POLYTOPES ET GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Olivier Debarre

1 Polytopes et convexes compacts dans $\mathbf{R}^n$

Je voudrais présenter deux problèmes d'énoncés élémentaires relatifs aux solides convexes dans $\mathbf{R}^n$, pour expliquer ensuite comment la géométrie algébrique, via la construction des variétés toriques, permet de les résoudre.

Dans tout l'exposé, on se donne un réseau N de rang n et on note $N_\mathbf{R} = N \otimes \mathbf{R}$ l'espace vectoriel réel associé. On aura aussi besoin du dual $M = \mathrm{Hom}_\mathbf{Z}(N, \mathbf{Z})$ et de l'espace vectoriel réel $M_\mathbf{R} = M \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{R}$.

1.1 Polytopes

Un polytope est l'enveloppe convexe dans $N_\mathbf{R}$ d'une partie finie qui engendre $N_\mathbf{R}$. On note f_i le nombre de faces de dimension i.

Un polytope étant contractile, on a l'égalité d'Euler

$$f_0 - f_1 + f_2 - \cdots + (-1)^{n-1} f_{n-1} + (-1)^n = 1$$

Pour les polytopes *simpliciaux*, dont les facettes (c'est-à-dire les faces de dimension $n-1$) ont toutes n sommets, il y a des contraintes supplémentaires : si on pose $f_{-1} = 1$ et, pour $0 \le p \le n$,

$$h_p = \sum_{i=p}^{n} (-1)^{i-p} \binom{i}{p} f_{n-1-i} \tag{1}$$

on a les relations de Dehn–Sommerville

$$h_p = h_{n-p} \qquad \text{pour} \quad 0 \le p \le n \tag{2}$$

(on vérifie que $h_0 = h_n$ est la relation d'Euler), les inégalités

$$h_{p-1} \leq h_p \qquad \text{pour} \quad 1 \leq p \leq n/2 \tag{3}$$

ainsi qu'une autre série d'inégalités que je ne préciserai pas et dont on sait montrer qu'elles caractérisent, avec les relations (2) et (3), tous les $(f_0, \dots, f_{n-1})$ possibles.

Exemples 1 (1) En dimension 3, la relation d'Euler s'écrit

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2$$

Comme chaque face a trois côtés et que chaque côté est sur deux faces, on a aussi

$$3f_2 = 2f_1$$

Tout est donc déterminé par le nombre de sommets f_0, qui doit par ailleurs être au moins 4. Comme $h_0 = f_2 - f_1 + f_0 - 1$, $h_1 = f_1 - 2f_0 + 3$, $h_2 = f_0 - 3$ et $h_3 = 1$, ces relations équivalent à $h_0 = h_3$, $h_1 = h_2$ et $h_0 \geq h_1$. Ce sont les seules conditions.

(2) Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de N et $e_0 = -e_1 - \cdots - e_n$. On utilisera les polytopes suivants :

- le polytope S_n (simplexe) engendré par les vecteurs $e_0, e_1, \dots, e_n$, pour lequel
$$f_i = \binom{n+1}{i+1}$$
- le polytope A_n engendré par les vecteurs $-e_0, \pm e_1, \dots, \pm e_n$; il n'est pas immédiat de montrer qu'il n'est simplicial que pour n pair (pour $n = 3$, par exemple, les sommets $-e_0, e_1, e_2$ et $-e_3$ sont sur la même face), encore moins de calculer les f_i !
- le polytope B_n engendré par les vecteurs $\pm e_0, \pm e_1, \dots, \pm e_n$. Il n'est simplicial que pour n pair. On a par exemple pour B_4
$$f_0 = 10 \quad f_1 = 35 \quad f_2 = 50 \quad f_3 = 25$$
mais j'ai obtenu ces valeurs par une méthode détournée (voir exemple 4(4)).

