VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES COMPLEXES

1. Variétés algébriques

On s'intéresse tout d'abord aux sous-ensembles de $\mathbf{C}^n$ (on peut aussi remplacer $\mathbf{C}$ par n'importe quel corps algébriquement clos) définis par des équations polynomiales (à n variables). L'expérience montre qu'il est beaucoup plus malin d'adjoindre un « hyperplan à l'infini » à $\mathbf{C}^n$ et de travailler dans une compactification de $\mathbf{C}^n$ que l'on appelle l'espace projectif $\mathbf{P}^n$. Il y a plusieurs façons de présenter cet espace :

• c'est d'abord l'ensemble des droites (vectorielles) de $\mathbf{C}^{n+1}$, c'est-à-dire le quotient de $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ où l'on identifie les vecteurs colinéaires. On repère ainsi un point x de $\mathbf{P}^n$ par ses « coordonnées homogènes » $(x_0, \ldots, x_n)$ (bien que ce ne soient pas des coordonnées : elles sont définies à multiplication par un scalaire non nul près) ;

• c'est aussi une compactification de $\mathbf{C}^n$, car $\mathbf{P}^n = \mathbf{C}^n \cup \mathbf{P}^{n-1}$ (on a ajouté à $\mathbf{C}^n$ des points « à l'infini », un pour chaque (direction de) droite). En coordonnées homogènes, $\mathbf{C}^n$ s'identifie par exemple à l'un quelconque des ouverts standards U_i, défini par $x_i \neq 0$ (on peut alors prendre $x_i = 1$).

Si P est un polynôme à n variables, il définit une variété algébrique dans U_0 par l'équation $P(1, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Son adhérence dans $\mathbf{P}^n$ est définie par l'équation homogène

$$x_0^d P(1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) = 0 ,$$

où d est le degré de P.

Exemple. L'annulation du polynôme $P(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 - x_2^2$ définit une « hyperbole » dans $\mathbf{C}^2$. Cette équation s'homogénéise en

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 .$$

Elle définit dans $\mathbf{P}^2$ une courbe algébrique obtenue à partir de l'hyperbole en ajoutant deux points « à l'infini », $(0, 1, 1)$ et $(0, 1, -1)$, qui correspondent aux deux directions asymptotiques de l'hyperbole.

Définition. *Une variété algébrique est un sous-ensemble de* $\mathbf{P}^n$ *défini par des équations polynomiales homogènes* (en $n+1$ variables). Lorsqu'on a besoin d'une seule équation, on dit que c'est une *hypersurface.* Son *degré* est le degré de l'équation qui la définit. Pour les petits degrés, on dit *hyperplan* (degré 1), puis *quadrique, cubique, quartique, quintique,* etc.

Une variété algébrique est dite *irréductible* si elle n'est pas réunion de deux sous-variétés propres. Toute variété algébrique peut s'écrire de façon unique comme réunion de variétés irréductibles.

Exemple. L'équation homogène $x_0^2+x_1^2=x_2^2+x_3^2$ définit une quadrique irréductible dans $\mathbf{P}^3$. Celle-ci contient deux familles de droites ; elle est isomorphe au produit $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$.

On peut définir la *dimension* d'une variété algébrique (pour $\mathbf{P}^n$, c'est n, pour une hypersurface de $\mathbf{P}^n$, c'est $n-1$, mais les choses ne sont pas si simples en général). Pour les variétés algébriques *lisses*, c'est-à-dire celles qui sont des variétés complexes, la dimension est la même que la dimension en tant que variété complexe (c'est-à-dire **deux fois** la dimension réelle). Remarquons qu'une hypersurface de $\mathbf{P}^n$ définie par une équation homogène $P(x_0,\ldots,x_n)=0$ est lisse si et seulement si les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x_0},\ldots,\frac{\partial P}{\partial x_n}$ n'ont pas de zéro commun autre que 0 (c'est le cas de la quadrique de $\mathbf{P}^3$ présentée plus haut).

Exemple. Toute cubique lisse dans $\mathbf{P}^3$ contiennent 27 droites. Pour la cubique d'équations

$$x_0^3+x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=x_0+x_1+x_2+x_3+x_4=0$$

(dans $\mathbf{P}^4$, mais la seconde équation est linéaire, donc on est en fait dans un espace projectif de dimension 3), dite cubique diagonale de Clebsch), les 27 droites sont *réelles* (ce n'est pas très difficile de toutes les déterminer).

