dans B telle que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) le morphisme u a une section au-dessus d'une courbe générale de cette famille ;

(ii) il existe une sous-variété Y de X telle que les fibres générales de $u|_Y : Y \to B$ soient rationnellement connexes (*cf.* note 6).

Ce résultat leur permettrait de construire une famille sans section de surfaces d'Enriques paramétrée par une courbe lisse : le théorème 1.1 ne se généraliserait donc pas aux variétés complexes X vérifiant par exemple la condition plus faible (*cf.* 3.4) $H^m(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $m > 0$. Ceci répondrait négativement à une question de Serre ([CS], p. 152).

[3]C'est-à-dire que si $\bar{K}$ est une clôture algébrique de K, la variété $X_{\bar{K}}$ satisfait à la définition ci-dessus ; *cf.* aussi § 2.

[4]L'article de Tsen, paru en allemand dans une revue chinoise en 1936, n'a pas dû avoir à cette époque la diffusion qu'il méritait.

Il est naturel de poser la question suivante : l'énoncé 1.2 reste-t-il valable pour tout corps C_1 ? Esnault y répond par l'affirmative dans la prépublication [Es] lorsque K est un corps fini[5].

Quelques conventions : une *variété* X est un schéma séparé géométriquement intègre de type fini défini sur un corps $\mathbf{k}$; pour toute extension $\mathbf{k}'$ de $\mathbf{k}$, on note $X_{\mathbf{k}'}$ la variété $X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{k})} \mathrm{Spec}(\mathbf{k}')$. On note Ω_X le faisceau des différentielles sur X ; lorsque X est une variété lisse, c'est le dual du fibré tangent T_X. Une *courbe* est un schéma séparé géométriquement réduit et connexe, de dimension 1, défini sur un corps, qui n'est pas nécessairement irréductible.

On dit qu'un point *général* (resp. *très général)* d'une variété vérifie une propriété donnée si l'ensemble des points qui la vérifie contient un ouvert non vide (resp. une intersection dénombrable d'ouverts non vides).

Je voudrais remercier T. Graber et J. Kollár de leurs patientes explications, ainsi que P. Baumann, A. Beauville, K. Behrend, J.-F. Boutot, A. Chambert-Loir, J.-L. Colliot-Thélène, H. Esnault, O. Gabber, J. Harris, J. de Jong, V. Kharlamov, Y. Laszlo, L. Moret-Bailly, M. Perret, M. Raynaud, Ph. Satgé et J. Starr de leurs conseils et suggestions.

2. VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES ET SÉPARABLEMENT RATIONNELLEMENT CONNEXES

La définition de la connexité rationnelle donnée au début du § 1, valable sur le corps des complexes (ou sur tout corps algébriquement clos non dénombrable), se traduit sur un corps quelconque de la façon suivante : une variété X définie sur un corps $\mathbf{k}$ est *rationnellement connexe* s'il existe un $\mathbf{k}$-schéma de type fini T et un morphisme

$$F : T \times \mathbf{P}^1 \to X$$

(auquel il faut penser comme à une famille de courbes rationnelles sur X paramétrée par T) tels que le morphisme

$$\begin{array}{rcl} T \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 & \longrightarrow & X \times X \\ (t, u, u') & \longmapsto & \big(F(t,u), F(t,u')\big) \end{array} \tag{1}$$

soit dominant[6]. Si X est lisse et $\mathbf{k}$ algébriquement clos de caractéristique nulle, c'est équivalent à demander que son application tangente soit surjective en un point (t_0, u_0, u'_0). Notant f la courbe $F(t_0, \cdot) : \mathbf{P}^1 \to X$, on vérifie ([D2], Cor. 4.17) que c'est le cas si et seulement si $H^1(\mathbf{P}^1, f^*T_X(-2)) = 0$; on dit que la courbe rationnelle f est *très libre.*

[5]Plus précisément, Esnault montre, pour toute variété X propre et lisse définie sur un corps fini $\mathbf{k}$ qui vérifie $CH_0((X \times \mathrm{Spec}(\overline{\mathbf{k}(X)})) \simeq \mathbf{Z}$, la congruence $\mathrm{Card}(X(\mathbf{k})) \equiv 1 \pmod q$. Cela s'applique aux variétés propres, lisses et rationnellement connexes définies sur $\mathbf{k}$.

[6]Un point est rationnellement connexe, le vide ne l'est pas.

La présence d'une courbe rationnelle très libre sur une variété rationnellement connexe, souvent essentielle dans les applications, n'est pas assurée en caractéristique non nulle[7]. Cela conduit à dire qu'une variété X est *séparablement rationnellement connexe* s'il existe T et $F : T \times \mathbf{P}^1 \to X$ comme ci-dessus tels que le morphisme (1) soit *génériquement lisse.* Une variété lisse X est alors séparablement rationnellement connexe si et seulement s'il existe sur X une courbe rationnelle très libre. En caractéristique nulle, les deux notions sont bien sûr identiques.

On peut maintenant énoncer la version du théorème 1.1 valable en toute caractéristique.

THÉORÈME 2.1 (de Jong–Starr). — *Un morphisme propre d'une variété lisse sur une courbe lisse, dont les fibres générales sont des variétés lisses et séparablement rationnellement connexes, a une section.*

De nouveau, ce résultat peut s'énoncer : *toute variété propre, lisse et séparablement rationnellement connexe définie sur le corps des fonctions d'une courbe a un point rationnel sur ce corps.* Il sera démontré dans le § 5.

Un produit fini de variétés (séparablement) rationnellement connexes est (séparablement) rationnellement connexe, un revêtement étale fini d'une variété (séparablement) rationnellement connexe est (séparablement) rationnellement connexe. La connexité rationnelle (séparable) est une propriété birationnelle parmi les variétés propres. Enfin, pour les familles de variétés propres et lisses, la propriété d'être séparablement rationnellement connexe est ouverte[8] et, en caractéristique nulle, fermée[9].

Il existe beaucoup de courbes rationnelles sur une variété séparablement rationnellement connexe, comme le montre le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. — *Soit X une variété propre et lisse définie sur un corps algébriquement clos. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la variété X est séparablement rationnellement connexe ;*

(ii) *étant donnés des points $p_1, \ldots, p_r$ de X et des directions tangentes $\ell_1, \ldots, \ell_r$ en ces points, il existe une courbe rationnelle très libre $\mathbf{P}^1 \to X$ non ramifiée qui passe par chaque p_i dans la direction ℓ_i ;*

En caractéristique nulle, elles sont de plus équivalentes à :

(iii) *deux points généraux de X peuvent être reliés par une chaîne de courbes rationnelles.*

La démonstration se trouve dans [KMM2], 2.4, ou [Ko1], Th. IV.3.9.4, sauf pour ce qui concerne les directions tangentes, point pour lequel on pourra consulter [D2], Ex. 4.8.6.

[7]Kollár construit dans [Ko2] des variétés de Fano, donc projectives, lisses et rationnellement connexes, sans courbe rationnelle très libre (c'est-à-dire non séparablement rationnellement connexes).

[8]Cela résulte de leur caractérisation par l'existence d'une courbe rationnelle très libre.

[9]Cela résulte de leur caractérisation par la condition (iii) ci-dessous.

3. QUELQUES COROLLAIRES

Le théorème 1.1 est énoncé comme « Problem » dans [Ko1], IV.6, et l'on trouve déjà dans ce livre les corollaires suivants ([Ko1], Propositions IV.5.6.3 et IV.5.7).

3.1. Morphismes à base et fibres rationnellement connexes

COROLLAIRE 3.1. — *Soit $u : X \to Y$ un morphisme propre entre variétés complexes. Si Y et les fibres générales de u sont rationnellement connexes, il en est de même de X.*

PREUVE — Soient x_1 et x_2 des points généraux de X et $\mathbf{P}^1 \to Y$ une courbe rationnelle joignant $u(x_1)$ et $u(x_2)$. On note X' l'unique composante irréductible de $X \times_Y \mathbf{P}^1$ qui domine $\mathbf{P}^1$ et $\widetilde{X}' \to X'$ une désingularisation. Les fibres générales de $\widetilde{u}' : \widetilde{X}' \to \mathbf{P}^1$ sont propres et birationnelles à des fibres générales de u, donc sont rationnellement connexes. Le théorème entraîne que $\widetilde{u}'$ a une section $\sigma : \mathbf{P}^1 \to \widetilde{X}'$. On peut donc connecter deux points généraux $\widetilde{x}'_1$ et $\widetilde{x}'_2$ de $\widetilde{X}'$ par une chaîne de trois courbes rationnelles : une pour joindre $\widetilde{x}'_1$ à $\sigma(\widetilde{u}'(\widetilde{x}'_1))$, la section σ, et une pour joindre $\sigma(\widetilde{u}'(\widetilde{x}'_2))$ à $\widetilde{x}'_2$. Le théorème 2.2 entraîne que $\widetilde{X}'$ est rationnellement connexe, donc que x_1 et x_2 peuvent être joints par une courbe rationnelle. □

3.2. Le quotient rationnel n'est pas uniréglé

Soit X une variété complexe propre et lisse ; Campana montre dans [C2] (*cf.* aussi [D2], Chap. 5) qu'il existe un ouvert dense X^0 de X, une variété lisse $R(X)$ et un morphisme *propre* $\rho : X^0 \to R(X)$ tels que :

(Q1) les fibres de ρ sont rationnellement connexes ;

(Q2) toute courbe rationnelle de X rencontrant une fibre très générale de ρ est contenue dans cette fibre.