1.2 Volumes mixtes

On considère des convexes compacts $K_1, \dots, K_n$ dans $N_{\mathbf{R}}$ et leur somme de Minkowski

$$m_1 K_1 + \cdots + m_n K_n = \{m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n \mid x_i \in K_i\}$$

On peut montrer que le volume de cet ensemble est un polynôme homogène de degré n en $m_1, \dots, m_n$ dont on note $\mathrm{vol}(K_1, \dots, K_n)$ le coefficient de $m_1 \dots m_r$, fois $n!$; on appelle ce nombre le *volume mixte* de $K_1, \dots, K_n$. On montre que c'est une fonction croissante de chaque K_i donc que c'est en particulier un réel positif inférieur au volume de l'enveloppe convexe de $K_1 \cup \cdots \cup K_n$. On a l'inégalité

$$\mathrm{vol}(K_1, \dots, K_n)^n \geq \mathrm{vol}(K_1) \cdots \mathrm{vol}(K_n) \tag{4}$$

Exemples 2 (1) Si B est la boule unité dans $N_{\mathbf{R}}$, le coefficient de t dans le polynôme $\mathrm{vol}(K + tB)$, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} \mathrm{vol}(K + tB)|_{t=0}$$

est $n \, \mathrm{vol}(B, K, \dots, K)$[1]. Lorsque la frontière ∂K de K est lisse, c'est sa mesure ; sinon, c'en est une bonne définition. La formule (4) s'écrit

$$\mathrm{vol}(\partial K)^n \geq n \, \mathrm{vol}(B)^{1/n} \, \mathrm{vol}(K)^{1-1/n}$$

C'est l'inégalité isopérimétrique.

(2) On peut aussi interchanger les rôles de K et B : la dérivée

$$\frac{d}{dt} \mathrm{vol}(B + tK)|_{t=0}$$

s'écrit $\mathrm{vol}(\partial B) \rho_K$, où

$$\rho_K = \frac{1}{\mathrm{vol}(B)} \int_{\partial K} \|x - x_G\|$$

est le rayon moyen de K (x_G est le centre de gravité de K). On obtient

$$\mathrm{vol}(K) \leq \mathrm{vol}(\rho_K B)$$

[1] De façon générale, on a la formule

$$\mathrm{vol}(K + tB) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathrm{vol}(\overbrace{B, \dots, B}^{i \text{ fois}}, \overbrace{K, \dots, K}^{n-i \text{ fois}}) t^i$$

2 Variétés toriques

2.1 Cônes et éventails

Pour tout cône σ dans $N_{\mathbf{R}}$ engendré par un nombre fini de vecteurs de N, le cône dual

$$\sigma^\vee = \{u \in M \mid \langle u, v\rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in \sigma\}$$

est aussi un cône engendré par un nombre fini d'éléments de M. On lui associe la sous-algèbre $\mathbf{C}[\sigma^\vee \cap M]$ de $\mathbf{C}[M] = \mathbf{C}[T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_n, T_n^{-1}]$. Le monoïde $\sigma^\vee \cap M$ est de type fini (lemme de Gordon) : on peut donc trouver un morphisme de $\mathbf{C}$-algèbres surjectif

$$f : \mathbf{C}[Y_1, \ldots, Y_s] \longrightarrow \mathbf{C}[\sigma^\vee \cap M]$$

La variété algébrique U_σ est la sous-variété de $\mathbf{C}^s$ définie par l'annulation des éléments du noyau de f.

Exemples 3 On fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de N.

(1) Si $\sigma = \{0\}$, on a $\sigma^\vee = M$ et $\mathbf{C}[\sigma^\vee \cap M] = \mathbf{C}[M]$ est engendré par $T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_n, T_n^{-1}$. La variété U_σ est définie dans $\mathbf{C}^{2n}$ par les équations $Y_{2i}Y_{2i+1} = 1$ pour $i = 1, \ldots, s$. C'est donc le tore algébrique $(\mathbf{C}^*)^n$, que l'on notera $\mathbf{T}$.