2. Applications régulières

Les applications que l'on va admettre entre les variétés algébriques sont celles qui sont définies localement par des fractions rationnelles (c'est-à-dire des quotients de deux polynômes). Plus précisément, si X est une variété algébrique dans $\mathbf{P}^n$, une application $f: X\to\mathbf{P}^m$ est *régulière* si, pour tout x dans $\mathbf{P}^n$ (appartenant par exemple dans U_0) tel que $f(x)$ soit par exemple dans U_0, on peut écrire, au voisinage de x,

$$f(1,x_1,\ldots,x_n)=(1,f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n))\ ,$$

où les f_i sont des fractions rationnelles définies en x. On montre (c'est le théorème de *propreté,* dont la démonstration est loin d'être facile) que *l'image $f(X)$ est une sous-variété de $\mathbf{P}^m$.*

On dit qu'une telle application est *birationnelle* si elle est injective sur le complémentaire d'une sous-variété propre de X. L'idée qu'il faut en avoir est qu'une application algébrique birationnelle remplace une sous-variété propre de X par quelque chose de «plus petit» ;

en particulier, X et $f(X)$ sont très peu différentes, puisqu'elles contiennent chacune un ouvert dense identique.

On dit qu'une courbe de X (c'est-à-dire une sous-variété connexe de X de dimension 1) est *contractée par f* si son image par f est un point. Nous allons voir que les applications algébriques sont essentiellement caractérisées par les courbes qu'elles contractent.

3. Le cône effectif

Soit X une variété algébrique *lisse* (c'est très important). Soient C une courbe dans X et D une hypersurface de X. Lorsque C et D se coupent transversalement, on note $C \cdot D$ le nombre de points d'intersection de C et de D. On sait en fait étendre ce produit de façon qu'il soit défini pour toute courbe et toute hypersurface de X ; c'est toujours un nombre entier, mais il peut très bien être négatif.

Exemples. 1) Lorsque X est une surface, courbes et hypersurfaces coïncident. Si C_1 et C_2 sont des courbes dans $\mathbf{P}^2$, on a (c'est le théorème de Bézout)

$$C_1 \cdot C_2 = (\deg C_1)(\deg C_2) .$$

Le nombre d'intersection est ici toujours strictement positif.

2) Il est possible de définir le degré d'une courbe C dans $\mathbf{P}^n$ de façon que, pour toute hypersurface H, on ait

$$C \cdot H = (\deg C)(\deg H) .$$

On veut étudier les propriétés d'intersection des courbes et des hypersurfaces d'une variété algébrique lisse, dans le but de dégager une nouvelle approche des applications algébriques. Plus précisément, on veut identifier deux courbes qui ont même nombre d'intersection avec chaque hypersurface (cela forme une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes). Il est très commode de mettre un peu d'algèbre linéaire dans la machine, en procédant comme suit.

On considère les combinaisons linéaires formelles finies à coefficients réels de courbes irréductibles de X (on les appelle des 1-*cycles*) ; celles-ci forment un gigantesque espace vectoriel dont une base est formée des courbes irréductibles de X. On peut étendre par linéarité le produit d'intersection entre 1-cycles et hypersurfaces ; il est à valeurs réelles. On pose alors

$$N_1(X) = \{\text{espace vectoriel des 1-cycles}\}/\{\text{1-cycles d'intersection 0 avec toute hypersurface}\} .$$

En somme, au lieu d'identifier deux courbes C_1 et C_2 lorsqu'elle ont même nombre d'intersection avec chaque hypersurface, on décrète que le 1-cycle $C_1 - C_2$ est nul. Remarquons qu'à toute hypersurface correspond une forme linéaire sur $N_1(X)$.

Le fait fondamental est que *l'espace vectoriel $N_1(X)$ est de dimension finie.* Dans cet espace vectoriel, on définit le *cône effectif* $NE(X)$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs des classes de courbes sur X. Comme il n'est parfois pas fermé, on considérera aussi son adhérence $\overline{NE}(X)$.

Si X est une variété lisse contenue dans $\mathbf{P}^n$ et H l'intersection de X avec un hyperplan général de $\mathbf{P}^n$, on a $C \cdot H > 0$ pour toute courbe C de X (on peut toujours choisir un hyperplan qui coupe C transversalement). Cela veut dire que $NE(X)-\{0\}$, et même en fait aussi $\overline{NE}(X)-\{0\}$, est contenu dans un demi-espace ouvert de $N_1(X)$. De façon équivalente, $\overline{NE}(X)$ ne contient pas de droite.

