ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

OLIVIER DEBARRE

Table des matières

1. Le théorème de Cauchy–Lipschitz

Une *équation différentielle* (du premier ordre) s'écrit

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{1}$$

où

$$f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$$

est une fonction continue, avec Ω ouvert (non vide) de $\mathbf{R}^n$ et I intervalle ouvert (peut-être infini) de $\mathbf{R}$.

Une *solution* de l'équation (1) est un couple (J, γ), où J est un sous-intervalle non vide et non réduit à un point de I et $\gamma : J \to \Omega$ est une application dérivable qui vérifie

$$\dot{\gamma}(t) = f(t, \gamma(t))$$

pour tout t dans J. Une solution est *maximale* si elle n'est pas la restriction d'une solution définie sur un intervalle strictement plus grand.

Les résultats principaux de la théorie portent sur l'existence et l'unicité des solutions.

On va chercher des solutions locales de l'équation (1). Remarquons qu'une solution vérifiant $\gamma(t_0) = x_0$ ne peut s'éloigner trop vite de x_0. En effet, si le cylindre

$$C = [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{B}(x_0, r)$$

est contenu dans $I \times \Omega$ et que

$$M = \sup_{(t,x)\in C} \|f(t,x)\|$$

toute solution $\gamma : J \to \Omega$ de (1) reste dans $\overline{B}(x_0, r)$ sur le sous-intervalle de

$$I' = [t_0 - \eta', t_0 + \eta'] \ , \qquad \text{avec } \eta' = \min(\eta, \tfrac{r}{M}),$$

sur lequel elle est définie, à savoir $I' \cap J$ (c'est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis). On dit que

$$C' = I' \times \overline{B}(x_0, r) \tag{2}$$

est un *cylindre de sécurité*. On dit que f est k*-lipschitzienne en* x sur ce cylindre si

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le k\|x_1 - x_2\| \tag{3}$$

pour tout t dans I' et tous x_1 et x_2 dans $\overline{B}(x_0, r)$. C'est le cas par exemple (pour un réel k convenable) si f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que r et $\min(\eta, \frac{r}{M})$ sont finis.

Théorème 1 (Cauchy–Lipschitz)**.** *Si f est k-lipschitzienne en x sur un cylindre de sécurité comme ci-dessus, l'équation (1) admet une unique solution $\gamma : I' \to \Omega$ vérifiant la condition initiale $\gamma(t_0) = x_0$.*

Il est important d'avoir une estimation explicite de la taille de l'intervalle sur laquelle la solution existe qui soit indépendante de k. Nous verrons dans le théorème 2 une variante de ce résultat lorsque $\Omega = \mathbf{R}^n$, souvent pratique pour les applications.

Le théorème 1 est souvent appliqué en faisant l'hypothèse « f localement lipschitzienne en x ». Cela signifie que pour tout (t_0, x_0) dans $I \times \Omega$, il existe un voisinage I' de t_0 dans I, un voisinage U de x_0 dans Ω et une constante k tels que l'inégalité (3) soit valable pour tout t dans I' et tous x_1 et x_2 dans U. C'est le cas par exemple si f est dérivable par rapport à x sur $I \times \Omega$ et que la dérivée partielle $\partial f/\partial x : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ est une fonction continue.

Le théorème de Cauchy–Lipschitz fournit alors l'existence et l'unicité d'une solution locale avec condition initiale fixée. Notons que par un argument de compacité[1], pour tout $[t_1, t_2] \subset I$ et tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante k telle qu'on ait l'inégalité (3) sur $[t_1, t_2] \times K$ (sans que cela bien sûr nous permette d'agrandir la taille de l'intervalle sur laquelle la solution construite est définie).

[1]Pour chaque $(t, x) \in [t_1, t_2] \times K$, on obtient un voisinage $I'_{t,x}$ de t dans I et un voisinage de x dans Ω, qui contient $B(x, 2r_{t,x})$, sur lesquels on a une inégalité (3) avec une constante $k_{t,x}$. Le compact $[t_1, t_2] \times K$ est recouvert par un nombre fini de $I'_{t_i,x_i} \times B(x_i, r_{t_i,x_i})$. Soit r le plus petit des r_{t_i,x_i}, soit k le plus grand des k_{t_i,x_i} et soit M un majorant de $|f|$ sur $[t_1, t_2] \times K$. Soient $t \in [t_1, t_2]$ et $x_1, x_2 \in K$, avec $(t, x_1) \in I'_{t_i,x_i} \times B(x_i, r_{t_i,x_i})$. Si $x_2 \in B(x_i, 2r_{t_i,x_i})$, on a la majoration (3) avec k ; sinon, $\|x_1 - x_2\| \ge r_{t_i,x_i} \ge r$ et on a la majoration (3) avec $2M/r$.

Exercice 1. *Montrer que pour toute condition initiale, il existe une solution de l'équation différentielle*

$$\dot{x} = \sin tx$$

définie sur $\mathbf{R}$.

Exercice 2. *Déterminer des solutions maximales de l'équation différentielle*

$$\dot{x} = x^2$$

Montrer qu'il existe une infinité de solutions maximales avec la même condition initiale.

Exercice 3. *Résoudre le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} &=& x^2 - y^2 \\ \dot{y} &=& 2xy \end{cases}$$

en posant $z = x + iy$.

Lorsque l'application f n'est plus localement k-lipschitzienne en x, il peut ne pas y avoir unicité des solutions. En revanche, il y a toujours existence (théorème de Cauchy–Peano–Arzela, [D], p. 127).

Exemples 1. (1) Les fonctions $t \mapsto 0$ et $t \mapsto t|t|$ sont solutions de la même équation différentielle $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$ et prennent la même valeur en 0.