(2) Si $\sigma = \mathbf{N}e_1 + \cdots + \mathbf{N}e_n$, on a $\mathbf{C}[\sigma^\vee \cap M] = \mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]$ et la variété U_σ est $\mathbf{C}^n$.

(3) Si $\sigma = \mathbf{N}e_1 + \cdots + \mathbf{N}e_m$, la variété U_σ est $\mathbf{C}^m \times (\mathbf{C}^*)^{n-m}$.

(4) Il ne faut pas croire que l'on obtient que des variétés lisses : considérons pour $n = 3$ le cône σ engendré par les vecteurs e_1, e_2, e_3 et $e_1 + e_2 - e_3$. Son dual est engendré par ses quatre faces $e_1^*, e_2^*, e_1^* + e_3^*$ et $e_2^* + e_3^*$, donc

$$\mathbf{C}[\sigma^\vee \cap \mathbf{Z}^3] = \mathbf{C}[T_1, T_2, T_1T_3, T_2T_3] \simeq \mathbf{C}[Y_1, \ldots, Y_4]/(Y_1Y_4 - Y_2Y_3)$$

et U_σ est un cône quadratique dans $\mathbf{C}^4$.

Si τ est une face de σ, c'est-à-dire qu'il existe $u \in \sigma^\vee \cap M$ (que l'on peut prendre primitif) tel que $\tau = \sigma \cap \mathrm{Ker}(u)$, on a

$$\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbf{R}u$$

et

$$\tau^\vee \cap M = (\sigma^\vee \cap M) + \mathbf{Z}u = (\sigma^\vee \cap M) + \mathbf{N}(-u)$$

On obtient donc l'algèbre $\mathbf{C}[\tau^\vee \cap M]$ en inversant u dans $\mathbf{C}[\sigma^\vee \cap M]$. Si $u = f(P)$, la variété U_τ est l'ouvert de U_σ défini par la condition $P(y) \neq 0$. Ainsi, dans l'exemple (2) ci-dessus, le tore $\mathbf{T}$ est défini dans $\mathbf{C}^n$ par $T_1 \cdots T_n \neq 0$.

En particulier, si $\{0\}$ est une face de σ (c'est-à-dire si σ ne contient pas de droite), le tore $\mathbf{T} = U_{\{0\}}$ est un ouvert de U_σ.

On définit une variété torique comme une union « d'ouverts de cartes » du type U_σ recollés le long des ouverts U_τ correspondants à leurs faces communes. On se donne pour cela une collection finie Δ (appelée *éventail*) de cônes rationnels dans $N_{\mathbf{R}}$ vérifiant

- $\{0\} \in \Delta$;
- chaque face d'un cône de Δ est dans Δ ;
- l'intersection de deux cônes de Δ est une face de chacun d'eux.

On obtient ainsi une variété algébrique X_Δ de dimension n dont on montre qu'elle est séparée. Elle contient un ouvert dense isomorphe au tore $\mathbf{T}$ de dimension n. L'action du tore sur lui-même se prolonge à une action sur X_Δ.

La variété X_Δ peut être singulière. Néanmoins, lorsque Δ est *simplicial* (chaque cône (maximal) est engendré par des vecteurs indépendants), elle n'a que des singularités quotient. Lorsque de plus chaque cône maximal de Δ est engendré par une base de N, la variété X_Δ est *lisse* (*cf.* exemple 3(3)). Elle est *compacte* lorsque la réunion des cônes de Δ est $N_{\mathbf{R}}$ (on dit alors que Δ est *complet*).