La variété $R(X)$ est uniquement déterminée à isomorphisme birationnel près ; on l'appelle le *quotient rationnel* de X. La variété X est rationnellement connexe si et seulement si $R(X)$ est un point ; elle est uniréglée[10] si et seulement si $\dim(R(X)) < \dim(X)$.

COROLLAIRE 3.2. — *Le quotient rationnel d'une variété complexe propre et lisse n'est pas uniréglé.*

PREUVE — Soient X une variété complexe propre et lisse et $\rho : X \dashrightarrow R(X)$ son quotient rationnel. Quitte à prendre des modèles birationnels (le quotient rationnel est un invariant birationnel pour les variétés propres et lisses), on peut supposer que $R(X)$ est projectif et que ρ est un morphisme. Soient $\mathbf{P}^1 \to R(X)$ une courbe rationnelle passant par un point

[10] Une variété X de dimension n est uniréglée s'il existe une variété Y de dimension $n-1$ et une application rationnelle dominante $\mathbf{P}^1 \times Y \dashrightarrow X$ (un point n'est donc pas uniréglé). Pour une variété complexe propre X, cela signifie simplement qu'il passe une courbe rationnelle par chaque point de X.

très général de $R(X)$ et X' une désingularisation de l'unique composante irréductible de $X \times_{R(X)} \mathbf{P}^1$ qui domine $\mathbf{P}^1$. Le théorème 1.1 entraîne que $X' \to \mathbf{P}^1$ a une section, ce qui contredit la propriété (Q2) du quotient rationnel. $\square$

3.3. Caractérisations numériques

Comme mentionné dans l'introduction, on espère pouvoir caractériser numériquement les variétés complexes rationnellement connexes.

CONJECTURE 3.3. — *Une variété complexe projective et lisse X est rationnellement connexe si et seulement si $H^0(X, \Omega_X^{\otimes m}) = 0$ pour tout entier $m > 0$.*

On a une conjecture analogue pour les variétés uniréglées.

CONJECTURE 3.4. — *Une variété complexe projective et lisse X est uniréglée si et seulement si $H^0(X, (\mathrm{dét}(\Omega_X))^{\otimes m}) = 0$ pour tout entier $m > 0$.*

Pour chacune de ces conjectures, le sens direct est élémentaire ([D2], Cor. 4.17 et Cor. 4.12). La réciproque n'est connue qu'en dimension au plus 3 ([KMM2]) ; elle est conséquence en toute dimension du Programme du Modèle Minimal de Mori.

COROLLAIRE 3.5. — *La conjecture 3.4 entraîne la conjecture 3.3.*

Démonstration. Soient X une variété complexe projective et lisse qui n'est pas rationnellement connexe et $\rho : X \dashrightarrow R(X)$ son quotient rationnel. Quitte à prendre des modèles birationnels (les espaces vectoriels $H^0(X, \Omega_X^{\otimes m})$ sont des invariants birationnels pour les variétés propres et lisses), on peut supposer que $R(X)$ est projectif et lisse, de dimension $r > 0$, et que ρ est un morphisme. Si la conjecture 3.4 est vérifiée, le corollaire 3.2 entraîne qu'il existe une section non nulle de $(\mathrm{dét}(\Omega_{R(X)}))^{\otimes m}$ pour un $m > 0$. Comme ce fibré en droites est facteur direct de $\Omega_{R(X)}^{\otimes rm}$, ce dernier a aussi une section non nulle, qui se relève en une section non nulle de $\Omega_X^{\otimes rm}$. $\square$

3.4. Groupe fondamental

Soient X une variété propre, lisse et séparablement rationnellement connexe et m un entier strictement positif. Comme la restriction de Ω_X à une courbe rationnelle très libre est somme directe de fibrés en droites de degré négatif, toute section de $\wedge^m \Omega_X$ s'annule sur cette courbe. Les courbes rationnelles très libres recouvrant un ouvert dense de X, les groupes $H^0(X, \wedge^m \Omega_X)$ sont tous nuls.

En caractéristique nulle, la dualité de Hodge entraîne $H^m(X, \mathscr{O}_X) = 0$, de sorte que $\chi(X, \mathscr{O}_X) = 1$. Étant donné un revêtement étale connexe $u : Y \to X$, la variété Y est encore séparablement rationnellement connexe, d'où $\chi(Y, \mathscr{O}_Y) = 1$, de sorte que u est de degré $\chi(Y, \mathscr{O}_Y)/\chi(X, \mathscr{O}_X) = 1$: la variété X est donc algébriquement simplement connexe. Sur $\mathbf{C}$, on montre même que X est simplement connexe (*cf.* [D2], Cor. 4.18).

En caractéristique non nulle, l'annulation de $H^m(X, \mathscr{O}_X)$ n'est pas connue[11]. On peut cependant, comme me l'a signalé Kollár, déduire la simple connexité de X du théorème 2.1[12].

COROLLAIRE 3.6 (Kollár). — *Une variété propre, lisse et séparablement rationnellement connexe est algébriquement simplement connexe.*

PREUVE — Soit X une variété propre, lisse et séparablement rationnellement connexe sur un corps algébriquement clos $\mathbf{k}$ de caractéristique p ; il s'agit de montrer que tout revêtement étale connexe galoisien $Y \to X$ est trivial. Si ce n'est pas le cas, il existe une factorisation $Y \xrightarrow{u} X' \to X$, où le groupe de Galois de u est cyclique d'ordre ℓ premier. Dans cette situation, X' est aussi propre, lisse et séparablement rationnellement connexe. La classification des revêtements cycliques d'une variété (théories de Kummer et d'Artin–Schreier) nous apprend qu'il existe un recouvrement de X' par des ouverts affines U_i et,

- si $\ell \neq p$, des fonctions régulières $h_i : U_i \to \mathbf{k}^*$ et $e_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbf{k}^*$ telles que $e_{ij}e_{jk}e_{ki} = 1$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ et $e_{ij}^\ell = h_i h_j^{-1}$ sur $U_i \cap U_j$, l'ouvert affine $u^{-1}(U_i)$ étant défini par l'équation $h_i = t_i^\ell$ dans $U_i \times \mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$ et le recollement se faisant par $t_i = e_{ij}t_j$;
- si $\ell = p$, des fonctions régulières $h_i : U_i \to \mathbf{k}$ et $e_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbf{k}$ telles que $e_{ij} + e_{jk} + e_{ki} = 0$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ et $e_{ij}^p - e_{ij} = h_i - h_j$ sur $U_i \cap U_j$, l'ouvert affine $u^{-1}(U_i)$ étant défini par l'équation $h_i = t_i^p - t_i$ dans $U_i \times \mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$ et le recollement se faisant par $t_i = e_{ij} + t_j$.

Posons $B = \operatorname{Spec} \mathbf{k}[t]$; on construit une sous-variété $\mathscr{Y}$ de $X' \times B$ comme la réunion des variétés affines définies dans $U_i \times \mathbf{A}^1_{\mathbf{k}} \times B$ de la façon suivante :

- si $\ell \neq p$, par l'équation $th_i = t_i^\ell$, le recollement se faisant par $t_i = e_{ij}t_j$;
- si $\ell = p$, par l'équation $h_i = t_i^p - t^{p-1}t_i$, le recollement se faisant par $t_i = te_{ij} + t_j$.

Les fibres de $\mathscr{Y} \to B$ hors de 0 sont isomorphes à Y, donc sont séparablement rationnellement connexes. La fibre en 0 est isomorphe à X', compté avec multiplicité ℓ. Ce morphisme admet une section par le théorème 2.1, ce qui entraîne $\ell = 1$. $\square$

3.5. Déformation de morphismes

Nous aurons à plusieurs reprises besoin d'étudier les déformations d'un morphisme $f : C \to X$ d'une courbe C projective (variable) à points doubles ordinaires vers une variété projective fixe X, lisse sur l'image de f.