(2) Les fonctions $t \mapsto 0$ et $t \mapsto t^3$ sont solutions de la même équation différentielle $\dot{x} = 3x^{2/3}$ et prennent la même valeur en 0.

2. Démontrer le théorème de Cauchy–Lipschitz

Il y a plusieurs façons de démontrer le théorème de Cauchy–Lipschitz.

La méthode du point fixe. La première remarque est que résoudre l'équation (1) avec la donnée initiale $\gamma(t_0) = x_0$ équivaut à résoudre l'équation intégrale

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, ds$$

où γ est une fonction continue à valeurs dans Ω. L'ensemble X des applications continues de I' dans $\overline{B}(x_0, r)$ muni de la distance δ de la convergence uniforme est un espace métrique complet, et on cherche un point fixe de l'application $T : X \to X$ définie par

$$T : \gamma \longmapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, ds$$

(on vérifie, et c'est là que le choix du cylindre de sécurité intervient, que $T(\gamma)$ est bien encore dans X). Pour appliquer un théorème de point fixe, on veut montrer que T est contractante. Or on calcule

$$\|T(\gamma_1)(t) - T(\gamma_2)(t)\| \leq k|t - t_0|\delta(\gamma_1, \gamma_2)$$

qui n'est pas suffisant, puisque l'on ne sait rien sur k. En revanche, on vérifie facilement par récurrence sur m

$$\|T^m(\gamma_1)(t) - T^m(\gamma_2)(t)\| \le \frac{k^m|t-t_0|^m}{m!}\,\delta(\gamma_1,\gamma_2) \le \frac{(k\eta')^m}{m!}\,\delta(\gamma_1,\gamma_2)$$

de sorte que l'application T^m est bien contractante pour $m \gg 0$. Elle admet donc un unique point fixe, et T aussi.

Notons que le choix de η', c'est-à-dire celui de I', est conditionné par le fait que l'on veut que l'application T envoie X dans lui-même. Lorsque $\Omega = \mathbf{R}^n$, on peut prendre $r = +\infty$ et la même démonstration s'applique avec $\eta' = \eta$, sous réserve que f soit k-lipschitzienne en x sur $[t_0-\eta, t_0+\eta] \times \mathbf{R}^n$. On a donc démontré le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit I un intervalle ouvert, soit $k : I \to \mathbf{R}^+$ une fonction continue et soit $f : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une fonction continue vérifiant*

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \le k(t)\|x_1 - x_2\|$$

pour tout x_1, x_2 dans $\mathbf{R}^n$ et tout t dans I. Pour toute condition initiale, il existe une solution de l'équation (1) définie sur I.

Avec les notations précédentes, f est k-lipschitzienne en x sur $[t_0-\eta, t_0+\eta] \times \mathbf{R}^n$, avec $k = \max_{t\in[t_0-\eta,t_0+\eta]} k(t)$.

Ce théorème s'applique en particulier aux *équations différentielles linéaires,* c'est-à-dire aux équations pour lesquelles $f(t,x) = A(t)(x)$, où $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est une fonction continue.

Exercice 4. *Montrer que pour toute condition initiale, il existe une solution de l'équation différentielle*

$$\dot{x} = t\sqrt{x^2+t^2}$$

définie sur $\mathbf{R}$.

La méthode des solutions approchées. On appelle *solution ε-approchée* une fonction $\gamma : J \to \Omega$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux qui vérifie

$$\|\dot{\gamma}(t) - f(t,\gamma(t))\| \le \varepsilon$$

pour tout point t dans J en lequel γ est dérivable. On peut construire de telles solutions par la méthode d'Euler (ou méthode de la tangente) : partant de $\gamma(t_0) = x_0$ et d'une subdivision de l'intervalle J, on prolonge γ sur l'intervalle de la subdivision qui contient t_0 en une fonction affine de dérivée $f(t_0,x_0)$ et ainsi de suite sur les autres intervalles. Si le pas de la subdivision est h, la fonction ainsi construite est $kh(M+1)$-approchée.

Pour montrer qu'une suite de solutions approchées converge vers une (vraie) solution, on utilise le lemme suivant, très pratique, sur les inéquations différentielles.

Lemme 1 (Gronwall)**.** *Soit* $g : [t_0, t_1[\times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ *une fonction continue. Soit* $\rho : [t_0, t_1[\to \mathbf{R}$ *une fonction dérivable vérifiant*

$$\dot\rho(t) = g(t, \rho(t)) \tag{4}$$

et soit $\gamma : [t_0, t_1[\to \mathbf{R}^n$ *une fonction dérivable vérifiant*

$$\|\dot\gamma(t)\| < g(t, \|\gamma(t)\|) \qquad \textit{pour tout } t \in [t_0, t_1[\ , \qquad \|\gamma(t_0)\| \le \rho(t_0)$$

Alors

$$\|\gamma(t)\| < \rho(t) \tag{5}$$

pour tout $t \in]t_0, t_1[$.