Exemples. 1) On a un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} N_1(\mathbf{P}^2) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \sum \lambda_i [C_i] & \longmapsto & \sum \lambda_i \deg C_i \end{array}$$

et $NE(\mathbf{P}^2)$ est $\mathbf{R}^+$. C'est la même chose pour $\mathbf{P}^n$ et pour les hypersurfaces de $\mathbf{P}^n$ de dimension au moins 3.

2) Si X est une quadrique lisse dans $\mathbf{P}^3$, et C_1 et C_2 des droites concourantes contenues dans X, les relations $C_1 \cdot C_2 = 1$ et $C_1^2 = C_2^2 = 0$ prouvent que C_1 et C_2 ont des classes indépendantes dans $N_1(X)$. On a en fait

$$N_1(X) = \mathbf{R}[C_1] \oplus \mathbf{R}[C_2] \qquad \text{et} \qquad NE(X) = \mathbf{R}^+[C_1] \oplus \mathbf{R}^+[C_2] \ .$$

3) Si X est une cubique lisse dans $\mathbf{P}^3$, elle contient 27 droites $C_1, \ldots, C_{27}$ et on peut en trouver 6 qui sont deux à deux disjointes, disons $C_1, \ldots, C_6$. Notons C la cubique plane obtenue en coupant X par un plan. On a

$$N_1(X) = \mathbf{R}[C] \oplus \mathbf{R}[C_1] \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}[C_6] \ .$$

Les classes de $C_7, \ldots, C_{27}$ sont les 15 classes $[C - C_i - C_j]$, pour $1 \leq i < j \leq 6$, et les 6 classes $[2C - \sum_{i \neq i_0} C_i]$, pour $1 \leq i_0 \leq 6$. On a

$$NE(X) = \sum_{i=1}^{27} \mathbf{R}^+[C_i] \ .$$

On peut montrer qu'il existe une application algébrique $X \to \mathbf{P}^2$ qui contracte exactement $C_1, \ldots, C_6$. On dit que X est l'*éclatement* de $\mathbf{P}^2$ en 6 points.

4) Bien que le cône $NE(X)$ soit fermé dans chacun des exemples précédents, ce n'est pas toujours le cas (par exemple pour la surface X obtenue en éclatant $\mathbf{P}^2$ en 9 points ; nous reviendrons plus tard sur cet exemple).

Soit maintenant $f : X \to Y$ une application algébrique ; on suppose que les fibres de f sont connexes, et que Y n'est pas trop singulière[1]. On note $NE(f)$ le sous-cône de $NE(X)$ engendré par les classes de courbes contractées par f ; on considérera aussi son adhérence $\overline{NE}(f)$. L'application f est déterminée par les courbes qu'elle contracte, et celles-ci sont les courbes dont la classe est dans $\overline{NE}(f)$. Il s'ensuit :

Fait fondamental. *L'application algébrique f est caractérisée à isomorphisme près par le sous-cône $\overline{NE}(f)$.*

Ce sous-cône $\overline{NE}(f)$ a d'autre part la propriété d'être *extrêmal* : il est convexe et, si c, c' sont dans $\overline{NE}(X)$ et que $c + c'$ est dans $\overline{NE}(f)$, alors c et c' sont dans $\overline{NE}(f)$. On en vient ainsi à la question fondamentale du programme de Mori :

Question fondamentale. *Étant donnée une variété lisse X, quels sous-cônes extrêmaux de $\overline{NE}(X)$ correspondent-ils à des applications algébriques ?*

Pour répondre (partiellement) à la question posée plus haut, il faut faire intervenir une forme linéaire sur $N_1(X)$ intrinsèquement attaché à X, appelée *classe canonique.*

4. La classe canonique

Soit X une variété complexe de dimension n. Une n-forme méromorphe est une forme différentielle sur la variété complexe X qui s'écrit localement, dans un système de coordonnées (carte) holomorphe,

$$\omega(z_1, \ldots, z_n) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \ ,$$

où ω est une fonction méromorphe (on rappelle que $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ est la forme n-multilinéaire alternée sur l'espace tangent qui vaut 1 sur la base $(\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n)$). Cette fonction ω a des zéros et des pôles le long d'hypersurfaces (algébriques) de X, avec lesquelles on fabrique une combinaison linéaire formelle $\sum_i m_i D_i$, appelée *diviseur*, où m_i est l'ordre d'annulation ou du pôle (c'est un entier).