[11] En dimension 3, elle est connue pour les variétés séparablement unirationnelles ([Ny]) et pour les variétés de Fano ([SB]).

[12] La trivialité du p-sous-groupe de Sylow du groupe fondamental était déjà connue ([E] et [Su]). Noter qu'il existe des surfaces unirationnelles qui ne sont pas simplement connexes ([Sh], prop. 5).

Notons E^i l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^i(f^*\Omega_X \to \Omega_C, \mathscr{O}_C)$; les déformations au premier ordre de f sont paramétrées par E^1 et les obstructions sont dans E^2 : cela signifie que les déformations de f sont paramétrées par un schéma séparé quasi-projectif qui peut être défini au voisinage de $[f]$ par $\dim(E^2)$ équations dans une variété lisse de même dimension que E^1. Le noyau de la différentielle $f^*\Omega_X \to \Omega_C$ est localement libre ; son dual, le *fibré normal* à C dans X, est noté $N_{C/X}$. On a une suite exacte

$$0 \to N^*_{C/X} \to f^*\Omega_X \to \Omega_C \to \Omega_{C/X} \to 0.$$

EXEMPLES 3.7. — (1) Si X est une courbe et que f est lisse sur un ouvert dense de C, le complexe $f^*\Omega_X \to \Omega_C$ est quasi-isomorphe au complexe gratte-ciel $0 \to \Omega_{C/X}$ et les E^i sont nuls pour $i \neq 1$. Il n'y a pas d'obstruction et l'espace vectoriel E^1 est de dimension le degré du diviseur de ramification de f. Un décompte de paramètres montre qu'une déformation générale de f est un revêtement de X de même degré d que f qui est *simple* (c'est-à-dire avec au moins $d-1$ points dans chaque fibre).

(2) Lorsque f n'est pas ramifié, c'est-à-dire que $\Omega_{C/X}$ est nul, le complexe $f^*\Omega_X \to \Omega_C$ est quasi-isomorphe au complexe $N^*_{C/X} \to 0$ et E^i est isomorphe à $H^{i-1}(C, N_{C/X})$.

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DANS LE CAS COMPLEXE

Dans ce qui suit, on se donne, sur le corps des complexes, une variété propre X et une courbe B projective et lisse, ainsi qu'un morphisme surjectif $u : X \to B$ dont les fibres générales sont rationnellement connexes ; on désire montrer que u a une section.

On peut supposer[13] B *rationnelle* : choisissons un revêtement ramifié quelconque $g : B \to \mathbf{P}^1$ de degré d, auquel correspond un morphisme de $\mathbf{P}^1$ dans le produit symétrique $B^{(d)}$. Posant[14] $Y = \mathbf{P}^1 \times_{B^{(d)}} X^{(d)}$, on obtient un morphisme $Y \to \mathbf{P}^1$ dont la fibre au-dessus d'un point t de $\mathbf{P}^1$ est le produit

$$\prod_{b \in g^{-1}(t)} u^{-1}(b)$$

qui est donc rationnellement connexe. Si $Y \to \mathbf{P}^1$ a une section, il en est de même de $X \to B$.

Quitte à remplacer X par une désingularisation, on peut aussi supposer que X est *projective et lisse.*

Les grandes lignes de la démonstration sont les suivantes : partant d'une multisection de u, c'est-à-dire d'une courbe lisse C dans X qui domine B, on montre que la réunion de C et de suffisamment de queues rationnelles très libres contenues dans les fibres de u

[13]Cela ne sert que pour le théorème 4.1.

[14]Pour ceux qui préfèrent la version « birationnelle », on peut aussi, en posant $L = K(B)$ et $K = K(\mathbf{P}^1)$, considérer la restriction « à la Weil » $Y_K = R_{L/K}X_L$. C'est une variété définie sur K qui vérifie $Y_{\bar{L}} \simeq X^d_{\bar{L}}$ et $Y_K(K) = X_L(L)$. Elle est donc rationnellement connexe, et l'existence d'un L-point de X_L est équivalente à celle d'un K-point de Y_K.

(ici intervient la connexité rationnelle de ces fibres) admet suffisamment de déformations lisses $C' \to X$ pour que ceux des points de ramification du revêtement $C' \to B$ induit par u *qui appartiennent au lieu où* u *est lisse* se déplacent dans des directions arbitraires sur X.

Supposons un instant qu'il existe une multisection C de u contenue dans le lieu de lissité de u. La construction précédente fournit une autre multisection C' dont les déformations dans X ont des lieux de branchement sur B qui sont généraux. Comme B est rationnelle, les revêtements $C' \to B$ forment un espace irréductible (appelé *schéma de Hurwitz*) et dégénèrent en des revêtements qui ont des sections. La considération des espaces de Kontsevich des *courbes stables* permet de compactifier ces espaces de déformations de courbes et de relever ces dégénérescences sur X. On obtient ainsi une section de u.

Le problème reste de construire une multisection de u qui évite le lieu où u n'est pas lisse. Si ce lieu est de codimension au moins 2, cela résulte du théorème de Bertini. En revanche, si une multisection C rencontre une composante multiple d'une fibre de u, elle y est ramifiée au-dessus de B et aucune déformation de C ne pourra déplacer le point de branchement correspondant sur B. C'est là le cœur de l'argument de [GHS] : l'idée est de créer de nouveaux points de ramification que l'on fait ensuite converger vers la ramification située dans les composantes multiples de fibres. Toute composante « horizontale » de la courbe stable limite évite alors les composantes multiples de fibres et l'on peut appliquer la construction précédente.

4.1. Où l'on se ramène à la construction d'une multisection vérifiant certaines propriétés

L'objet de ce paragraphe est de montrer que l'existence d'une multisection de u possédant « suffisamment » de déformations (conditions (C2) ci-dessous) suffit à assurer l'existence d'une section. On ne se sert pas ici de la connexité rationnelle des fibres de u.

THÉORÈME 4.1. — *Soient X une variété et C une courbe, complexes, projectives et lisses. On se donne des morphismes $u : X \to \mathbf{P}^1$ et $f : C \to X$ tels que :*

(C1) *la ramification R de $u \circ f$ est simple et contenue dans l'image inverse par f du lieu lisse de u ;*

(C2) *l'espace vectoriel $H^1(C, N_{C/X}(-R))$ est nul.*

Alors u a une section.

PREUVE — La condition (C2) entraîne $H^1(C, N_{C/X}) = 0$; par Ex. 3.7(2), les déformations de C dans X sont donc paramétrées par un schéma qui est lisse de dimension $h^0(C, N_{C/X})$ au voisinage de $[C]$. De plus, la restriction

$$H^0(C, N_{C/X}) \to (N_{C/X})|_R$$

est surjective ; cela signifie que par déformation $f' : C' \to X$ de f, les images dans X des points de R peuvent être indépendamment déplacées dans des directions normales à C arbitraires. Comme, par (C1), la différentielle de $u \circ f$ induit en chaque point p de R une surjection $N_{C/X,p} \to T_{\mathbf{P}^1, u\circ f(p)}$, les points de *branchement* de $u \circ f'$ peuvent aussi être indépendamment déplacés dans $\mathbf{P}^1$ dans des directions arbitraires. Le revêtement $u \circ f'$ est en particulier simple. Or les revêtements simples de $\mathbf{P}^1$ de degré d et genre g fixés forment un schéma lisse *irréductible*[15] de dimension $2d + 2g - 2$ (un pour chaque point de branchement) que l'on notera $M_g(\mathbf{P}^1, d)^h$: par déformation de $f : C \to X$, on remplit donc, en composant par u, un ouvert dense de $M_g(\mathbf{P}^1, d)^h$.

Comme on l'a expliqué plus haut, l'idée est de faire dégénérer ces revêtements et de montrer que ces dégénérescences se relèvent à X. On introduit pour cela des compactifications des espaces de courbes, construites de la façon suivante.

Soient β un élément de $H_2(X, \mathbf{Z})$ et g un entier positif. Une courbe quasi-stable de genre g de degré β sur X est la donnée d'une courbe connexe projective C de genre g dont les singularités sont des points doubles ordinaires et d'un morphisme $f : C \to X$ tels que $f_*C = \beta$. Elle est *stable* s'il n'y a qu'un nombre fini d'automorphismes $\sigma : C \to C$ tels que $f \circ \sigma = f$, c'est-à-dire si toute composante rationnelle lisse de C contractée par μ contient au moins 3 points singuliers de C. On peut toujours *stabiliser* une courbe quasi-stable $f : C \to X$ en contractant dans C les composantes rationnelles lisses contractées par f et contenant au plus 2 points singuliers de C.

