La propriété de la diagonale

Olivier Debarre

17 octobre 2007

Résumé. Pragacz, Srinivas et Pati étudient dans une prépublication électronique de 2006 les variétés algébriques X qui satisfont ce qu'ils appellent la « propriété de la diagonale » : il existe sur $X \times X$ un fibré vectoriel de rang la dimension de X avec une section qui s'annule simplement sur la diagonale. Cette propriété est vérifiée si X est une variété de drapeaux SL_m/P. Elle entraîne la propriété plus faible suivante : pour chaque point x de X, il existe sur X un fibré vectoriel de rang la dimension de X avec une section qui s'annule simplement sur x. Si X est un groupe algébrique, ces deux propriétés sont équivalentes. J'étudierai ces deux propriétés (équivalentes) lorsque X est une variété abélienne, montrant en particulier qu'elles sont vérifiées pour les produits de jacobiennes de courbes.

Dans la prépublication électronique arXiv `math.AG/0609381`, Pragacz, Srinivas et Pati étudient ce qu'ils appellent la « propriété de la diagonale » (notée (D)) pour une variété (lisse)[1] X (*a priori* algébrique ou différentiable, mais nous ne considérerons ici que le cas algébrique, souvent propre, sur un corps algébriquement clos, souvent $\mathbf{C}$) de dimension n, à savoir : *il existe sur $X \times X$ un fibré vectoriel de rang n avec une section dont le schéma des zéros est la diagonale.*

L'existence d'un tel fibré induit une résolution de l'idéal de la diagonale par des fibrés vectoriels à l'aide d'un complexe de Koszul. Une telle résolution a été utilisée pour donner une description de la catégorie dérivée $D(X)$ de X (Kapranov), et s'est révélée utile pour étudier la K-théorie algébrique des espaces homogènes (Brion).

---

[1] Si X vérifie la propriété (D) pour un fibré vectoriel E,

$$\Omega_\Delta = \mathscr{I}_\Delta/\mathscr{I}_\Delta^2 \simeq E^\vee|_\Delta$$

est localement libre donc X est lisse.

1 Quelques exemples

Il est clair que les courbes lisses ont la propriété (D), et que tout produit fini de variétés qui ont la propriété (D) a encore cette propriété. Il y a d'autres exemples plus intéressants.

1.1 Les grassmanniennes

Soit G la grassmannienne des r-plans dans un espace vectoriel V. On a une suite exacte « tautologique » de fibrés vectoriels

$$0 \to S \to V_G \to Q \to 0$$

où $\mathrm{rang}(S) = r$. Posons $G_1 = G_2 = G$ et notons $p_1, p_2 : G_1 \times G_2 \to G$ les deux projections. La diagonale est le schéma des zéros de la section du fibré $\mathscr{H}om(p_1^* S_1, p_2^* Q_2)$ de rang $\dim(G)$ sur $G_1 \times G_2$ induite par le morphisme

$$p_1^* S_1 \to p_1^* V_{G_1} = V_{G_1 \times G_2} = p_2^* V_{G_2} \to p_2^* Q_2$$

Les grassmanniennes ont donc la propriété (D). Des résultats de Fulton entraînent que plus généralement, toute variété de drapeaux SL_m / P possède aussi cette propriété.

1.2 Les groupes algebriques

La propriété (D) pour une variété lisse X de dimension n entraîne, pour chaque point x de X, la propriété plus faible suivante, notée (P_x) : *il existe un fibré vectoriel E_x de rang n sur X avec une section dont le schéma des zéros est x.*

Lorsque X est un groupe algébrique, ces deux propriétés sont équivalentes à la propriété (P_0), notée simplement (P). En effet, il suffit de considérer le morphisme $f : X \times X \to X$ défini par $f(x, y) = xy^{-1}$ et le fibré vectoriel $f^* E_0$.

On en déduit par exemple que tout groupe affine a la propriété (D) (un résultat de M. P. Murthy dit que X a la propriété (P_x) pour tout point lisse x de X).

2 Un critère pour la propriété (D)

Un fibré en droites M sur X est cohomologiquement trivial si $H^i(X; M) = 0$ pour tout i. Si M est cohomologiquement trivial sur une variété propre et lisse X, il en est de même pour $M^{1}\ \omega_X$.

Le résultat principal de Pragacz, Srinivas et Pati est le suivant.

Théorème 1 Soit X une variété propre et lisse.