Exemples 4 (1) Considérons l'éventail plan réunion des cônes

$$\sigma_0 = \langle e_1 + e_2, e_2 \rangle \qquad \sigma_1 = \langle e_1, e_1 + e_2 \rangle$$

On a

$$\sigma_0^\vee = \langle e_1^*, -e_1^* + e_2^* \rangle \qquad \sigma_0 1^\vee = \langle e_1^* - e_2^*, e_2^* \rangle$$

donc

$$\mathbf{C}[\sigma_0^\vee \cap \mathbf{Z}^2] = \mathbf{C}[T_1, T_1^{-1}T_2] \qquad \mathbf{C}[\sigma_1^\vee \cap \mathbf{Z}^2] = \mathbf{C}[T_1 T_2^{-1}, T_2]$$

On vérifie que X_Δ est isomorphe à la surface dans $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}^1$ définie par l'équation $T_1 X_1 = T_2 X_0$, l'ouvert U_{σ_i} correspondant à $X_i \neq 0$. C'est donc l'éclatement de l'origine dans $\mathbf{C}^2$.

Plus généralement, si on remplace un cône lisse maximal (c'est-à-dire engendré par une base $e_1, \ldots, e_n$ de N) d'un éventail Δ et ses faces par les cônes (lisses) engendrés par les sous-ensembles de $\{e_1, \ldots, e_n, e_1 + \cdots + e_n\}$ qui ne contiennent pas $\{e_1, \dots, e_n\}$, on obtient un éventail $\widetilde{\Delta}$ et un morphisme $X_{\widetilde{\Delta}} \to X_\Delta$ qui est l'éclatement d'un point (le seul point de U_σ invariant sous l'action du tore $\mathbf{T}$).

(2) On vérifie que la surface torique associée au polytope de sommets $\pm e_1, \pm e_2$ est $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Il ressort de (1) que X_{A_2} est l'éclaté de $\mathbf{P}^2$ en deux points (invariants) et que X_{B_2} est l'éclaté de $\mathbf{P}^2$ en trois points (invariants).

(3) Pour les trois cônes maximaux $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ de l'éventail construit sur S_2, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[\sigma_0^\vee \cap \mathbf{Z}^2] &= \mathbf{C}[T_1, T_2] \\ \mathbf{C}[\sigma_1^\vee \cap \mathbf{Z}^2] &= \mathbf{C}[T_1^{-1}, T_1^{-1}T_2] \\ \mathbf{C}[\sigma_2^\vee \cap \mathbf{Z}^2] &= \mathbf{C}[T_2^{-1}, T_1T_2^{-1}] \end{aligned}$$

La surface X_{S_2} est réunion de trois ouverts isomorphes à $\mathbf{C}^2$, qui se recollent pour former $\mathbf{P}^2$ (avec $X = T_1/T_0$ et $Y = T_2/T_0$). Plus généralement, X_{S_n} est isomorphe à $\mathbf{P}^n$.

(4) La description de $X_{A_{2m}}$ et de $X_{B_{2m}}$ n'est pas facile pour $m \geq 2$. Ces variétés s'obtiennent à partir de $\mathbf{P}^{2m}$ par une suite d'éclatements et de contractions explicites. Par exemple, X_{B_4} s'obtient à partir de $\mathbf{P}^4$ en

- éclatant les 5 points invariants sous l'action du tore ;
- éclatant les transformés stricts des $\binom{5}{2}$ droites qui les joignent ;
- contractant les 10 diviseurs exceptionnels (qui isomorphes à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$) sur des $\mathbf{P}^2$.

On peut utiliser cette description pour calculer les nombres de Betti[2] de X_{B_4}.