On définit de façon analogue les familles plates de courbes stables de genre g de degré β sur X ; il existe un espace de modules grossier, noté $\overline{M}_g(X, \beta)$, qui est un schéma projectif[16], et un morphisme de composition ([BM], Th. 3.6)

$$u_* : \overline{M}_g(X, \beta) \to \overline{M}_g(\mathbf{P}^1, u_*\beta)$$

décrit ensemblistement de la façon suivante : si $f : C \to X$ est une courbe stable de genre g et de degré β, l'image $u_*([f])$ est le point de $\overline{M}_g(\mathbf{P}^1, u_*\beta)$ associé à la stabilisée de la courbe quasi-stable $u \circ f : C \to \mathbf{P}^1$.

Le point essentiel est que par Ex. 3.7(1), l'adhérence $\overline{M}_g(\mathbf{P}^1, d)^h$ de $M_g(\mathbf{P}^1, d)^h$ dans $\overline{M}_g(\mathbf{P}^1, d)$ contient tous les morphismes *finis* $C \to \mathbf{P}^1$ de degré d, où C est une courbe projective connexe de genre g à points doubles ordinaires, donc en particulier des revêtements $C \to \mathbf{P}^1$ qui ont une section : il suffit de prendre d exemplaires de $\mathbf{P}^1$ et d'identifier $d+g-1$ paires de points situés sur des exemplaires distincts.

---

[15] C'est ici que l'hypothèse $B = \mathbf{P}^1$ intervient ; *cf.* [Cl] ; [H] ; [F], § 1.

[16] La meilleure référence semble être [FP] : on y trouve (Th. 1, p. 55) une construction détaillée de $\overline{M}_g(X, \beta)$ (comme sous-schéma fermé de $\overline{M}_g(\mathbf{P}^n, d)$, une fois choisi un plongement de X dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$). Les auteurs mentionnent aussi (sans la mener à terme) une construction de $\overline{M}_g(\mathbf{P}^n, d)$ via la théorie géométrique des invariants de Mumford, qui devrait permettre de construire $\overline{M}_g(X, \beta)$ comme *champ algébrique*. Lorsque X est un point (ou que $\beta = 0$), on retrouve l'espace des modules $\overline{M}_g$ de Deligne–Mumford des courbes stables de genre g.

On peut alors terminer la démonstration du théorème 1.1 : on a construit une multisection de u dont les déformations dans X remplissent un ouvert dense de $M_g(\mathbf{P}^1, d)^h$. Cela signifie que l'image du morphisme propre u_* défini ci-dessus contient $\overline{M}_g(\mathbf{P}^1, d)^h$, donc des revêtements $C \to \mathbf{P}^1$ avec section. Ceux-ci se relèvent par construction à X, ce qui termine la démonstration. $\square$

4.2. Où l'on attache des queues rationnelles très libres à une multisection pour la déformer

Le but de ce paragraphe est de construire des multisections de u vérifiant la condition (C2) du théorème 4.1.

Soit C la normalisation d'une multisection de u ; on suppose que le morphisme correspondant $C \to X$ n'est pas ramifié. Choisissons des points généraux $p_1, \ldots, p_n$ sur C et, pour chaque i, une courbe rationnelle très libre non ramifiée $L_i \to X$ dans la fibre $u^{-1}(u(f(p_i)))$, passant par $f(p_i)$, à direction tangente générale dans cette fibre (th. 2.2). On forme ainsi un « peigne » $\bar{C} = C \cup L_1 \cup \cdots \cup L_n$ muni d'un morphisme non ramifié $\bar{f} : \bar{C} \to X$.

Proposition 4.2. — *Soit n_0 un entier. Sous les hypothèses et les notations précédentes, pour n assez grand, le morphisme $\bar{f} : \bar{C} \to X$ se déforme en $C' \to X$, où C' est une courbe projective et lisse qui vérifie*

$$H^1(C', N_{C'/X}(-D')) = 0$$

pour tout diviseur D' sur C' de degré au plus n_0.

Si on applique la proposition en prenant pour n_0 le degré de la ramification de $u \circ f$, on obtient une courbe $f' : C' \to X$ de même genre que C, le morphisme $u \circ f'$ est de même degré que $u \circ f$ et son diviseur de ramification est de degré n_0. La condition (C2) est donc réalisée. De plus, si C satisfait à la condition (ouverte) (C1), il en est de même de C'. Il suffira donc de construire une courbe $C \to X$ satisfaisant à la condition (C1) pour montrer le théorème 1.1.

Cela permet déjà de démontrer le théorème (dans le cas complexe) lorsque les fibres de u sont réduites. En effet, le lieu singulier de u est alors de codimension au moins 2 dans X et un simple décompte de paramètres montre que l'intersection d'un nombre adéquat de sections hyperplanes générales de X est une courbe lisse dans X entièrement contenue dans le lieu de lissité de u, simplement ramifiée au-dessus de B.

Preuve de la proposition — Notons L la réunion (disjointe) des L_i et P le diviseur $p_1 + \cdots + p_n$; on a une suite exacte

$$0 \to N_{L/X} \longrightarrow N_{\bar{C}/X} \otimes \mathscr{O}_L \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} T_{C,p_i} \to 0 \tag{2}$$

Comme $N_{L/X}(-P)$ est positif sur chaque L_i, on en déduit l'annulation de $H^1(L, N_{\bar{C}/X} \otimes \mathscr{O}_L(-P))$ donc, grâce à la suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_L(-P) \longrightarrow \mathscr{O}_{\bar{C}} \longrightarrow \mathscr{O}_C \to 0$$

tensorisée avec $N_{\bar{C}/X}$, la surjectivité de la restriction

$$H^0(\bar{C}, N_{\bar{C}/X}) \longrightarrow H^0(C, N_{\bar{C}/X} \otimes \mathscr{O}_C)$$

et la bijectivité de

$$H^1(\bar{C}, N_{\bar{C}/X}) \longrightarrow H^1(C, N_{\bar{C}/X} \otimes \mathscr{O}_C) \tag{3}$$

Considérons d'autre part l'analogue

$$0 \to N_{C/X} \longrightarrow N_{\bar{C}/X} \otimes \mathscr{O}_C \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} T_{L_i,p_i} \to 0$$

de la suite exacte (2) ci-dessus. La déformation au premier ordre de $\bar{f}$ correspondant à un élément de $H^0(\bar{C}, N_{\bar{C}/X})$ « lisse » le point double p_i de $\bar{C}$ si et seulement si son image dans T_{L_i,p_i} n'est pas nulle. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_{\bar{C}/X} \otimes \mathscr{O}_C(-p_i) \arrow[r] & N_{\bar{C}/X} \otimes \mathscr{O}_C \arrow[r] \arrow[dr] & N_{\bar{C}/X,p_i} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\ & & & T_{L_i,p_i} & \end{tikzcd}$$

Pour n assez grand, $H^1(C, N_{\bar{C}/X} \otimes \mathscr{O}_C(-p_i))$ est nul par le lemme ci-dessous. Cela signifie qu'une section générale de $N_{\bar{C}/X} \otimes \mathscr{O}_C$ a une image non nulle dans T_{L_i,p_i}, donc aussi dans chacun des T_{L_j,p_j} : une déformation au premier ordre générale de $\bar{C}$ dans X est lisse.

Lemme 4.3. — *Soit n_0 un entier. Pour n assez grand, on a*

$$H^1(C, N_{\bar{C}/X} \otimes \mathscr{O}_C(-D)) = 0$$

pour tout diviseur D sur C de degré $\leq n_0$.

Laissant provisoirement sa démonstration de côté, on déduit d'abord du lemme et de la bijectivité de (3) l'annulation de $H^1(\bar{C}, N_{\bar{C}/X})$, de sorte que pour une déformation générale $f' : C' \to X$ de $\bar{f}$, la courbe C' est lisse (de même genre g que C). Appliquons de nouveau le lemme avec un diviseur D_0 de degré $g + n_0$ sur $C - \{p_1, \dots, p_n\}$; la courbe C' vérifie, par semi-continuité,

$$H^1(C', N_{C'/X}(-D'_0)) = 0$$

pour un certain diviseur D'_0 sur C' de degré $g + n_0$. Soit D' un diviseur sur C' de degré au plus n_0. Par le théorème de Riemann-Roch, on peut écrire $D'_0 \equiv D' + D''$, où D'' est un diviseur effectif, et la suite exacte

$$0 \to N_{C'/X}(-D'_0) \to N_{C'/X}(-D') \to N_{C'/X}(-D') \otimes \mathscr{O}_{D''} \to 0$$