(i) Si X possède la propriété (D) pour un fibré vectoriel E et que son groupe de Picard est de type fini, il existe un fibré en droites cohomologiquement trivial M sur X tel que $\det(E) = p_1 M^{1}\ \ p_2(M\ \ \omega_X^{1})$.

(ii) Si $\dim(X) = 2$ et qu'il existe un fibré en droites cohomologiquement trivial sur X, alors X a la propriété (D).

La propriété Pic(X) de type fini sert à assurer l'isomorphisme

$$\mathrm{Pic}(X \ \ X) \simeq p_1 \mathrm{Pic}(X) \ \ p_2 \mathrm{Pic}(X)$$

Elle est vérifiée dès que $H^1(X; O_X) = 0$.

Démonstration. Soit s une section de E qui s'annule sur la diagonale . Au complexe de Koszul

$$0 \to \det(E^\vee) \to \ \ \to \ \ E^\vee \xrightarrow{s^\vee} I \ \ \to 0$$

est associée une classe $[s] \in \mathrm{Ext}^{n\ 1}_{X\ X}(I\ ; L^\vee)$, où $L = \det(E)$. Considérons la suite exacte

$$\mathrm{Ext}^{n\ 1}_{X\ X}(I\ ; L^\vee) \to \mathrm{Ext}^{n}_{X\ X}(O\ ; L^\vee) \to H^n(X\ \ X; L^\vee)$$

La classe ([s]) est associée au complexe

$$0 \to \det(E^\vee) \to \ \ \to \ \ E^\vee \xrightarrow{s^\vee} O_{X\ X} \to O\ \to 0$$

donc est non nulle. D'autre part, comme $E^\vee|\ \simeq\ $, on a $L|\ \simeq \omega^\vee$ et, par dualité de Serre

$$\mathrm{Ext}^{n}_{X\ X}(O\ ; L^\vee) \simeq H^n(\ ; (L\ \ \omega_{X\ X})|\ )^\vee = H^n(\ ; \omega\ )^\vee \simeq \mathbb{C}$$

de sorte que ([s]) engendre la droite $\mathrm{Ext}^{n}_{X\ X}(O\ ; L^\vee)$ et que est nul, donc aussi son dual

$$H^n(X\ \ X; L^\vee)^\vee \xrightarrow{\ \ } \mathbb{C}$$

Sous l'hypothèse $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$, il existe un fibré en droites M sur X tel que $L = p_1^* M^{-1} \otimes p_2^*(M \otimes \omega_X^{-1})$, et on vérifie que $\alpha^\vee$ n'est autre que la dualité de Serre

$$\bigoplus_{i=0}^{n} H^{n-i}(X, M^{-1} \otimes \omega_X) \otimes H^i(X, M) \longrightarrow \mathbf{C}$$

On en déduit $H^i(X, M) = 0$ pour tout i, ce qui prouve (i).

Pour (ii), on utilise la construction de Serre pour exhiber $E^\vee$ comme une extension

$$0 \to p_1^* M \otimes p_2^*(M^{-1} \otimes \omega_X) \to E^\vee \to \mathscr{I}_\Delta \to 0$$

□

2.1 Les surfaces

Corollaire 1 *Toute surface abélienne a la propriété (D).*

Corollaire 2 *Une surface $K3$ complexe générale n'a pas la propriété (D).*

Démonstration. On a $\mathrm{Pic}(X) = \mathbf{Z} \cdot [L]$, avec L ample donc $L^2 > 0$, de sorte que, pour tout entier m,

$$\chi(X, L^m) = \frac{m^2 L^2}{2} + 2 \geq 2$$

et L^m n'est jamais cohomologiquement trivial. Comme $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$, le théorème permet de conclure. □

Corollaire 3 *Toute surface projective lisse a un éclaté qui vérifie la propriété (D).*

2.2 Varietes de groupe de Picard Z

Proposition 1 *Soit X une variété projective lisse. On suppose* $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbf{Z}$*, que le générateur ample de* $\mathrm{Pic}(X)$ *a une section non nulle et que X a la propriété (D). Alors X est une variété de Fano d'indice ≥ 2.*

Démonstration. Soit L un générateur ample de $\mathrm{Pic}(X)$ et soit r l'entier tel que $\omega_X \simeq L^r$. Comme $\mathrm{Pic}(X) = \mathbf{Z}$, on a $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$ et le théorème s'applique. Si L^m est cohomologiquement trivial, on a

$$0 = h^0(X, L^m) = h^n(X, L^m) = h^0(X, L^{r-m})$$

Comme L a une section non nulle, on en déduit que m et $r - m$ sont strictement négatifs, donc $r \leq -2$ et X est une variété de Fano d'indice ≥ 2. $\square$