Théorème 5 *Lorsque Δ est simplicial et complet, on a $h_p = b_{2p}(X_\Delta)$, les nombres de Betti impairs étant nuls.*

Ici, les nombres h_p sont définis à partir des f_i (nombre de cônes de dimension $i+1$ de Δ) par la formule (1). Dans le cas où Δ est *lisse*, le théorème se démontre en écrivant que X_Δ est réunion disjointe de f_i orbites isomorphes à $(\mathbf{C}^*)^{n-i-1}$, pour $i = -1, 0, \dots, n-1$, et en utilisant

[2]Si $\widetilde{X} \to X$ est l'éclatement d'une sous-variété Z lisse de codimension c, on a

$$b_i(\widetilde{X}) = b_i(X) + b_{i-2}(Z) + \cdots + b_{i-2c+2}(Z)$$

- soit l'existence des polynômes de Poincaré virtuels (qui découle de l'existence de structures de Hodge mixtes sur la cohomologie à support compact des variétés). Ce polynôme vaut $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ pour une variété compacte lisse et $(t^2-1)^r$ pour un tore de dimension r, de sorte que,

$$\begin{aligned} P_{X_\Delta}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k(X_\Delta) t^k \\ &= \sum_{j=-1}^{n-1} f_j (t^2-1)^{n-j-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{p=0}^{i} f_{n-i-1} \binom{i}{p} (-1)^{i-p} t^{2p} \\ &= \sum_{p=0}^{n} h_p t^{2p} \end{aligned}$$

- soit la résolution par Deligne des conjectures de Weil : les variétés toriques sont définies sur les entiers et on peut compter leurs points dans $\mathbf{F}_q$. Comme le nombre de $\mathbf{F}_q$-points d'un tore de dimension r est $(q-1)^r$, on a

$$\mathrm{Card}(X_\Delta(\mathbf{F}_q)) = \sum_{j=-1}^{n-1} f_j (q-1)^{n-j-1} = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \sum_{j=0}^{\beta_j} \lambda_{ij}^r$$

où $q = p^r$ et $|\lambda_{ij}^r| = p^{i/2}$.

Lorsque Δ n'est que simplicial, la variété X_Δ n'a que des singularités quotient. Le premier des deux arguments ci-dessus reste valable si l'on remplace la cohomologie ordinaire par la cohomologie d'intersection et que l'on remarque que pour les variétés compactes à singularités quotient, ces deux cohomologies coïncident. On peut aussi trouver une base explicite de la cohomologie formée de classes d'adhérences d'orbites.

Tout polytope simplicial dans $\mathbf{N_R}$ dpeut être approximé (sans changer sa combinatoire) par un polytope simplicial à sommets dans $\mathbf{N_Q}$. On peut aussi supposer qu'il contient l'origine dans son intérieur. On lui associe l'éventail, donc une une variété torique compacte à singularités quotient.

La dualité de Poincaré (valable sur les variétés compactes à singularités quotient) entraîne les relations de Dehn–Sommerville (2).

Le théorème de Lefschetz difficile (valable pour la cohomologie d'intersection de toute variété projective) dit que le cup-produit par la classe d'une section hyperplane est injectif. On en déduit les relations (3).

2.2 Polytopes

À un polytope Q dans $N_{\mathbf{R}}$ à sommets dans $N_{\mathbf{Q}}$ qui contient l'origine dans son intérieur, on a associé l'éventail Δ_Q des cônes sur ses faces, donc une variété torique compacte notée X_Q. On a en fait une donnée supplémentaire : celle d'un diviseur ($\mathbf{T}$-invariant, de Cartier, effectif et ample) sur la variété X_Q, que l'on construit ainsi.

De façon générale, les orbites (sous l'action du tore $\mathbf{T}$) de codimension p dans une variété torique X_Δ correspondent aux cônes de dimension p dans Δ. En particulier, les diviseurs $\mathbf{T}$-invariants sont en correspondance bijective avec l'ensemble des cônes de dimension 1 (les rayons) de Δ.

Soit ψ_Q la fonction convexe continue, linéaire sur chaque cône de Δ_Q et qui vaut 1 sur chaque facette de Q ; on peut la définir ainsi : si

$$P = \{u \in M_{\mathbf{R}} \mid \langle u, v\rangle \leq 1 \text{ pour tout } v \in Q\}$$

est le polytope dual de Q, on pose

$$\psi_Q(v) = \max_{u\in P}\langle u, v\rangle = \max_{u \text{ sommet de P}}\langle u, v\rangle$$

On associe à Q le $\mathbf{Q}$-diviseur

$$D_Q = \sum_\tau \psi_Q(v_\tau) D_\tau$$

sur la variété X_Q, où τ décrit l'ensemble des sommets de Q et v_τ est le plus petit vecteur non nul de $N \cap \mathbf{R}^+\tau$.