entraîne $H^1(C', N_{C'/X}(-D')) = 0$, ce qui prouve la proposition. $\square$

Preuve du lemme — On a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N_{C/X}(-D) & \longrightarrow & N_{\bar{C}/X}(-D) \otimes \mathscr{O}_C & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n T_{L_i,p_i} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \cap & & \cap & & \\ 0 & \longrightarrow & N_{C/X}(-D) & \longrightarrow & N_{C/X}(-D) \otimes \mathscr{O}_C(P) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n N_{C/X,p_i} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Il existe un entier n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, on ait $H^1(C, N_{C/X}(P-D) \otimes \mathscr{O}_C) = 0$ pour tout diviseur D sur C de degré $\leq n_0$, de sorte que le cobord

$$\delta_n : \bigoplus_{i=1}^{n} N_{C/X,p_i} \to H^1(C, N_{C/X}(-D))$$

est surjectif. Considérons des antécédents $(t_{1,j}, \ldots, t_{n_1,j})_{1 \leq j \leq h}$ par δ_{n_1} d'une base $(\omega_j)_{1 \leq j \leq h}$ de $H^1(C, N_{C/X}(-D))$; la restriction de $\delta_{n_1 h}$ à $\bigoplus_{i=1}^n \mathbf{C} t_{i,j}$ est surjective, donc aussi, pour $n \geq n_1 h$, la restriction de δ_n à $\bigoplus_{i=1}^n T_{L_i,p_i}$ puisque les points p_i et les directions T_{L_i,p_i} sont généraux. On en déduit $H^1(C, N_{\bar{C}/X}(-D) \otimes \mathscr{O}_C) = 0$, d'où le lemme. $\square$

4.3. Où l'on attache des courbes rationnelles à une multisection pour créer de nouveaux points de ramification

On considère de nouveau une courbe projective et lisse C, de genre g, et un morphisme $f : C \to X$ non ramifié dont l'image domine B. Nous aurons besoin de créer de nouveaux points de ramification du morphisme $u \circ f : C \to B$. Cela se fait de la façon suivante.

Tout d'abord, la proposition 4.2 montre qu'étant donné un entier n_0, on peut supposer, quitte à remplacer C par une déformation de la réunion de C et de suffisamment de queues rationnelles très libres verticales,

$$H^1(C, N_{C/X}(-D)) = 0 \tag{4}$$

pour tout diviseur D sur C de degré $\leq n_0 + g + 1$. Étant donnés des points p_1 et p_2 de C dans une fibre générale de $u \circ f$, on peut relier leurs images par f par une courbe rationnelle très libre non ramifiée $L \to X$ contenue dans la fibre correspondante de u (th. 2.2). On veut montrer qu'on peut déformer la courbe $\bar{C} = C \cup L \to X$ ainsi obtenue en une courbe lisse C' de genre $g+1$. Le même raisonnement qu'au § 4.2 montre que

$$\begin{array}{lll} H^0(\bar{C}, N_{\bar{C}/X}) & \longrightarrow H^0(C, N_{\bar{C}/X} \otimes \mathscr{O}_C) & \text{est surjective} \\ H^1(\bar{C}, N_{\bar{C}/X}) & \longrightarrow H^1(C, N_{\bar{C}/X} \otimes \mathscr{O}_C) & \text{est bijective.} \end{array}$$

On a d'autre part une suite exacte

$$0 \to N_{C/X} \longrightarrow N_{\bar{C}/X} \otimes \mathscr{O}_C \longrightarrow T \to 0.$$

où T est un sous-faisceau « diagonal » de $T_{C,p_1} \oplus T_{C,p_2}$. Comme dans le § 4.2, on déduit de (4) d'une part que $H^1(\bar{C}, N_{\bar{C}/X})$ est nul, d'autre part qu'une déformation générale $C' \to X$ de $\bar{C} \to X$ est lisse de genre $g+1$ et vérifie $H^1(C', N_{C'/X}(-D')) = 0$ pour tout diviseur D' sur C' de degré $\leq n_0$.

Étant donnés des entiers n_0 et a, on obtient, en itérant cette construction, une courbe non ramifiée $f' : C' \to X$ telle que :

(R1) la courbe C' est lisse de genre $g + a$;

(R2) le degré de $u \circ f'$ est le même que celui de $u \circ f$;

(R3) $H^1(C', N_{C'/X}(-D')) = 0$ pour tout diviseur D' sur C' de degré $\leq n_0$;

(R4) le diviseur de ramification de $u \circ f'$ a $2a$ paires de points de plus que celui de $u \circ f$ et pour chacun de ces points, la ramification est simple et la monodromie échange les deux feuillets.

4.4. Où l'on tue la ramification située sur les fibres multiples

Nous allons montrer qu'on peut construire par déformation, à partir d'une multisection $f : C \to X$ non ramifiée de u, une multisection qui vérifie la condition (C1) : sa ramification est simple et contenue dans le lieu lisse de u.

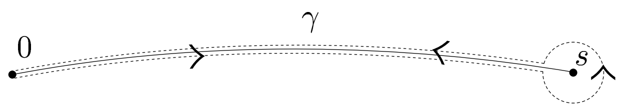
La construction du § 4.3 nous permet de créer autant de points de ramification simples qu'on le désire. Ceux-ci sont de plus mobiles ; en les faisant entrer en collision avec les points de ramification de $u \circ f$ situés sur les fibres non réduites, nous allons pouvoir « tuer » ces derniers.

Soit $S \subset B$ le lieu des points critiques de u. Si on choisit la multisection $f : C \to X$ de façon générale, f n'est pas ramifié et la ramification de $u \circ f$ hors de $(u \circ f)^{-1}(S)$ est simple. Parmi les courbes vérifiant ces propriétés, on choisit C de façon que le degré du diviseur de branchement D de $u \circ f$ dans S soit minimal. Soient g le genre de C et d le degré de $u \circ f$.

Choisissons un point 0 dans l'ouvert B^0 des points de $B - S$ au-dessus desquels $u \circ f$ n'est pas ramifiée. Pour tout b dans B^0, on pose $F_b = (u \circ f)^{-1}(b)$. On considère la représentation de monodromie

$$\rho : \pi_1(B^0, 0) \to \mathrm{Aut}(F_0).$$

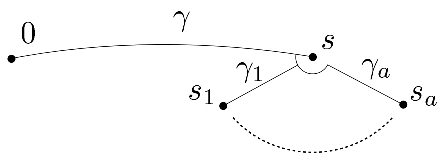
Choisissons un point s du support de D et un arc réel γ dans $B^0 \cup \{0, s\}$ joignant 0 à s. On définit la monodromie σ en s comme l'image par ρ du lacet en pointillé



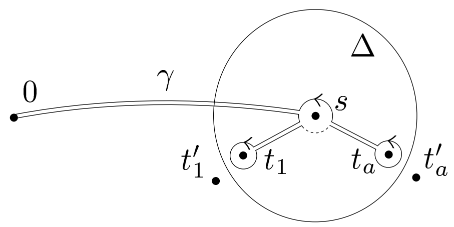
On la décompose en produit

$$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_a$$

de transpositions (où a est l'ordre de s dans D). Choisissons des points $s_1, \ldots, s_a$ généraux proches de s ; les chemins $\gamma_1, \ldots, \gamma_a$ définis sur la figure



permettent d'identifier chaque F_{s_i} à F_0. La transposition τ_i échange deux points de F_0 ; pour chaque i, on relie les deux points correspondants de F_{s_i} par une courbe rationnelle très libre verticale. La construction du § 4.3 (avec $n_0 = 2(g+a)+2d-2$) permet d'obtenir par déformation une nouvelle multisection non ramifiée $f' : C' \to X$ de u vérifiant les propriétés (R1) à (R4), telle que $u \circ f'$ est simplement ramifié hors de S ; en particulier, pour chaque i, il y a deux points de branchement simples t_i et t'_i proches de s_i et, pour le choix de l'arc joignant 0 à t_i composé de l'arc γ_i suivi du « segment » $s_i t_i$, la monodromie en t_i est la transposition τ_i. L'image par la représentation de monodromie de C' du lacet



est $\sigma\tau_a \cdots \tau_1$, c'est-à-dire l'identité. La monodromie autour du bord du disque Δ est donc triviale. La condition (R3) entraîne que les déformations de $f' : C' \to X$ dans X sont paramétrées par une variété M lisse en $[f']$. Par minimalité du degré de D, le diviseur de branchement de $u \circ f'$ dans S est encore D et cela reste vrai pour une déformation générale de f'. L'application $\beta : M \to B^{(2g+2a+2d-2)}$ qui à une courbe associe son diviseur de branchement se factorise donc, au voisinage de $[f']$, en

$$\beta : M \xrightarrow{\beta'} D + B^{(2g+2a+2d-2-\deg(D))} \hookrightarrow B^{(2g+2a+2d-2)}.$$

La condition (R3) entraîne que la différentielle de β' est alors surjective. L'image de β' est donc dense, et celle de β l'est aussi dans $D' + \Delta^{(a)}$, où D' est le diviseur de branchement de $u \circ f'$ privé des points $t_1, \ldots, t_a$. Il existe donc une suite $([f'_n])_n$ de points de M telle que les diviseurs de branchement des courbes correspondantes convergent vers $D' + as$. Une suite extraite converge dans l'espace compact $\overline{M}_{g(C')}(X, [C'])$ vers une courbe stable limite $f'_\infty : C'_\infty \to X$. Soit C_∞ la normalisation d'une composante de C'_∞ sur laquelle $u \circ f'_\infty$ n'est pas constante et soit $f_\infty : C_\infty \to X$ le morphisme induit par f'_∞.