Exemples. 1) Pour $\mathbf{P}^n$, la n-forme $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ est holomorphe dans U_0. Dans $U_1 \cap U_0$, on a

$$(x_0, 1, x_2, \ldots, x_n) = (1, \frac{1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})$$

[1] Plus précisément, on suppose Y normale, c'est-à-dire que pour toute sous-variété propre Z de X, toute application algébrique $X - Z \to \mathbf{P}^m$ localement bornée se prolonge en une application algébrique définie sur tout X. Ce n'est pas une restriction très importante puisque toute application algébrique se factorise en la composée d'une application algébrique ayant ces propriétés et d'une application algébrique dont toutes les fibres sont finies.

donc

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = d\Big(\frac{1}{x_0}\Big) \wedge d\Big(\frac{x_2}{x_0}\Big) \wedge \cdots \wedge d\Big(\frac{x_n}{x_0}\Big) = -\frac{1}{x_0^{n+1}}\ dx_0 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n\ .$$

Il y a donc un pôle d'ordre $n+1$ le long de l'hyperplan H_0 d'équation $x_0 = 0$; le diviseur est $-(n+1)H_0$.

2) Si X est une hypersurface lisse de degré d dans $\mathbf{P}^n$ définie par une équation homogène $P(x_0, \ldots, x_n) = 0$, la $(n-1)$-forme définie sur $U_0 \cap X$ par

$$(-1)^i\ \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n}{(\partial P/\partial x_i)(x)}$$

ne dépend pas de i et ne s'annule pas. Comme dans 1), elle s'écrit dans $U_1 \cap U_0 \cap X$

$$\frac{d\big(\frac{1}{x_0}\big) \wedge d\big(\frac{x_3}{x_0}\big) \wedge \cdots \wedge d\big(\frac{x_n}{x_0}\big)}{(\partial P/\partial x_2)(1, \frac{1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})} = -\frac{1}{x_0^{n-(d-1)}}\ \frac{dx_0 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n}{(\partial P/\partial x_2)(x_0, 1, x_2, \ldots, x_n)}\ ,$$

de sorte que le diviseur est $-(n+1-d)(H_0 \cap X)$.

Le point fondamental est que bien que ce diviseur dépende du choix de la n-forme (non nulle), la forme linéaire qu'il définit sur $N_1(X)$ n'en dépend pas. On l'appelle la *classe canonique* et on la note K_X.

Exemple. Si X est une hypersurface lisse de degré d dans $\mathbf{P}^n$, la classe canonique est $d-n-1$ fois la classe d'une section hyperplane : pour une quadrique lisse dans $\mathbf{P}^3$, la classe canonique est $-2[C_1] - 2[C_2]$; pour une cubique lisse dans $\mathbf{P}^3$, la classe canonique est $-[C]$.

Le rôle de la classe canonique vis-à-vis des applications algébriques est illustré par le résultat suivant.

Proposition. *Soient X et Y des variétés algébriques lisses et $f : X \to Y$ une application algébrique birationnelle non bijective. Il existe une courbe C dans X contractée par f telle que $C \cdot K_X < 0$.*

Les courbes C contenues dans une variété X telles que $C \cdot K_X < 0$ jouent donc un rôle essentiel. S'il n'y en a pas, on ne peut plus «simplifier» X. Le théorème du cône de Mori décrit la partie de $\overline{NE}(X)$ sur laquelle la classe canonique est strictement négative.

Théorème du cône de Mori. *Soit X une variété algébrique lisse.*

- *Il existe une famille au plus dénombrable de courbes C_i telles que $C_i \cdot K_X < 0$ et*

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X \geq 0} + \sum_i \mathbf{R}^+[C_i]\ .$$

• *Les demi-droites* $\mathbf{R}^+[C_i]$ *sont extrêmales et peuvent être contractées.*

Plus généralement, tout sous-cône extrêmal négatif (c'est-à-dire sur lequel la classe canonique est strictement négative) peut être contracté.

Exemples. 1) Pour $\mathbf{P}^n$ (ou pour les hypersurfaces de dimension au moins 3), il n'y a pas grand chose à dire : la seule demi-droite extrêmale de $\overline{NE}(X)$ est $\overline{NE}(X)$ tout entier, et elle est négative. Sa contraction est le morphisme constant. Toute application algébrique non constante définie sur $\mathbf{P}^n$ est donc à fibres finies.

2) Lorsque X est une quadrique lisse dans $\mathbf{P}^3$, elle est isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et il y a 2 demi-droites extrêmales dans $\overline{NE}(X)$. Elles sont négatives et leurs contractions correspondent à chacune des deux projections $X \to \mathbf{P}^1$.

3) Lorsque X est une cubique lisse dans $\mathbf{P}^3$, la classe de chacune des 27 droites contenues dans X engendre une demi-droite extrêmale négative. Le sous-cône $\sum_{i=1}^{6} \mathbf{R}^+[C_i]$ est extrêmal négatif et sa contraction est l'éclatement $X \to \mathbf{P}^2$.