On peut appliquer ce lemme dans la situation suivante. Supposons qu'il existe une fonction continue $g : I \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ telle que, pour tout (t, x) dans $I \times \Omega$, on ait

$$\|f(t, x)\| < g(t, \|x\|)$$

Soient γ une solution de (1) et ρ une solution de (4) vérifiant $\|\gamma(t_0)\| = \rho(t_0)$ pour un t_0 dans I. Alors,

$$\|\gamma(t)\| < \rho(t) \qquad \text{pour tout } t > t_0 \text{ dans } I.$$

Démonstration du lemme. En utilisant des développements limités, on constate que (5) est vérifiée pour $t - t_0 > 0$ assez petit. Si la conclusion est fausse, il existe un plus petit $t_2 \in]t_0, t_1[$ en lequel on a $\|\gamma(t_2)\| = \rho(t_2)$. On a alors $\|\gamma(t)\| < \rho(t)$ pour $t \in]t_0, t_2[$ et

$$\|\dot\gamma(t_2)\| < g(t_2, \|\gamma(t_2)\|) = g(t_2, \rho(t_2)) = \dot\rho(t_2) \tag{6}$$

Un développement limité en t_2 donne, pour $t \in]t_0, t_2[$,

$$\begin{array}{rcl} \|\gamma(t)\| & \ge & \|\gamma(t_2)\| - (t_2 - t)\|\dot\gamma(t_2)\| + o(t_2 - t) \\ \rho(t) & = & \rho(t_2) - (t_2 - t)\dot\rho(t_2) + o(t_2 - t) \\ & > & \rho(t_2) - (t_2 - t)\|\dot\gamma(t_2)\| + o(t_2 - t) \end{array}$$

ce qui contredit (6). □

Supposons que f soit k-lipschitzienne sur le cylindre de sécurité C'. Soit γ_1 une solution ε_1-approchée de (1) et γ_2 une solution ε_2-approchée prenant la même valeur en t_0.

Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $\gamma : t \mapsto \gamma_2(t) - \gamma_1(t)$ vérifie l'inéquation différentielle

$$\|\dot\gamma(t)\| < \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k\|\gamma(t)\|$$

et $\gamma(t_0) = 0$. On déduit du lemme de Gronwall que $\|\gamma(t)\|$ est inférieur, pour $t > t_0$, à la solution de l'équation différentielle

$$\dot\rho(t) = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k\rho(t)$$

valant 0 en t_0. On obtient (en faisant tendre ε vers 0)

$$\|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}$$

pour tout t dans I' (le cas $t < t_0$ se traite de façon similaire, et donne lieu à la valeur absolue dans le membre de droite). Cela entraîne d'une part l'unicité (en prenant $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$), d'autre part l'existence : si (ε_m) est une suite de réels strictement positifs tendant vers 0, toute suite de solutions ε_m-approchées converge uniformément sur tout compact.

Exercice 5. *Soit $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On considère une solution $\gamma : [t_0, t_1[\to \mathbf{R}$ de l'équation différentielle*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{7}$$

a) Soit $\alpha : [t_0, t_1[\to \mathbf{R}$ une fonction dérivable vérifiant

$$\dot{\alpha}(t) < f(t, \alpha(t)) \qquad \textit{pour tout } t \in [t_0, t_1[\ , \qquad \alpha(t_0) \leq \gamma(t_0) \tag{8}$$

Montrer que l'on a

$$\alpha(t) < \gamma(t)$$

pour tout $t \in]t_0, t_1[$.

b) Soit $\beta : [t_0, t_1[\to \mathbf{R}$ une fonction dérivable vérifiant

$$\dot{\beta}(t) > f(t, \beta(t)) \qquad \textit{pour tout } t \in [t_0, t_1[\ , \qquad \beta(t_0) \leq \gamma(t_0) \tag{9}$$

Montrer que l'on a

$$\beta(t) > \gamma(t)$$

pour tout $t \in]t_0, t_1[$.

c) On se donne des fonctions dérivables $\alpha : [t_0, +\infty[\to \mathbf{R}$ vérifiant (8) et $\beta : [t_0, +\infty[\to \mathbf{R}$ vérifiant (9), sur $[t_0, +\infty[$.

On suppose f localement lipschitzienne en x. Montrer que toute solution maximale γ de (7) vérifiant $\alpha(t_0) \leq \gamma(t_0) \leq \beta(a)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$ et que pour tout $t \geq t_0$, on a

$$\alpha(t) \leq \gamma(t) \leq \beta(t)$$

d) On considère l'équation différentielle

$$\dot{x} = x - x^2 \tag{10}$$

et une solution maximale $\gamma :]t^-, t^+[\to \mathbf{R}$. Montrer que si γ prend une valeur ≥ 0, on a $t^+ = +\infty$, et que si γ prend une valeur ≤ 1, on a $t^- = -\infty$.

e) Résoudre l'équation différentielle (10) directement et analyser les trajectoires.

Exercice 6. *Reprenons l'étude de l'équation différentielle*

$$\dot{x} = \sin tx$$

commencée dans l'exercice 1. On sait que les solutions maximales sont définies sur $\mathbf{R}$. Soit $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une telle solution.

a) Montrer que γ est paire.

b) On suppose $\gamma(0) > 0$. Montrer que l'on a $\gamma(t) > 0$ pour tout t.

c) Montrer que l'équation $\gamma(t) = t$ a une unique solution (on pourra introduire une fonction continue $\beta : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ affine par morceaux, de dérivée 1 dans les régions $2n\pi < tx < (2n+1)\pi$, de dérivée 0 dans les régions $(2n+1)\pi < tx < (2n+2)\pi$, et de valeur $\gamma(0)$ en 0, et appliquer l'exercice 5.b)).