Pour tout petit disque Δ_ε de centre s dans Δ, les morphismes $u \circ f'_n$, pour tout n assez grand, ne sont pas ramifiés au-dessus de $\Delta - \Delta_\varepsilon$ et la monodromie sur le bord de Δ étant triviale, le revêtement $(u \circ f'_n)^{-1}(\Delta - \Delta_\varepsilon) \to \Delta - \Delta_\varepsilon$ est trivial. Il s'ensuit que le seul point de branchement possible de $u \circ f_\infty$ dans Δ est s mais que, la monodromie étant triviale, il n'y a en fait pas de ramification au-dessus de s. La multisection f_∞ n'est donc pas ramifiée et son diviseur de branchement sur B est de degré strictement inférieur à celui de D, ce qui contredit les choix faits.

Cela signifie que la courbe $C \to X \to B$ n'est pas ramifiée au-dessus de S. Elle vérifie la condition (C1) et, comme on l'a vu au § 4.2, cela achève la démonstration du théorème.

REMARQUE 4.4. — Comme le remarquent les auteurs de [GHS], l'argument ci-dessus paraît un peu inquiétant : comment la courbe C', qui rencontre des composantes multiples de fibres, peut-elle dégénérer en une courbe qui les évite ? La réponse est simple : à la limite, la courbe C_∞ ne rencontre que des composantes réduites de fibres et la courbe C'_∞ contient des composantes verticales qui connectent C_∞ à ces composantes multiples. Considérons par exemple la courbe C_t d'équation $y^2 = x(x-t)$ dans $\mathbf{C}^2$; la première projection $u : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ fait de C_t un revêtement double de $\mathbf{C}$. Éclatons l'origine dans $\mathbf{C}^2$, puis le point critique du morphisme induit par u. La fibre en 0 du morphisme $\widetilde{\mathbf{C}}^2 \to \mathbf{C}$ induit par u s'écrit $F + 2E + G$ où F est le transformé strict de $u^{-1}(0)$. Le transformé strict $\widetilde{C}_t$ de C_t rencontre E transversalement en un point de ramification qui converge, lorsque t tend vers 0, vers le point $E \cap G$. À la limite, la courbe $\widetilde{C}_0$ est la réunion de G et de deux composantes étales sur $\mathbf{C}$.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME SUR UN CORPS QUELCONQUE

La démonstration de de Jong et Starr du théorème 2.1, plus générale que la démonstration exposée ci-dessus, est aussi en un certain sens plus simple (mais moins géométrique et plus technique) ; elle ne fait pas appel à l'espace des modules des applications stables et construit la dégénérescence cherchée « à la main ».

5.1. Où l'on se ramène à la construction d'une multisection vérifiant certaines propriétés

On se donne un morphisme propre u d'une variété lisse X sur une courbe lisse B, dont les fibres générales sont des variétés lisses et séparablement rationnellement connexes. On peut supposer que la courbe B est projective et lisse et que la variété X est propre et normale. Il s'agit de montrer que u a une section.

Comme dans le cas complexe, on montre qu'il suffit pour cela de trouver une multisection de u « suffisamment mobile » ; plus précisément, on montre que le théorème 4.1 est encore valable (mais on a besoin de la connexité rationnelle des fibres de u).

THÉORÈME 5.1. — *Soient X une variété propre et B et C des courbes projectives et lisses. On se donne des morphismes $u : X \to B$, à fibres générales lisses et rationnellement connexes, et $f : C \to X$ tels que :*

(C1) *l'image de f est contenue dans le lieu lisse de u et $u \circ f$ est génériquement lisse ;*

(C2) *l'espace vectoriel* $H^1(C, f^*T_{X/B})$ *est nul.*

Alors u *a une section.*

Le faisceau tangent relatif $T_{X/B}$ est défini comme le noyau de l'application tangente $T_X \to u^*T_B$. Il est localement libre sur le lieu lisse de u ; si R est le diviseur de ramification de $u \circ f$, le faisceau $f^*T_{X/B}$ est isomorphe à $N_{C/X}(-R)$.

Preuve du théorème — Pour éviter d'avoir recours aux schémas de Hurwitz (qui ne sont pas toujours irréductibles en caractéristique non nulle) et aux espaces de courbes stables, on construit « à la main » la dégénérescence d'un revêtement en un revêtement avec une section.

On se donne donc un morphisme fini $f : C \to B$ de degré d entre courbes projectives et lisses et un ensemble fini S de points de B qui contient le lieu de branchement de f. La proposition suivante montre que, quitte à identifier des paires de points de C situés dans les mêmes fibres de points hors de S, on peut déformer le revêtement obtenu $\mathscr{C}_0 \to B$ en un revêtement $\mathscr{C}_\infty \to B$ avec une section.

Lemme 5.2. — *Il existe une surface projective irréductible* $\mathscr{C}$ *et des morphismes surjectifs*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \xrightarrow{F} & B \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ \mathbf{P}^1 & & \end{array}$$

vérifiant, en notant $\mathscr{C}_t$*, pour tout* t *dans* $\mathbf{P}^1$*, la fibre* $p^{-1}(t)$*,*

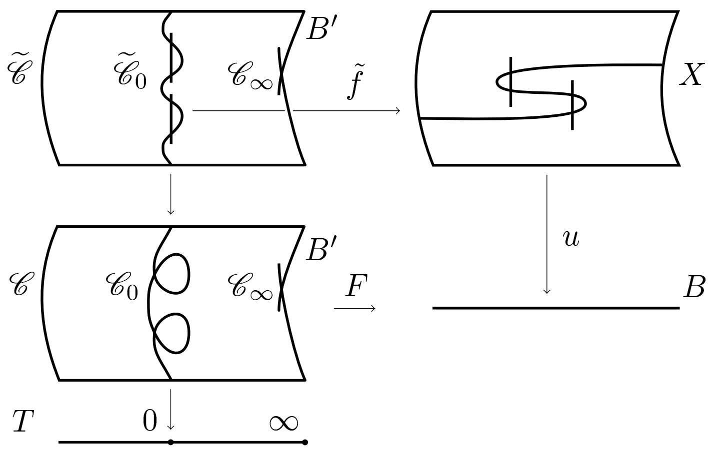
1. *la courbe* $\mathscr{C}_t$ *est lisse pour* t *général ;*
2. *la surface* $\mathscr{C}$ *est lisse le long de* $\mathscr{C}_0$*, qui est une courbe intègre à points doubles ordinaires de normalisée* C *; le morphisme* F *y induit* f *et* $F(\mathrm{Sing}(\mathscr{C}_0)) \cap S = \varnothing$ *;*
3. *la surface* $\mathscr{C}$ *est lisse en un point général d'une composante irréductible* B' *de* $\mathscr{C}_\infty$*, qui est envoyée isomorphiquement par* F *sur* B *;*
4. *pour tout* s *dans* S *et tout* $t \neq \infty$*, les structures locales formelles des revêtements* $F_t : \mathscr{C}_t \to B$ *et* $f : C \to B$ *au voisinage de la fibre de* s *sont les mêmes, c'est-à-dire que l'on a un isomorphisme*

$$\mathscr{C}_t \times_B \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{B,s} \simeq C \times_B \operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{B,s}$$

de $\operatorname{Spec} \widehat{\mathscr{O}}_{B,s}$*-schémas.*

Seul le point (4) n'est pas élémentaire. Il ne nous servira que plus tard. Remettant la démonstration du lemme à la fin de ce §, nous poursuivons celle du théorème.