Corollaire 4 *Une intersection complète lisse de multidegré $(d_1, \ldots, d_r)$ dans $\mathbf{P}^n$, avec $1 \leq r \leq n-3$ et $\sum_i d_i \geq n$, n'a pas la propriété (D).*

On sait déjà que les quadriques lisses dans $\mathbf{P}^3$ ont la propriété (D) (elles sont isomorphes à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$), ainsi que les quadriques lisses dans $\mathbf{P}^5$ (elles sont isomorphes à la grassmannienne $G(2, \mathbf{C}^4)$). Il est montré dans [?], Theorem 3.1.4), par un argument numérique faisant intervenir les classes de Chern, qu'aucune quadrique lisse de dimension impaire ≥ 3 n'a la propriété (D). Pour les quadriques lisses de dimension 3, cet argument est particulièrement simple.

Proposition 2 *Une quadrique lisse dans $\mathbf{P}^4$ n'a pas la propriété (D).*

Démonstration. Les seuls fibrés en droites cohomologiquement triviaux sur X sont $L_1 = \mathscr{O}_X(-1)$ et $L_2 = \mathscr{O}_X(-2) = L_1^{-1} \otimes \omega_X$. Comme $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$, si X a la propriété (D), on a par le théorème, quitte à échanger les facteurs,

$$\det(E) = p_1^* L_1^{-1} \otimes p_2^* L_2^{-1}$$

Soit x un point de X. Notons E_x la restriction de E à $X \times \{x\}$; on a

$$c(E_x) = 1 + c_1[\text{quadrique}] + c_2[\text{droite}] + c_3[\text{point}]$$

avec $c_i \in \mathsf{Z}$ et $c_1 = c_3 = 1$. Par Grothendieck-Hirzebruch-Riemann-Roch,

$$\chi(X, E_x) = \frac{1}{6}(2c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) + \frac{3}{2}(c_1^2 - c_2) + \frac{13}{6}c_1 + 3 = \frac{15}{2} - 2c_2$$

ce qui est absurde. □

Questions. 1) Une cubique lisse dans P^4 a-t-elle la propriété (D) ?
2) Les quadriques lisses de dimension paire ont-elles la propriété (D) ?

3 Varietes abeliennes

On rappelle que pour une variété abélienne (de dimension g), la propriété (D) est équivalente à la propriété (P), c'est-à-dire à l'existence d'un fibré vectoriel E de rang g avec une section s dont le schéma des zéros est l'origine o. On a en particulier $c_g(E) = (o)$ dans le groupe de Chow de X.

Par Grothendieck-Hirzebruch-Riemann-Roch,

$$\chi(X, E) = \int_X \mathrm{ch}_g(E)$$

3.1 Varietes abeliennes non-principalement polarisees

Si (X, ℓ) est une variété abélienne polarisée de type $(\delta_1 \mid \cdots \mid \delta_g)$ très générale, $c_i(E)$ est, en cohomologie, un multiple rationel de ℓ^i. Comme $\frac{\ell^i}{\delta_1 \cdots \delta_i i!}$ est une classe entière non-divisible dans $H^{2i}(X, \mathsf{Z})$, on peut écrire

$$c_i(E) = a_i \frac{\ell^i}{\delta_1 \cdots \delta_i i!} \qquad \text{avec } a_i \in \mathsf{Z}.$$

et

$$\chi(X, E) = \delta_1 \cdots \delta_g \; D\Big(\frac{a_1}{\delta_1}, \ldots, \frac{a_g}{\delta_1 \cdots \delta_g}\Big)$$

où

$$D(b_1, \ldots, b_g) := \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ b_3/2! & b_2/2! & b_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_4/3! & b_3/3! & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ b_g/(g-1)! & b_{g-1}/(g-1)! & \cdots & b_3/3! & b_2/2! & b_1 \end{vmatrix}$$

Comme $\chi(X, E)$ doit être entier, on voit que lorsque $\delta_1 = 1$ (ce que l'on peut toujours supposer), $a_g = \deg(c_g(E))$ est divisible par $\mathrm{pgcd}((g-1)!, \delta_g)$.