On note t_0 cette solution et on pose $n = [t_0^2/2\pi]$, de sorte que $2n\pi \leq t_0^2 < 2n\pi + 2\pi$.

d) Si $2n\pi + \pi \leq t_0^2 \leq 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$, montrer que l'on a

$$2n\pi + \pi \leq t\gamma(t) < 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$$

pour tout $t \geq t_0$ et

$$\lim_{t\to+\infty} t\gamma(t) = 2n\pi + \pi$$

(On pourra de nouveau appliquer l'exercice 5.)

e) Si $2n\pi \leq t_0^2 \leq 2n\pi + \pi$, montrer qu'il existe un réel $t_1 \geq t_0$ vérifiant $\gamma(t_1) < t_1$ et $t_1\gamma(t_1) > 2n\pi + \pi$. En déduire que l'on a

$$2n\pi + \pi \leq t\gamma(t) < 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$$

pour tout t assez grand et

$$\lim_{t\to+\infty} t\gamma(t) = 2n\pi + \pi$$

f) Si $2n\pi + \frac{3\pi}{2} < t_0^2 < 2n\pi + 2\pi$, montrer qu'il existe un réel $u_n \in \left]2n\pi + \frac{3\pi}{2}, 2n\pi + \pi\right[$ tel que

$$\lim_{t\to+\infty} t\gamma(t) = \begin{cases} 2n\pi + \pi & si \quad t_0^2 < u_n \\ 2n\pi + 2\pi & si \quad t_0^2 = u_n \\ 2n\pi + 3\pi & si \quad t_0^2 > u_n \end{cases}$$

(On pourra utiliser le théorème 3.)

Exercice 7. *Considérons l'équation différentielle*

$$\dot{x} = x^2 - t$$

et une solution maximale $\gamma :]t^-, t^+[\to \mathbf{R}$.

a) Montrer l'inégalité $t^- > -\infty$.

b) On suppose γ majorée. *Montrer $t^+ = +\infty$. Montrer qu'il existe un réel c tel que γ est croissante sur $]t^-, c]$ et décroissante sur $[c, +\infty[$.*

c) On note $\gamma_a : I_a \to \mathbf{R}$ la solution maximale telle que $\gamma_a(0) = a$. Si $a < b$, montrer que l'on a $\gamma_a(t) < \gamma_b(t)$ pour tout $t \in I_a \cap I_b$.

d) Montrer qu'il existe $a_0 \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\gamma_a \textit{ majorée} \iff a < a_0$$

e) Montrer que a_0 est fini et que, si $a > a_0$, l'intervalle I_a n'est pas majoré, la fonction γ_a est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

3. Appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz

Existence et unicité des solutions maximales. Sous les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz (f localement lipschitzienne en x), des solutions de (1) définies sur le même sous-intervalle de I et de même condition initiale coïncident.

Proposition 1. *Pour tout* $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$*, il existe une unique solution maximale* $\gamma :]t^-, t^+[\to \Omega$ *vérifiant* $\gamma(t_0) = x_0$*.*

Si $t^+ < \sup I$*, la fonction* γ *sort définitivement de tout compact de* Ω *lorsque* t *tend vers* t^+*. On a bien sûr une propriété analogue si* $t^- > \inf I$*.*

Démonstration. Des solutions $\gamma_1 : J_1 \to \Omega$ et $\gamma_2 : J_2 \to \Omega$ de même condition initiale coïncident sur $J_1 \cap J_2$ donc définissent une solution $\gamma : J_1 \cup J_2 \to \Omega$. Plus généralement, la famille(γ_k, J_k) de toutes les solutions de condition initiale donnée définit une solution $\gamma : \bigcup_k J_k \to \Omega$ qui est l'unique solution maximale.

Soit K un compact de Ω. S'il existe une suite (t_m) tendant vers t^+ telle que $\gamma(t_m) \in K$ pour tout m, on peut supposer quitte à extraire une suite que la suite $(\gamma(t_m))$ converge vers un point x_1 de K. Le théorème de Cauchy–Lipschitz entraîne qu'il existe une solution γ_1 définie sur $]t^+ - \varepsilon, t^+ + \varepsilon[$ telle que $\gamma_1(t^+) = x_1$ et le même ε convient pour toute condition initiale proche, comme par exemple $(t_m, \gamma(t_m))$ pour $m \gg 0$. Si on choisit un tel m qui vérifie en plus $t^+ < t_m + \varepsilon$, on obtient une solution qui prolonge strictement γ, d'où une contradiction.

En particulier, l'intervalle de définition de la solution maximale γ est ouvert. □

On appelle *trajectoire* d'une solution $\gamma : J \to \Omega$ de l'équation différentielle (1) son graphe, c'est-à-dire l'image de l'application

$$\begin{array}{rcl} J & \longrightarrow & \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \\ t & \longmapsto & (t, \gamma(t)) \end{array}$$

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz (f localement lipschitzienne en x), il passe par chaque point de $I \times \Omega$ une courbe intégrale et des courbes intégrales distinctes ne se coupent pas.

Exercice 8. *Soient* $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *une application continue et* a *et* b *des constantes vérifiant*

$$\forall (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \qquad \|f(t, x)\| \le a\|x\| + b$$

Montrer que les solutions maximales de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x)$$

sont définies sur $\mathbf{R}$*.*

Exercice 9. *On considère une solution maximale $(x,y) :]t^-, t^+[\to \mathbf{R}^2$ non identiquement nulle du système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x(x^2+y^2) \\ \dot{y} &= x + y(x^2+y^2) \end{cases}$$

a) Dériver x^2+y^2. En déduire $t^- = -\infty$.
b) Montrer $t^+ < +\infty$.
c) Transformer ce système en coordonnées polaires et le résoudre.

Exercice 10. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $f : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $a : I \to \mathbf{R}$ et $b : I \to \mathbf{R}$ des applications continues vérifiant*

$$\forall (t,x) \in I \times \mathbf{R}^n \qquad \langle f(t,x), x\rangle \leq a(t)\|x\|^2 + b(t)$$

Soit $\gamma :]t^-, t^+[\to \mathbf{R}^n$ une solution maximale de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t,x)$$

On pose $r(t) = \|\gamma(t)\|^2$.

a) Montrer $\dot{r}(t) \leq 2a(t)r(t) + 2b(t)$ (on pourra soit utiliser l'exercice 5.a), soit introduire une primitive A de la fonction a et une fonction ρ vérifiant $\dot{\rho}(t) = 2a(t)\rho(t) + 2b(t)$ et dériver $(r(t) - \rho(t))e^{-2A(t)}$).

b) En déduire $t^+ = \sup I$.

c) Montrer que toute solution maximale du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - x^3 + x \\ \dot{y} &= -x \end{cases}$$

(dit système de Van der Pol*) est définie sur $\mathbf{R}$.*

Dépendance des conditions initiales. Nous allons montrer que les solutions d'une équation différentielle dépendent continûment de la condition intiale.