Considérons un revêtement double $T \to \mathbf{P}^1$ ramifié en 0 et l'éclatement $\widetilde{\mathscr{C}} \to \mathscr{C} \times_{\mathbf{P}^1} T$ des points singuliers qui apparaissent au-dessus des points doubles ordinaires de $\mathscr{C}_0$. La fibre du morphisme $\widetilde{\mathscr{C}} \to T$ en le point, noté encore 0, de T situé au-dessus de 0 est réduite, réunion de C et de courbes rationnelles coupant chacune C transversalement en deux points. Notons $\widetilde{F} : \widetilde{\mathscr{C}} \to \mathscr{C} \to B$ le morphisme composé ; si on joint les paires de points de C identifiés dans $\mathscr{C}_0$ par des courbes rationnelles très libres non ramifiées contenues dans les fibres de u (th. 2.2), on définit un morphisme $\widetilde{f} : \widetilde{\mathscr{C}}_0 \to X$. On a ainsi la figure



La fibre de $\widetilde{\mathscr{C}} \times_B X$ en 0 contient le graphe Γ de $\widetilde{f}$, dont les déformations comme sous-T-schéma de $\widetilde{\mathscr{C}} \times_B X$ sont paramétrées par une composante du T-schéma de Hilbert relatif $\mathrm{Hilb}(\widetilde{\mathscr{C}} \times_B X/T)$.

Les déformations au premier ordre sont paramétrées par l'espace vectoriel des sections du fibré normal $N_{\Gamma/(\widetilde{\mathscr{C}} \times_B X)_0}$ et les obstructions sont dans $H^1(\Gamma, N_{\Gamma/(\widetilde{\mathscr{C}} \times_B X)_0})$. Ce fibré s'identifie à $\widetilde{f}^* T_{X/B}$ sur $\widetilde{\mathscr{C}}_0$. Par construction, la restriction de ce fibré aux queues rationnelles est ample ; on montre comme dans le § 4.3 que l'annulation de $H^1(C, f^* T_{X/B})$ entraîne alors celle de $H^1(\widetilde{\mathscr{C}}_0, \widetilde{f}^* T_{X/B})$.

Le morphisme propre $\mathrm{Hilb}(\widetilde{\mathscr{C}} \times_B X/T) \to T$ est alors lisse en $[\Gamma]$. Quitte à effectuer un changement de base fini sur T, on peut donc supposer qu'il a une section, c'est-à-dire qu'il existe un sous-schéma Γ' de $\widetilde{\mathscr{C}} \times_B X$, plat sur T, tel que $\Gamma'_0 = \Gamma$. Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Gamma' \arrow[dr, bend right] & \subset \widetilde{\mathscr{C}} \times_B X \arrow[r] & \widetilde{\mathscr{C}} \arrow[dl, bend left] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

la ligne horizontale est un isomorphisme au-dessus du point 0 de T, donc est birationnelle. Son inverse $\widetilde{\mathscr{C}} \dashrightarrow \Gamma'$ est défini hors du complémentaire d'un ensemble fini dans le lieu normal de $\widetilde{\mathscr{C}}$, donc en le point générique de B'. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Gamma' \arrow[r, hook] & \widetilde{\mathscr{C}} \times_B X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "u"] \\
B' \arrow[r, hook] \arrow[d] & \widetilde{\mathscr{C}} \arrow[r, "\widetilde{F}"] \arrow[d] \arrow[ul, dashed] & B \\
\{\infty\} \arrow[r, hook] & T &
\end{tikzcd}$$

l'image de B' dans X est une section de u et ceci démontre le théorème 5.1. $\square$

Revenons maintenant à la démonstration du lemme 5.2.

Preuve du lemme 5.2 — Soient m un grand entier et $g : C \to \mathbf{P}^1$ le morphisme associé à deux sections générales de $\mathscr{O}_C(mf^*S)$. On vérifie que :

- le morphisme $(f, g) : C \to B \times \mathbf{P}^1$ est birationnel sur son image C_0 ;
- les singularités de la courbe C_0 sont des points doubles ordinaires situés hors de $S \times \mathbf{P}^1$;
- la courbe C_0 est dans le système linéaire $|p_1^*\mathscr{O}_C(dmS) \otimes p_2^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(d)|$.

Ce système linéaire contient aussi le diviseur

$$C_\infty = (dmS \times \mathbf{P}^1) + (B \times \{u_1, \ldots, u_d\}),$$

où $u_1, \ldots, u_d$ sont des points généraux de $\mathbf{P}^1$. Considérons l'application rationnelle

$$B \times \mathbf{P}^1 \dashrightarrow \mathbf{P}^1$$

définie par le pinceau (C_0, C_∞). Si $\mathscr{C} \to B \times \mathbf{P}^1$ est l'éclatement du schéma $C_0 \cap C_\infty$ et $p : \mathscr{C} \to B \times \mathbf{P}^1 \dashrightarrow \mathbf{P}^1$ et $F : \mathscr{C} \to B \times \mathbf{P}^1 \to B$ les morphismes composés, on vérifie facilement les points (1), (2) et (3).

Soient s un point de S et π une uniformisante de l'anneau de valuation discrète $\mathscr{O}_{B,s}$. Dans $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{B,s} \times \mathbf{P}^1$, la courbe C_0 est définie par une équation σ_0 (avec $\sigma_0(s, u_i) \neq 0$ pour chaque i), la courbe C_∞ par l'équation $\pi^{md} \prod (u - u_i)$, donc la courbe $\mathscr{C}_t$ par $\sigma_0 + t\pi^{md} \prod (u - u_i)$. Modulo π^{md}, les fibres en s des morphismes $\mathscr{C}_t \to B$ induits par F sont donc isomorphes pour $t \neq \infty$. Comme ceux-ci sont finis (cela résulte de la forme explicite de l'« équation » de $\mathscr{C}_t$ dans $B \times \mathbf{P}^1$), le lemme suivant entraîne (4). $\square$

Lemme 5.3. — *Soient A un anneau de valuation discrète complet, d'uniformisante π et corps des fractions K. Soient K' une extension séparable de K et A' la fermeture intégrale de A dans K'. Il existe un entier positif m_0 tel que, pour tout anneau de valuation discrète A'' fini sur A, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *les A-algèbres A' et A'' sont isomorphes ;*

(ii) *il existe un entier $m > m_0$ tel que les A-algèbres $A'/\pi^m A'$ et $A''/\pi^m A''$ sont isomorphes.*

Preuve — Comme l'extension K' de K est séparable, il existe un élément a' de A' tel que $K' = K(a')$; son polynôme minimal P est à coefficients dans A et vérifie $P'(a') \neq 0$. Il existe donc un entier positif m_1 tel que $P'(a') \in \pi^{m_1}A' - \pi^{m_1+1}A'$. On pose $m_0 = 2m_1$.

Montrons (ii) $\Rightarrow$ (i). Comme l'anneau A'' est la fermeture intégrale de A dans le corps des fractions K'' de A'', il suffit de montrer que les K-extensions K' et K'' sont isomorphes. Les A-modules A' et A'' sont libres, de même rang puisque $A'/\pi A' \simeq A''/\pi A''$. Les K-extensions K' et K'' ont donc même degré et il suffit de montrer qu'il existe un K-homomorphisme de K' dans K''.

Soit a'' un élément de A'' relevant l'image de a' par la composée $A' \to A'/\pi^m A' \simeq A''/\pi^m A''$. On a alors

$$P(a'') \in \pi^m A'' \quad \text{et} \quad P'(a'') \in \pi^{m_1}A'' - \pi^{m_1+1}A''$$

L'anneau A'' est un anneau de valuation discrète complet pour la topologie π-adique. D'après le lemme de Hensel ([Bo], chap. III, § 4, n°5, cor. 1), il existe $b'' \in A''$ tel que $P(b'') = 0$ et $b'' \equiv a''$ (mod π^{m-m_1}). Le morphisme $A[X]/(P) \to A''$ qui s'en déduit induit le K-homomorphisme $K' \to K''$ cherché. □

5.2. Où l'on se ramène au cas où les fibres de u sont réduites

Pour éviter le délicat argument de monodromie employé dans le cas complexe lorsque u a des fibres non réduites, de Jong et Starr démontrent (c'est l'objet de la proposition ci-dessous) un résultat *a priori* surprenant, à savoir qu'il suffit de montrer l'existence d'une section après tout changement de base sur B tel que les fibres de la famille induite soient réduites. L'hypothèse que le corps de base $\mathbf{k}$ n'est pas dénombrable n'est pas un problème[17] : on peut par exemple remarquer que les sections de $u : X \to B$ sont paramétrées par un $\mathbf{k}$-schéma $S(u)$ et que si $\mathbf{k}'$ est une extension algébriquement close de $\mathbf{k}$, les sections de $u_{\mathbf{k}'} : X_{\mathbf{k}'} \to B_{\mathbf{k}'}$ sont paramétrées par le $\mathbf{k}'$-schéma $S(u)_{\mathbf{k}'}$: pour montrer que $S(u)$ n'est pas vide, on peut le faire après extension (algébriquement close non dénombrable) du corps de base.

Lorsque les fibres de u sont réduites et que X est projectif, le théorème de Bertini montre que dans ce cas, il existe une section vérifiant (C1). La condition (C2) est obtenue par la proposition 4.2, et le théorème 2.1 résulte alors du théorème 5.1. Lorsque X n'est que propre, il faut un argument différent, pour lequel je renvoie à [dJS].