4) Soit X la surface obtenue en éclatant $\mathbf{P}^2$ en 9 points ; l'espace vectoriel $N_1(X)$ est de dimension 10 (on gagne une dimension à chaque éclatement). Il existe sur X une infinité dénombrable de courbes d'auto-intersection -1 et d'intersection -1 avec K_X, qui donnent lieu à des demi-droites extrêmales négatives distinctes dans $\overline{NE}(X)$. Celles-ci « s'accumulent » sur l'hyperplan sur lequel K_X s'annule (c'est un fait général que les demi-droites extrêmales négatives du théorème de Mori sont localement discrètes dans le demi-espace ouvert sur lequel K_X est strictement négatif).

Ce théorème permet d'envisager (un jour) la classification des variétés algébriques selon le programme de Mori : partant d'une variété algébrique lisse X, on contracte une demi-droite extrêmale négative (s'il en existe), obtenant ainsi une application algébrique $c : X \to Y$. On voudrait recommencer la procédure avec Y, jusquà obtenir une variété sur laquelle K_X est d'intersection positive avec toute courbe.

Divers problèmes apparaissent qui dépendent du type de la contraction $c : X \to Y$, le principal étant que Y n'est en général plus lisse. Il y a essentiellement trois cas.

1) **Cas** $\dim Y < \dim X$**.** Cela arrive par exemple lorsque X est un fibré projectif sur Y et que la demi-droite contractée est engendrée par la classe d'une droite contenue dans une fibre.

2) **Cas** c **birationnelle et divisorielle** (c'est-à-dire que c n'est pas injective sur une hypersurface de X). Cela arrive par exemple quand X est un éclatement de Y.

3) **Cas** c **birationnelle et « petite »** (c'est-à-dire que c est injective sur le complémentaire d'une sous-variété de X de codimension au moins 2).

Dans les deux premiers cas, les singularités de Y sont encore raisonnables, mais plus du tout dans le troisième cas, où celles-ci sont telles que la théorie de l'intersection entre courbes et hypersurfaces s'effondre complètement. On ne peut plus continuer le programme esquissé plus haut avec Y, et on cherche au contraire une autre petite contraction $c' : X' \to Y$, où X' est une variété algébrique à singularités raisonnables avec laquelle on pourra continuer le programme et c' la contraction d'une demi-droite extrêmale *positive* (rappelons que notre but est de rendre la classe canonique «de plus en plus positive»). Cette opération chirurgicale (on remplace une sous-variété de codimension au moins 2 de X par une autre) s'appelle un *flip* et c'est l'une des conjectures centrales du programme de Mori que de prouver leur existence (elle n'est connue qu'en dimension 3).

Le second problème est aussi dû aux flips : la dimension de l'espace vectoriel $N_1(Y)$ est dans chacun des deux premiers cas celle de $N_1(X)$ moins 1, ce qui assure, ces espaces étant de dimension finie, que le processus s'arrêtera en un temps fini. Dans le cas d'un flip $c' : Y' \to X$ de c, les espaces vectoriels $N_1(Y')$ et $N_1(Y)$ *ont même dimension*, et on est confronté à la question difficile d'exclure la possibilité d'une succession infinie de flips.

Un exemple de flip. Le produit $P = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$ peut se réaliser comme sous-variété de $\mathbf{P}^5$ (par l'application algébrique $((x_0, x_1), (y_0, y_1, y_2)) \mapsto (x_0y_0, x_1y_0, x_0y_1, x_1y_1, x_0y_2, x_1y_2)$). Soit Y le cône (dans $\mathbf{P}^6$) sur P. Il existe une variété algébrique lisse Y' de dimension 4 et une application algébrique $f : Y' \to Y$ (appelée éclatement) qui consiste à remplacer le sommet du cône Y par une copie de P. Il existe des applications algébriques birationnelles $Y' \to X_1$ et $Y' \to X_2$ (où X_1 et X_2 sont des variétés algébriques lisses) qui coïncident sur P avec les projections $P \to \mathbf{P}^1$ et $P \to \mathbf{P}^2$, qui sont injectives sur le complémentaire de P et à travers lesquelles f se factorise. On obtient ainsi des applications algébriques $X_i \to Y$ qui sont des petites contractions de demi-droites extrêmales. La demi-droite est négative pour X_2 et positive pour X_1. La contraction $X_1 \to Y$ est donc le flip de la contraction $X_2 \to Y$.