On part comme d'habitude d'une équation différentielle (1)

$$\dot{x} = f(t,x)$$

où $f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ est une fonction continue, localement lipschitzienne en x, de sorte que l'on peut appliquer le théorème 1 de Cauchy–Lipschitz. Fixons $t_0 \in I$. Pour chaque $x_0 \in \Omega$, il existe par la proposition 1 une unique solution maximale γ_{x_0} vérifiant $\gamma_{x_0}(t_0) = x_0$, définie sur un sous-intervalle ouvert I_{x_0} de I contenant t_0.

Théorème 3. *Le sous-ensemble $U = \bigcup_{x_0\in\Omega} I_{x_0} \times \{x_0\}$ de $I \times \Omega$ est ouvert et l'application*

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \Omega \\ (t,x_0) & \longmapsto & \gamma_{x_0}(t) \end{array}$$

est continue.

Démonstration. Soient $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$. La solution maximale γ_{x_0} est définie sur un intervalle J_0. Prenons $[t_1 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon] \subset J_0$; nous allons montrer que pour tout x'_0 proche de x_0, la solution maximale $\gamma_{x'_0}$ est définie sur un intervalle J'_0 qui contient $[t_1, t_2]$. Cela montrera que U est ouvert.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[t_1 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon] \subset J_0$. Comme $\gamma_{x_0}([t_1 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon])$ est un compact dans l'ouvert Ω, il existe $r > 0$ tel que tout point à distance $\leq 2r$ de $\gamma_{x_0}([t_1 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon])$ est encore dans Ω.

L'idée est d'utiliser le lemme de Gronwall 1 pour montrer que la solution $\gamma_{x'_0}$ reste à petite distance de γ_{x_0}, donc reste confinée dans un compact.

Comme on l'a remarqué après l'énoncé du théorème de Cauchy–Lipschitz, si K est le compact

$$K = \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(x, \gamma_{x_0}([t_1 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon])) \leq r\} \subset \Omega$$

une majoration du type (3) est valable sur $[t_1 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon] \times K$.

Prenons $\|x'_0 - x_0\| \leq r$. La fonction $\gamma : t \mapsto \gamma_{x'_0}(t) - \gamma_{x_0}(t)$ est telle que $\gamma(t_0) = x'_0 - x_0$ et vérifie, pour tout $\varepsilon' > 0$, l'inéquation différentielle

$$\|\dot{\gamma}(t)\| < \varepsilon' + k\|\gamma(t)\|$$

tant que $\gamma_{x'_0}(t)$ reste dans K, donc en particulier tant que $\|\gamma(t)\| \leq r$. Le lemme de Gronwall entraîne, comme dans la démonstration ci-dessus du théorème de Cauchy–Lipschitz, que $\|\gamma(t)\|$ est inférieur, pour $t > t_0$, à la solution de l'équation différentielle

$$\dot{\rho}(t) = \varepsilon' + k\rho(t)$$

valant $\|x'_0 - x_0\|$ en t_0. On obtient (en faisant ensuite tendre ε' vers 0)

$$\|\gamma_{x'_0}(t) - \gamma_{x_0}(t)\| \leq \|x'_0 - x_0\| e^{k|t-t_0|} \tag{11}$$

En particulier, si on prend

$$\|x'_0 - x_0\| \leq \min\{re^{-k|t_0-t_1-\varepsilon|}, re^{-k|t_2+\varepsilon-t_0|}\}$$

la fonction $\gamma_{x'_0}$ reste confinée dans le compact K sur l'intervalle $[t_1 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon] \cap J'_0$. La proposition 1 entraîne qu'elle est définie au moins sur $]t_1 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon[$.

De plus, si M est un majorant de $|f|$ sur K, on obtient à partir de (11), pour tout t' dans $[t_1 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon]$,

$$\begin{aligned}
\|\gamma_{x'_0}(t') - \gamma_{x_0}(t)\| &\leq \|\gamma_{x'_0}(t') - \gamma_{x'_0}(t)\| + \|\gamma_{x'_0}(t) - \gamma_{x_0}(t)\| \\
&\leq |t - t'| \max_{u \in [t,t']} \|\dot{\gamma}_{x'_0}(u)\| + \|x'_0 - x_0\| e^{k|t-t_0|} \\
&\leq |t - t'| M + \|x'_0 - x_0\| e^{k|t-t_0|}
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du théorème. □

Équation différentielle dépendant d'un paramètre. Considérons une famille

$$\dot{x} = f_\lambda(t, x)$$

d'équations différentielles dépendant d'un paramètre λ dans un espace topologique Λ. On suppose la fonction

$$\begin{aligned} f : \Lambda \times I \times \Omega &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ (\lambda, t, x) &\longmapsto f_\lambda(t, x) \end{aligned}$$

continue et localement lipschitzienne en x. Fixons $x_0 \in \Omega$. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, le théorème de Cauchy–Lipschitz fournit une unique solution maximale $\gamma_\lambda : I_\lambda \to \Omega$ de l'équation $\dot{x} = f_\lambda(t, x)$ vérifiant $\gamma_\lambda(t_0) = x_0$.