Quitte à remplacer Q par $\frac{1}{m}Q$ (ce qui ne change pas l'éventail Δ), nous pouvons supposer que P est à sommets dans M ; le diviseur D_Q est alors entier. L'algèbre des fonctions régulières sur $\mathbf{T}$ est $\mathbf{C}[M]$. Tout élément u de M définit donc une fonction rationnelle sur X_Q régulière sur $\mathbf{T}$, notée χ^u. On montre que

$$H^i(X_Q, \mathcal{O}(D_Q)) \simeq \begin{cases} \bigoplus_{u\in P\cap M} \mathbf{C}\chi^u & \text{si} \quad i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier,

$$\chi(X_Q, \mathcal{O}(D_Q)) = \mathrm{Card}(P \cap M)$$

Soit m un entier strictement positif ; on a $(\frac{1}{m}Q)^\vee = mP$ et $D_{\frac{1}{m}Q} = mD_Q$. Le théorème de Riemann–Roch (faible) entraîne que

$$\mathrm{Card}(mP \cap M) = \chi(X_Q, \mathcal{O}(mD_Q))$$

est un polynôme en m de degré au plus n (théorème d'Ehrhart). Le coefficient de m^n est d'une part le volume de P (calculé par rapport au réseau M), d'autre part, par définition, le nombre d'intersection $\frac{1}{n!}D_Q^n$.

Plus généralement, on dit qu'un éventail Δ est adapté au polytope Q si ψ_Q est linéaire sur chaque éventail de Δ ; en d'autres termes, Δ est un raffinement de l'éventail Δ_Q. On a un morphisme propre birationnel $\mathbf{T}$-équivariant $\varepsilon : X_\Delta \to X_Q$. Le diviseur

$$\sum_\tau \psi_Q(v_\tau) D_\tau$$

sur la variété X_Δ n'est autre que $\varepsilon^* D_Q$. En particulier, on a encore

$$\mathrm{vol}(P) = \frac{(\varepsilon^* D_Q)^n}{n!}$$

sur X_Δ. Si on se donne des polytopes $P_1, \ldots, P_n$ de dimension n dans $M_{\mathbf{R}}$ à sommets dans M, on peut trouver un éventail Δ qui est adapté à chacun des polytopes duaux $Q_1, \ldots, Q_n$. Si $m_1, \ldots, m_n$ sont des entiers positifs, on a

$$\psi_{m_1 Q_1 + \cdots + m_n Q_n} = m_1 \psi_{Q_1} + \cdots + m_n \psi_{Q_n}$$

donc

$$D_{m_1 Q_1 + \cdots + m_n Q_n} = m_1 D_{Q_1} + \cdots + m_n D_{Q_n}$$

On en déduit

$$\mathrm{vol}(m_1 P_1 + \cdots + m_n P_n) = \frac{1}{n!}(m_1 D_{Q_1} + \cdots + m_n D_{Q_n})^n$$

donc, par linéarité du produit d'intersection,

$$\mathrm{vol}(P_1, \ldots, P_n) = D_{Q_1} \cdot \cdots \cdot D_{Q_n}$$

La formule (4) résulte alors d'une généralisation du théorème de l'indice de Hodge sur la variétés algébriques projectives. Le cas général s'en déduit en approximant des convexes compacts quelconques par des polytopes qui sont entiers pour un réseau bien choisi (de plus en plus fin).