Proposition 3 *Une variété abélienne* non-principalement polarisée *très générale de type* $(1 \mid \delta_2 \mid \cdots \mid \delta_g)$ *dont la dimension g est strictement supérieure à un facteur premier de δ_g n'a* pas *la propriété (P).*

3.2 Jacobiennes de courbes

Soit C une courbe (projective lisse connexe) de genre $g \geq 2$ et soit (JC, θ) sa jacobienne. On fixe un point c de C, ce qui permet de plonger la courbe C dans JC par $x \mapsto \mathscr{O}_C(x-c)$. On définit W_i comme la somme des i termes $C + \cdots + C$, avec $W_0 = \{o\}$.

Chaque élément ξ de JC définit un fibré en droites numériquement trivial P_ξ sur C. Plus précisément, on a un fibré en droites universel $\mathscr{P}$ sur $C \times JC$, uniquement défini par les propriétés

$$\mathscr{P}|_{\{c\}\times JC} \simeq \mathscr{O}_{JC} \quad \text{et} \quad \mathscr{P}|_{C\times\{\xi\}} \simeq P_\xi \quad \text{pour tout } \xi \in JC.$$

Posons

$$F = R^1 q_*(\mathscr{P} \otimes p^* \mathscr{O}_C(-c))$$

où $p : C \times JC \to C$ et $q : C \times JC \to JC$ sont les projections. Dans la terminologie de Mukai, le faisceau $\mathscr{O}_C(-c)$, vu comme un faisceau de torsion sur JC, est IT_1 et F est sa transformée de Mukai. C'est un faisceau localement libre de rang g sur JC et

$$c_{g-i}(F) = [W_i] \qquad \text{pour tout } i \in \{0, \dots, g\}$$

dans le groupe de Chow de JC.

Theoreme 2 *Pour tout $i \in \{0, \dots, g\}$, on a*

$$h^i(JC, F \otimes P_\xi) = \begin{cases} \binom{g-1}{i} & \textit{si } -\xi \in C\,; \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

De plus, le schéma des zéros de toute section non nulle de F est $W_0 = \{o\}$.

Corollaire 5 *Tout produit fini de jacobiennes de courbes satisfait la propriété (P).*

Le fibré F est stable (Kempf). En dimension 2, Mukai a montré que *sur une* surface *abélienne principalement polarisée* (X, θ)*, tout fibré stable de rang* 2 *avec* $c_1 = \theta$ *et* $c_2 = 1$ *est un translaté de* F *tensorisé par un* P_ξ.

On remarquera que le fibré E construit plus haut pour prouver la propriété (P) pour les *surfaces* abéliennes apparaît comme une extension

$$0 \to P_0 \to E^\vee \to \mathscr{I}_o \to 0$$

Il est donc différent de F.

On peut montrer que le fibré F ne se déforme pas hors du lieu jacobien. Cependant, le sous-ensemble de l'espace de modules $\mathscr{A}_g$ constitué des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g qui ont la propriété (P) est dense. Cela peut se voir ainsi : si E est une courbe elliptique à multiplication complexe, toute variété abélienne isogène à E^g est en fait *isomorphe* à un produit de courbes elliptiques deux à deux isogènes et ayant multiplication complexe. Les variétés abéliennes principalement polarisées que l'on peut construire ainsi sont denses dans $\mathscr{A}_g$ (elles correspondent aux matrices de périodes à coefficients dans des extensions quadratiques imaginaires de $\mathbf{Q}$). On connaît d'ailleurs des exemples explicites de telles variétés abéliennes principalement polarisées irréductibles qui ne sont pas des jacobiennes.

- Le quotient $\mathbf{C}^4/\mathbf{Z}[i]^4$ est une variété abélienne de dimension 4, que l'on munit de la polarisation principale irréductible qui, vue comme forme hermitienne positive unimodulaire sur $\mathbf{Z}[i]^4$, a pour partie réelle la forme quadratique canonique sur le réseau du système de racines E_8. Elle a la propriété (D), mais ce n'est pas une jacobienne de courbe.
- Roulleau a montré que les jacobiennes intermédiaires des hypersurfaces cubiques d'équation

  $$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^4 = 0 \qquad \text{(Fermat)}$$

  et

  $$x_0 x_1^2 + x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_4^2 + x_4 x_0^2 = 0 \qquad \text{(Klein)}$$

  dans $\mathbf{P}^4$ sont isomorphes à des produits de courbes elliptiques. Ce sont des variétés abéliennes principalement polarisées irréductibles de dimension 5 qui ont donc la propriété (D), mais ne sont pas des jacobiennes de courbes.