Théorème 4. *Le sous-ensemble $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \times \{\lambda\}$ de $I \times \Lambda$ est ouvert et l'application*

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \Omega \\ (t, \lambda) &\longmapsto \gamma_\lambda(t) \end{aligned}$$

est continue.

On peut démontrer ce théorème en reprenant la démonstration du théorème de Cauchy–Lipschtiz à l'aide du théorème de point fixe, dont on utilise une version « à paramètre ». Cependant, dans le cas (fréquent) où la fonction Λ est un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et où f est localement lipschitzienne en (t, x) (par exemple si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à l'ensemble des variables), on se ramène au théorème 3 en ajoutant λ comme variable, c'est-à-dire en considérant le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(\lambda, t, x) \\ \dot{\lambda} &= 0 \end{cases}$$

défini sur l'ouvert $\Lambda \times \Omega$ de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n$, puisque se donner une solution $t \mapsto (\lambda(t), \gamma(t))$ de ce système prenant en t_0 la valeur (λ_0, x_0) est équivalent à se donner une solution de l'équation $\dot{x} = f_{\lambda_0}(t, x)$ prenant en t_0 la valeur x_0.

Inversement, on peut d'ailleurs déduire le théorème 3 du théorème 4 (il suffit pour cela de considérer x_0 comme un paramètre).

Il existe aussi des résultats de différentiabilité des solutions en fonction de paramètres (ou des conditions initiales). Je renvoie à [D], p. 285 et suivantes.

4. Équations différentielles autonomes

Il s'agit du cas où la fonction f de (1) ne dépend pas du temps t. On dit qu'une telle équation est *autonome.* C'est le cas par exemple des équations différentielles linéaires à coefficients constants $\dot{x} = Ax$.

Toute équation différentielle peut en fait se ramener à une équation de ce type en considérant le temps comme une variable de position supplémentaire : on considère alors le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} & = & f(t,x) \\ \dot{t} & = & 1 \end{cases}$$

C'est cependant un point de vue qu'il est intéressant de considérer à part. Il est pratique de considérer la fonction $f : \Omega \to \mathbf{R}^n$ comme un *champ de vecteurs* dans Ω : on se donne en chaque point de Ω un vecteur $f(x)$, et on cherche une courbe $t \mapsto \gamma(t)$ dont la dérivée (la *vitesse*) en chaque point soit le vecteur donné en ce point.

La première remarque essentielle est que si $t \mapsto \gamma(t)$ est une solution (maximale) de

$$\dot{x} = f(x) \tag{12}$$

alors $t \mapsto \gamma(t+t_0)$ est une solution (maximale) de cette même équation. En d'autres termes, le temps ne joue aucun rôle. On peut ne considérer que des conditions initiales du type $\gamma(0) = x_0$.

On supposera toujours la fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ (ou simplement localement lipschitzien). Le théorème de Cauchy–Lipschitz entraîne qu'il existe, pour tout $x \in \Omega$, une unique solution maximale prenant en 0 la valeur x. On la note traditionnellement

$$\varphi(x,\cdot) : I_x \to \Omega$$

On appelle *orbite* de x l'image de cette application. On dit que le champ de vecteurs f est *complet* si on a $I_x = \mathbf{R}$ pour tout $x \in \Omega$. Des exemples de champs complets sont donnés dans les exercices 12 à 15. Des exemples de champs qui ne sont pas complets (avec $\Omega = \mathbf{R}^n$) sont donnés dans les exercices 2, 3 et 9.

Un point x de Ω pour lequel $f(x) = 0$ est dit *singulier.* Son orbite est réduite à $\{x\}$. On dit aussi que x est un *point d'équilibre.*

L'application φ est définie sur un sous-ensemble ouvert $\mathscr{D}$ de $\Omega \times \mathbf{R}$ (le champ est complet si $\mathscr{D} = \Omega \times \mathbf{R}$). Elle est continue (théorème 3) et vérifie

$$\varphi(x,0) = x \qquad\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) = f(\varphi(x,t))$$

On l'appelle le *flot* du champ de vecteurs f.

Exemple 2. Le flot d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants $\dot{x} = Ax$ est donné par

$$\varphi(x,t) = e^{tA}x$$

Exercice 11. *Déterminer le domaine de définition du flot de l'équation autonome $\dot{x} = x^2$ étudiée dans l'exercice 2.*

Proposition 2 (Formule du flot). *Si $t_1 \in I_x$ et $t_2 \in I_{\varphi(x,t_1)}$, on a $t_1 + t_2 \in I_x$ et*

$$\varphi(x, t_1 + t_2) = \varphi(\varphi(x, t_1), t_2)$$

En particulier, si le champ de vecteurs est complet, *pour chaque $t \in \mathbf{R}$, l'application $\varphi_t : x \mapsto \varphi(x,t)$ est un homéomorphisme de Ω d'inverse φ_{-t}. On a de plus $\varphi_{t_1+t_2} = \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2}$. En d'autres termes, l'application $t \mapsto \varphi_t$ est un homomorphisme de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ dans le groupe des homéomorphismes de Ω.*

DÉMONSTRATION. L'application $t \mapsto \varphi(x, t_1 + t)$, définie sur $I_x - t_1$, est solution (maximale) de l'équation (12) et vaut $\varphi(x, t_1)$ en 0. C'est donc $\varphi(\varphi(x, t_1), \cdot)$. $\square$

Proposition 3. a) *Soient x un point de Ω et $\mathscr{O}_x \subset \Omega$ son orbite. Soit l'application $\varphi(x, \cdot) : I_x \to \mathscr{O}_x$ est injective (la trajectoire ne repasse jamais deux fois par le même point), soit $I_x = \mathbf{R}$ et $\varphi(x, \cdot)$ est périodique.*

b) *Les orbites forment une partition de Ω (en d'autres termes, être dans la même orbite est une relation d'équivalence).*

DÉMONSTRATION. S'il existe $t_1 < t_2$ tels que $\varphi(x, t_1) = \varphi(x, t_2)$, la formule du flot donne, si $t \in I_x$,

$$\varphi(x, t) = \varphi(\varphi(x, t_1), t - t_1) = \varphi(\varphi(x, t_2), t - t_1) = \varphi(x, t + t_2 - t_1)$$

et $t + t_2 - t_1 \in I_x$. Ceci prouve a).