3 Variétés de Fano

Soit Δ un éventail définissant une variété torique X_Δ compacte et lisse. Rappelons que cela signifie que Δ est complet et que chaque cône maximal est engendré par une base de N. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de N,

$$\omega = \frac{de_1}{e_1} \wedge \cdots \wedge \frac{de_n}{e_n}$$

est une n-forme différentielle méromorphe définie sur le tore $\mathbf{T}$, indépendante, au signe près, du choix de la base, dont on vérifie qu'elle a un pôle simple le long de chaque diviseur $\mathbf{T}$-invariant. On dit que X_Δ est une variété de Fano si l'opposé du diviseur des pôles de ω (appelé diviseur anticanonique et noté $-K_{X_\Delta}$), c'est-à-dire la somme des diviseurs $\mathbf{T}$-invariants, est ample, c'est-à-dire obtenu par la procédure décrite au § 2.2. Les variétés de Fano toriques sont donc toutes obtenues à partir de polytopes satisfaisant la condition suivante.

Définition 6 *Un polytope de Fano est un polytope dans $N_{\mathbf{R}}$ qui contient l'origine dans son intérieur et dont chaque facette est engendrée par une base de N.*

Pour un tel polytope Q, de dual P, on a

$$(-K_{X_Q})^n = n! \operatorname{vol}(P) \tag{5}$$

Remarque 7 Les sommets d'un tel polytope Q sont dans N, et ceux de son dual P dans M. Il y a une correspondance bijective entre les sommets de Q (resp. de P) et les facettes de P (resp. de Q). Pour chaque sommet u de P et chaque sommet v de Q, on a $\langle u, v\rangle \leq 1$ et il y a égalité si et seulement si v est sur la facette F_u de Q correspondant au sommet u de P (et vice-versa). Sinon, on a $\langle u, v\rangle \leq 0$, car u est dans M et v dans N.

Exemples 8 (1) Modulo l'action de $\mathrm{GL}(N)$, il n'y a que cinq polytopes de Fano de dimension 2. Ce sont ceux de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et de $\mathbf{P}^2$ éclaté en 0, 1, 2 ou 3 des points fixes de l'action de $\mathbf{T}$ sur $\mathbf{P}^2$ (c'est-à-dire $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, et $(0,0,1)$). On vérifie la formule (5) dans chacun des cas.

(2) Le polytope S_n de $\mathbf{P}^n$, ainsi que, pour n pair, les polytopes A_n et B_n définis dans l'exemple 1(2), sont des polytopes de Fano.

Voskresenskiĭ et Klyachko montrent qu'un polytope de Fano de dimension n a au plus n^2+1 sommets pour $n \geq 3$. On peut améliorer (asymptotiquement) cette borne en $n+2+2\sqrt{(n^2-1)(2n-1)}$. Le résultat ci-dessous, bien que plus faible, est plus élémentaire.

Théorème 9 *Le nombre de sommets d'un polytope de Fano de dimension n est au plus $2n^2$.*

DÉMONSTRATION. Comme l'origine est dans l'intérieur de P, elle est dans l'intérieur de l'envelope convexe d'au plus $2n$ sommets par le théorème de Steinitz. Cela signifie qu'il existe une relation

$$0 = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_d u_d$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ strictement positifs, où les sommets $u_1, \ldots, u_d$ de P engendrent l'espace vectoriel $M_{\mathbf{R}}$ et $n < d \leq 2n$. Soit v un sommet de Q. Comme $u_1, \ldots, u_d$ engendrent $M_{\mathbf{R}}$ et que v n'est pas nul, on doit avoir $\langle u_i, v\rangle \neq 0$ pour au moins un i, donc $\langle u_i, v\rangle > 0$ pour au moins un i. Cela signifie que v est sur la facette F_{u_i} de Q correspondant à ce u_i (*cf.* remarque 7). Comme chaque facette de Q a n sommets, on en déduit que le nombre de sommets est au plus nd, d'où le théorème. $\square$