On peut toujours espérer que les jacobiennes soient les seules variétés abéliennes principalement polarisées de nombre de Picard 1 qui aient la propriété (P).

3.3 Une condition necessaire

Proposition 4 *Soit X une variété projective lisse dimension g et soit E un fibré vectoriel de rang g sur X avec une section s dont le schéma des zéros est un unique point x. Toutes les sections de* $\det(E) \otimes \omega_X$ *s'annulent en x.*

Démonstration. Posons $\mathscr{L} = \det(E) = \wedge^g E$. Au complexe de Koszul

$$0 \to \wedge^g E^\vee \to \cdots \to \wedge^2 E^\vee \to E^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathscr{I}_x \longrightarrow 0$$

est associée une classe $[s] \in \mathrm{Ext}_X^{g-1}(\mathscr{I}_x, \mathscr{L}^\vee)$. Comme précédemment, dans la suite exacte

$$\mathrm{Ext}_X^{g-1}(\mathscr{I}_x, \mathscr{L}^\vee) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ext}_X^g(\mathbf{C}_x, \mathscr{L}^\vee) \to H^g(X, \mathscr{L}^\vee) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ext}_X^g(\mathscr{I}_x, \mathscr{L}^\vee) \to 0$$

$\beta([s])$ engendre l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}_X^g(\mathbf{C}_x, \mathscr{L}^\vee)$, de sorte que β is surjective, et γ est bijective, de dual

$$H^0(X, \mathscr{L} \otimes \omega_X \otimes \mathscr{I}_x) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \mathscr{L} \otimes \omega_X)$$

En d'autres termes, toutes les sections de $\mathscr{L} \otimes \omega_X$ s'annulent en x. $\square$

3.4 Varietes abeliennes principalement polarisees

Si (X, θ) est une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension g, et E un fibré vectoriel de rang g sur X, on peut écrire en cohomologie $c_i(E) = a_i \theta^i / i!$, avec $a_i \in \mathbf{Z}$. On a $\chi(X, E) = D(a_1, \ldots, a_g)$ (*cf.*

§**??**), et en particulier

$$
\begin{aligned}
g = 3 \qquad & \chi(X,E) \equiv \frac{1}{2}(a_3 - 3a_1a_2) \pmod{\mathsf{Z}} \\
g = 4 \qquad & \chi(X,E) \equiv \frac{1}{6}(-a_4 + 4a_1a_3 + 3a_2^2) \pmod{\mathsf{Z}} \\
g = 5 \qquad & \chi(X,E) \equiv \frac{1}{24}(a_5 - 5a_1a_4 - 10a_2a_3 \\
& \qquad + 20a_1^2a_3 + 30a_1a_2^2 - 60a_1^3a_2) \pmod{\mathsf{Z}} \\
g = 6 \qquad & \chi(X,E) \equiv \frac{1}{5!}(-a_6 + 6a_1a_5 - 30a_1^2a_4 \\
& \qquad + 270a_1^2a_2^2 - 30a_2^3 + 15a_2a_4 + 10a_3^2) \pmod{\mathsf{Z}}
\end{aligned}
$$

Cela entraîne tout un tas de congruences. On a en particulier le résultat général suivant.

Proposition 5 *Si $p := g-1$ est* premier,

$$a_1a_{g-1} \equiv a_g \pmod{p}$$

En particulier, si $a_g = 1$, l'entier a_1 est premier à p.

DÉMONSTRATION. En développant le déterminant le long de sa dernière ligne, on obtient

$$\chi(X,E) = (-1)^{g-1}\frac{1}{(g-1)!}(a_g - a_1a_{g-1}) + a$$

où a est un rationnel dont le dénominateur n'a que des facteurs premiers $< p$. Comme $\chi(X,E)$ est entier, le lemme est démontré. □

Corollaire 6 *Soit (X,θ) une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension g et soit E un fibré vectoriel de rang g sur X avec une section dont le schéma des zéros est l'origine.*

Si E est stable*, ou si E est* semi-stable *et que $g-1$ est premier, $c_1(E) = \theta$.*

En particulier, si $g = 2$ et E est stable, le résultat de Mukai mentionné plus haut entraîne que E est un translaté du fibré F construit précédemment, tensorisé par un fibré en droites numériquement trivial.