Proposition 5.4. — *Soient X une variété propre et normale, B une courbe projective et lisse et $u : X \to B$ un morphisme dont les fibres générales sont réduites, définis sur un corps algébriquement clos non dénombrable*[18].

[17] *Cf.* aussi note 18.

[18] Cette dernière hypothèse, que l'on n'utilise que pour (2), peut être supprimée si l'on remplace l'hypothèse de (2) par : pour toute extension algébriquement close $\mathbf{k}'$ de $\mathbf{k}$ et tout morphisme fini génériquement lisse $C \to B_{\mathbf{k}'}$ de $\mathbf{k}'$-courbes lisses, tels que les fibres de u_C soient réduites, u_C a une section.

(1) *Il existe une courbe projective et lisse C et un morphisme fini $C \to B$ génériquement lisse tels que les fibres du morphisme induit*

$$u_C : (C \times_B X)^{\mathrm{norm}} \to C$$

soient réduites.

(2) *Si, pour tout morphisme fini génériquement lisse $C \to B$ de courbes lisses tel que les fibres de u_C soient réduites, u_C a une section, alors u a une section.*

PREUVE — Le point (1) se trouve en fait déjà dans la littérature ([Ep] ; [BLR], th. 2.1′, p. 368) et nous ne démontrerons donc que (2).

Considérons un morphisme $f : C \to B$ satisfaisant les propriétés de (1) et appliquons-lui le lemme 5.2, en prenant pour S l'ensemble des points de branchement de f et des points de B dont la fibre sous u n'est pas réduite. Il fournit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C} \times_B X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ \mathscr{C} & \xrightarrow{F} & B \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ \mathbf{P}^1 & & \end{array}$$

Considérons les fibres de $u_{\mathscr{C}_t} : (\mathscr{C}_t \times_B X)^{\mathrm{norm}} \to \mathscr{C}_t$ pour $t \neq \infty$. Hors de S, elles sont réduites puisque celles de u l'étaient déjà. Au-dessus d'un point de S, les fibres formelles sont réduites puisqu'elles sont isomorphes à celles de u_C. Toutes les fibres de $u_{\mathscr{C}_t}$ sont donc réduites. Pour t général, $\mathscr{C}_t$ est lisse et il existe par hypothèse une section σ_t de $\mathscr{C}_t \times_B X \to \mathscr{C}_t$. Comme le corps de base n'est pas dénombrable et que le schéma de Hilbert relatif $\mathrm{Hilb}(\mathscr{C} \times_B X/\mathbf{P}^1) \to \mathbf{P}^1$, qui est propre, n'a qu'un nombre dénombrable de composantes irréductibles, l'une d'elle contient presque tous les points correspondants aux images des sections σ_t, donc contient une courbe propre irréductible T qui domine $\mathbf{P}^1$.

Pour alléger les notations, nous désignerons par un indice T le produit $T \times_{\mathbf{P}^1} \cdot$. Il existe donc un sous-schéma fermé Γ de $(\mathscr{C} \times_B X)_T$, plat sur T, tel que la projection $\Gamma_t \to \mathscr{C}_t$ soit un isomorphisme pour $t \in T$ très général, de sorte que le morphisme $\Gamma \to \mathscr{C}_T$ est birationnel. Comme $\mathscr{C}$, donc aussi $\mathscr{C}_T$, est lisse en un point général de B', l'inverse $\mathscr{C}_T \dashrightarrow \Gamma$ est défini en un point général de B'. On retrouve un diagramme commutatif analogue à celui de la page 19 :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, hook] & (\mathscr{C} \times_B X)_T \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{C} \times_B X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "u"] \\
B' \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathscr{C}_T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul, dashed] & \mathscr{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d] & B \\
\{\infty\} \arrow[r, hook] & T \arrow[r] & \mathbf{P}^1 &
\end{tikzcd}$$

où de nouveau, l'image de B' dans X est une section de u. □

RÉFÉRENCES

[BM] K. BEHREND, Y. MANIN – *Stacks of stable maps and Gromov–Witten invariants*, Duke Math. J. **85** (1996), 1–60.

[B] A. BOREL – Linear algebraic groups. Benjamin, 1969.

[BLR] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD – *Formal and rigid geometry. IV. The reduced fibre theorem*, Invent. Math. **119** (1995), 361–398.

[Bo] N. BOURBAKI – Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4. Masson, Paris, 1985.

[C1] F. CAMPANA – *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. **25** (1992), 539–545.

[C2] F. CAMPANA – *Coréduction algébrique d'un espace analytique compact faiblement kählérien*, Invent. Math. **63** (1981), 187–223.

[CPP] F. CAMPANA, T. PETERNELL, A. PUKHLIKOV – *Generalized Tsen theorem and rationally connected Fano fibrations*, prépublication `math.AG/0110017`.

[Ch] C. CHEVALLEY – *Démonstration d'une hypothèse de E. Artin*, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. **119** (1935), 73.

[Cl] A. CLEBSCH – *Zur Theorie der Riemann'schen Fläche*, Math. Ann. **6** (1872), 216–230.

[CT] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE – *Arithmétique des variétés rationnelles et problèmes birationnels*, Proc. Int. Congr. Math. (Berkeley, Calif., 1986), 641–653, A.M.S., Providence, RI, 1987.

[CS] P. COLMEZ, J.-P. SERRE – Correspondance Grothendieck–Serre. Documents Mathématiques **2**, Société Mathématique de France, 2001.

[D1] O. DEBARRE – *Variétés de Fano*, Exposé 827, Séminaire Bourbaki 1996/97, Astérisque **245** (1997), 197–221.

[D2] O. DEBARRE – Higher-Dimensional Algebraic Geometry. Springer-Verlag, Universitext, 2001.

[E] T. EKEDAHL – *Sur le groupe fondamental d'une variété unirationnelle*, C. R. Acad. Sci. Paris **297** (1983), 627–629.

[En] F. ENRIQUES – *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali*, Math. Ann. **52** (1899), 449–456.

[Ep] H. EPP – *Eliminating wild ramification*, Invent. Math. **19** (1973), 235–249.

[Es] H. ESNAULT – *Varieties over a finite field with trivial Chow group of* 0*-cycles have a rational point*, prépublication `math.AG/0207022`, à paraître dans Invent. Math.

[F] W. FULTON – *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves*, Ann. of Math. **90** (1969), 542–575.

[FP] W. FULTON, R. PANDHARIPANDE – *Notes on stable maps and quantum cohomology*, Algebraic geometry—Santa Cruz 1995, 45–96, Proc. Sympos. Pure Math. **62**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[GHS] T. GRABER, J. HARRIS, J. STARR – *Families of Rationally Connected Varieties*, prépublication `math.AG/0109220`, à paraître dans J. Amer. Math. Soc.

[H] A. HURWITZ – *Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, Math. Ann. **39** (1891), 1–61.

[dJS] A.J. de JONG, J. STARR – *Every rationally connected variety over the function field of a curve has a rational point*, à paraître dans Amer. J. Math.

[Ko1] J. KOLLÁR – Rational Curves on Algebraic Varieties. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **32**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Ko2] J. KOLLÁR – *Nonrational hypersurfaces*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), 241–249.

[KMM1] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA, S. MORI – *Rational Curves on Fano Varieties*, Proc. Alg. Geom. Conf. Trento, 100–105, Springer Lecture Notes **1515**, Springer-Verlag, 1992.

[KMM2] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA, S. MORI – *Rationally Connected Varieties*, J. Alg. Geom. **1** (1992), 429–448.

[M] Y. MANIN – Cubic forms. Algebra, geometry, arithmetic. Second edition. North-Holland Mathematical Library, **4**. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1986.

[N] M. NOETHER – *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, Math. Ann. **3** (1870), 161–226.

[Ny] N. NYGAARD – *On the fundamental group of a unirational 3-fold*, Invent. Math. **44** (1978) 75–86.

[S] J.-P. SERRE – Cohomologie Galoisienne. Springer Lecture Notes **5**, Springer-Verlag, Berlin, 1964.

[SB] N. SHEPHERD-BARRON – *Fano threefolds in positive characteristic*, Compositio Math. **105** (1997), 237–265.

[Sh] N. SHIODA – *On unirationality of supersingular surfaces*, Math. Ann. **225** (1977), 155–159.

[Su] N. SUWA – *A note on the fundamental group of a unirational variety*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **59** (1983), 98–99.

[T] C. TSEN – *Quasi-algebraisch-abgeschlossene Funktionenkörper*, J. Chinese Math. **1** (1936), 81–92.

Olivier DEBARRE

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Mél : debarre@math.u-strasbg.fr