Corollaire 10 *En chaque dimension, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de variétés de Fano toriques.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que modulo l'action de $\mathrm{GL}(N)$, il n'y a qu'un nombre fini de polytopes de Fano dans $N_{\mathbf{R}}$. On sait que le nombre de sommets est au plus $2n^2$. Comme chaque facette de Q a n sommets, leur nombre est au plus $\binom{2n^2}{n}$, donc le volume de Q est au plus $\frac{1}{n!}\binom{2n^2}{n}$. Fixons les sommets $e_1, \ldots, e_n$ d'une facette de Q. Pour tout autre sommet v de Q, le volume de l'enveloppe convexe de $\{0, e_1, \ldots, e_n, v\}$ est au plus $\frac{1}{n!}\binom{2n^2}{n}$, de sorte que la valeur absolue de chaque coordonnée de v dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est bornée par $\binom{2n^2}{n}$. Le vecteur entier v ne peut donc prendre qu'au plus $\left(2\binom{2n^2}{n}\right)^n$ valeurs, d'où le corollaire. $\square$

Ewald conjecture qu'un polytope de Fano de dimension n a au plus

$$2n + 2\left[\frac{n}{2}\right]$$

sommets. C'est vrai pour $n \geq 4$ par la classification des polytopes de Fano de Batyrev (complétée par Sato) et pour $n = 5$ par des résultats de Casagrande. Pour $n \leq 5$, il n'y a égalité que pour les polytopes isomorphes à $B_2^{n/2}$ (pour n pair) et $B_2^{(n-1)/2} \times S^1$ (pour n impair).

On s'intéresse maintenant à l'entier

$$(-K_{X_Q})^n = n! \operatorname{vol}(Q^\vee)$$

souvent appelé le *degré* de la variété de Fano X_Q. On montre le résultat suivant.

Théorème 11 *Soit Q un polytope de Fano de dimension n avec $n+\rho$ sommets, $\rho \geq 2$. On a*

$$\operatorname{vol}(Q^\vee) \leq \left(\frac{(n-1)^{\rho+1} - 1}{n-2} \right)^n \leq n^{\rho n}$$

Un polytope de Fano de dimension n avec $n+1$ sommets est isomorphe au polytope de S_n de $\mathbf{P}^n$, de sorte que

$$\operatorname{vol}(Q^\vee) = \frac{1}{n!}(-K_{\mathbf{P}^n})^n = \frac{1}{n!}(n+1)^n$$

Les polytopes de Fano Q de dimension n avec $n+2$ sommets ont été classifiés par Kleinschmidt et Sturmfels. On vérifie à la main

$$\operatorname{vol}(Q^\vee) = \frac{1}{n!}(-K_{X_Q})^n \leq \frac{1}{n!} n^{2n}$$

Pour chaques entiers $\rho \geq 2$ et $n \geq 4$ tels que $\frac{n}{\log n} \geq 2^{\rho-2}$, on peut construire un polytope de Fano Q de dimension n avec $n+\rho$ sommets tels que

$$(-K_{X_Q})^n \geq \left(\frac{n^\rho}{2^{\rho^2-1}(\log n)^{\rho-1}} \right)^n$$

Le théorème est conséquence des deux lemmes suivants.

Lemme 12 *Soit P un polytope dans $M_{\mathbf{R}}$ dont le seul point intérieur entier est l'origine. Soit b un nombre positif tel que pour tout sommet u de P et tout sommet v de $P^\vee$, on a*

$$-b \leq \langle u, v \rangle \leq 1$$

Alors

$$\operatorname{vol}(P) \leq (b+1)^n$$

Lemme 13 *Soit Q un polytope de Fano dans $N_{\mathbf{R}}$ avec $n+\rho$ sommets. Pour chaque sommet u de $Q^\vee$ et chaque sommet v de Q, on a*

$$-\frac{n-1}{n-2}((n-1)^\rho - 1) \leq \langle u, v \rangle \leq 1$$

lorsque $\rho \leq 2$.