Si $y \in \mathscr{O}_x$, on a $y = \varphi(x,t)$ donc $x = \varphi(y, -t) = \varphi(\varphi(x,t), -t)$ et $x \in \mathscr{O}_y$. De même, si $z \in \mathscr{O}_y$, on a $z = \varphi(y, u)$ donc $z = \varphi(\varphi(x,t), u) = \varphi(x, t+u)$ et $z \in \mathscr{O}_x$. $\square$

Exercice 12. *On considère le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x(x^2 + y^2) \end{cases}$$

a) Dériver $x^2 + y^2$. En déduire que le champ est complet.

b) Transformer ce système en coordonnées polaires et le résoudre. Quelles sont les orbites ?

Exercice 13. *On considère le système différentiel autonome*

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2y \\ \dot{y} &= -2x - 4x^3 \end{cases}$$

a) Montrer que la quantité $x^2 + y^2 + x^4$ est constante sur les orbites. En déduire que le champ est complet et que les orbites sont périodiques.

b) Soit $\varepsilon \geq 0$. Même question pour le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2y \\ \dot{y} &= -2x - 4x^3 - \varepsilon y \end{cases}$$

Exercice 14 (Proies et prédateurs (modèle de Volterra))**.** *On considère le système différentiel autonome*

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax - cxy \\ \dot{y} &= -by + dxy \end{cases}$$

dans l'ouvert $(\mathbf{R}^{+*})^2$*, où* a*,* b*,* c *et* d *sont des réels strictement positifs.*

a) Quels sont les points d'équilibre ?

b) Trouver une fonction de x *et* y *constante sur les orbites (on pourra la chercher sous la forme* $f(x) + g(y)$*).*

c) En déduire que le champ est complet et que les orbites sont périodiques. Dessiner approximativement les orbites.

Exercice 15 (Pendule)**.** *On considère l'équation différentielle du second ordre (dite du pendule simple)*

$$\ddot{x} = -k \sin x$$

avec $k > 0$*.*

a) Transformer cette équation en une équation différentielle autonome du premier ordre dans $\mathbf{R}^2$*. Quels sont les points d'équilibre ?*

b) Trouver une fonction constante sur les orbites (on pourra la chercher sous la forme $f(x) + g(\dot{x})$*). En déduire que le champ est complet.*

c) Déterminer les orbites. Déterminer la période des orbites périodiques sous forme d'une intégrale.

5. Stabilité des solutions

On veut ici étudier le problème suivant relatif à une équation différentielle autonome $\dot{x} = f(x)$: étant donné un point d'équilibre x_0, c'est-à-dire un point x_0 tel que $f(x_0) = 0$, les orbites qui passent près de x_0 restent-elles proches de x_0 dans le futur ?

On formalise cela de la façon suivante.

Définition 1. *Le point d'équilibre* x_0 *est* stable *si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que, si* $\|x - x_0\| \leq \delta$*, on ait* $\|\varphi(x, t) - x_0\| \leq \varepsilon$ *pour tout* $t \geq 0$*.*

En particulier, la trajectoire future est confinée dans un compact, donc est définie pour tout temps positif.

Exemples 3. (1) L'origine est un point d'équilibre *stable* du champ de vecteurs

$$f(x, y) = (-2y, x)$$

sur $\mathbf{R}^2$. En effet, la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$ est constante sur les orbites, qui sont donc contenues dans des ellipses.

(2) L'origine est un point d'équilibre *instable* du champ de vecteurs

$$f(x, y) = (-x, y)$$

sur $\mathbf{R}^2$. En effet, le flot est donné par $\varphi(x, y, t) = (e^{-t}x, e^t y)$ et si $y \neq 0$, la trajectoire future part à l'infini.

Exercice 16. *Caractériser les matrices (constantes) A pour lesquelles l'origine est un point d'équilibre stable du champ $f(x) = Ax$.*

Définition 2. *Le point d'équilibre x_0 est* asymptotiquement stable *s'il est stable et s'il existe un voisinage U de x_0 tel que, pour tout $x \in U$, on ait*

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(x, t) = x_0$$

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, la deuxième condition seule n'entraîne pas nécessairement la stabilité : il peut arriver que les trajectoires s'éloignent d'abord de x_0 avant d'y revenir.

Exercice 17. *Caractériser les matrices (constantes) A pour lesquelles l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable du champ $f(x) = Ax$.*

De la même façon que les barrières et les entonnoirs de l'exercice 5 servaient à confiner les trajectoires des solutions d'une équation différentielle en une variable dans une région du plan, nous allons donner un critère qui assure la stabilité de certains champs de vecteurs, c'est-à-dire le confinement des orbites proches d'un point d'équilibre dans une petite boule.

Théorème 5. *Soit x_0 un point d'équilibre d'un champ de vecteurs f. On suppose qu'il existe une* fonction de Lyapounov *au voisinage de x_0, c'est-à-dire une fonction réelle L définie et de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x_0, qui admet un minimum strict en x_0, et qui vérifie*

$$\langle \operatorname{grad} L(x), f(x) \rangle < 0 \tag{13}$$

pour tout $x \neq x_0$. Alors x_0 est asymptotiquement stable.

On rappelle que le *gradient* d'une fonction L de classe $\mathscr{C}^1$ dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$ est le vecteur

$$\operatorname{grad} L = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} \right)$$

La condition (13) entraîne que la fonction L décroît strictement avec le temps le long des orbites (autres que $\{x_0\}$).

Démonstration. On peut toujours supposer $L(x_0) = 0$ et L définie sur un voisinage compact U de x_0. Soit ε un réel strictement positif tel que la boule ouverte $B = B(x_0, \varepsilon)$ soit contenue dans U. La fonction L est alors continue et strictement positive sur le compact $U - B$ donc y atteint son minimum $b > 0$. En particulier, le fermé $U_m = L^{-1}([0, \frac{1}{m}])$, voisinage de x_0 (par continuité de L), est contenu dans B pour tout $m > 1/b$.

Soit $x \in U_m$, avec $x \neq x_0$, c'est-à-dire $0 < L(x) \leq 1/m$, et $m > 1/b$. La trajectoire future $(\varphi(x,t))_{t\geq 0}$ ne peut rencontrer le bord ∂B car L décroît le long de cette trajectoire, tandis qu'elle ne prend que des valeurs $\geq b$ sur ∂B. Le théorème des valeurs intermédiaires entraîne que la trajectoire future de x reste confinée dans B. Comme ε est arbitraire (petit), nous avons montré que le point d'équilibre x_0 est stable.

D'autre part, la fonction $t \mapsto L(\varphi(x,t))$ étant décroissante et strictement positive admet une limite a qui vérifie $0 \leq a \leq L(x) \leq 1/m$. Nous allons montrer que la fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ tend vers x_0 quand t tend vers $+\infty$. Si ce n'est pas le cas, il existe par compacité de U une suite (t_p) tendant vers $+\infty$ telle que la suite $(\varphi(x,t_p))_p$ tende vers un point $x_1 \neq x_0$ de U. Ce point vérifie $0 < L(x_1) = a \leq 1/m$, donc est dans U_m. Pour tout $t > 0$, on a, par continuité de φ et de L,

$$L(\varphi(x_1,t)) = \lim_{p\to+\infty} L(\varphi(\varphi(x,t_p),t)) = \lim_{p\to+\infty} L(\varphi(x,t_p+t)) = a = L(x_1)$$

ce qui contredit le fait que L est strictement décroissante le long des orbites. La fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ tend donc bien vers x_0 quand t tend vers $+\infty$, ce qui termine la démonstration de la stabilité asymptotique de x_0. □

Exercice 18 (Pendule avec frottement)**.** *On considère l'équation différentielle du second ordre*

$$\ddot{x} = -k \sin x - a\dot{x}$$

avec $k > 0$ et $a > 0$.

a) Transformer cette équation en une équation différentielle autonome du premier ordre dans $\mathbf{R}^2$.

b) Trouver une fonction de Lyapounov pour le champ de vecteurs associé (s'inspirer de l'exercice 15). En déduire que le champ est complet et trouver les points d'équilibre asymptotiquement stables.

Exercice 19. *a) Soit A une matrice (constante) dont toutes les valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives. Montrer que la fonction*

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \|e^{tA}\|^2 \, dt$$

est une fonction de Lyapounov pour le champ de vecteurs $x \mapsto Ax$.

b) Soit f un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que tout point d'équilibre x_0 de f en lequel toutes les valeurs propres de la différentielle $Df(x_0)$ ont des parties réelles strictement négatives est asymptotiquement stable (on pourra montrer que la fonction L construite en a) avec $A = Df(x_0)$ est encore une fonction de Lyapounov pour le champ f au voisinage de x_0).

c) Appliquer b) à l'équation du pendule avec frottement de l'exercice précédent.

Exercice 20 (Champ de gradient). *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *et* $f : \Omega \to \mathbf{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^2$. *On considère le champ de vecteurs* $\operatorname{grad} f : \Omega \to \mathbf{R}^n$. *Soit* $\gamma :]t^-, t^+[\to \Omega$ *une solution maximale.*

a) Montrer que la fonction $t \mapsto f(\gamma(t))$ *est croissante. Quelles sont les solutions constantes ? Quelles sont les solutions périodiques ?*

On suppose maintenant que pour tout $c \in \mathbf{R}$, *l'ensemble* $\Omega_c = \{x \in \Omega \mid f(x) \geq c\}$ *est* compact.

b) Montrer $t^+ = +\infty$.

c) Soit φ *le flot du gradient. Soit* $x_0 \in \Omega$ *et soit* (t_m) *une suite tendant vers* $+\infty$ *telle que* $(\varphi(x_0, t_m))$ *converge vers un point* a *de* Ω. *Montrer que l'on a*

$$f(a) = \sup_{t \geq 0} f(\varphi(x_0, t))$$

et que a *est un point critique de* f.

On suppose de plus que la fonction f *n'a qu'un nombre fini de points critiques.*

d)Montrer que $\gamma(t)$ *tend vers un point critique de* f *lorsque* t *tend vers* $+\infty$.

Références

[CLF] Chambert-Loir, A., Fermigier, S., *Exercices de mathématiques pur l'agrégation. Analyse 3.* Masson, Paris, 1996.

[D] Demailly, J.-P. *Analyse numérique et équations différentielles.* Deuxième édition. Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble, 1996.

[HW] Hubbard, J., West, B., *Équations différentielles et systèmes dynamiques.* Traduction et adaptation V. Gautheron. Cassini, Paris, 1999.

Olivier DEBARRE
Institut de Recherche Mathématique Avancée – UMR 7501
UFR de Mathématiques et Informatique
7 rue René Descartes
Université Louis Pasteur
67084 Strasbourg Cedex – France

e-mail : debarre@math.u-strasbg.fr