Partiel Algèbre 2

Responsable : Mr O. DEBARRE

Exercice 1. Montrer que le degré du corps de décomposition d'un polynôme de degré d divise $d!$.

Exercice 2. Soit K un corps de caractéristique $p > 0$ et soit $a \in K$. On pose $P(X) = X^p - X - a$ et on note $K \subset L$ un corps de décomposition de P.

a) Si x est une racine de P dans L, montrer que les racines de P sont $x, x+1, \ldots, x+p-1$.

b) Montrer que P est soit scindé, soit irréductible dans $K[X]$.

c) Si P n'a pas de racine dans K, montrer $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Exercice 3. Soit L un corps de décomposition d'un polynôme $P \in K[X]$ *irréductible* séparable. L'extension $K \subset L$ est donc galoisienne ; on suppose que son groupe de Galois est *abélien.* Soit x une racine de P dans L. Montrer $L = K(x)$.

Exercice 4. Considérons le polynôme $P(X) = X^4 - X - 1 \in \mathbf{Q}[X]$.

a) Montrer que P a exactement deux racines réelles distinctes x_1 et x_2.

b) On écrit $(X - x_1)(X - x_2) = X^2 + aX + b$ avec a, $b \in \mathbf{R}$. Montrer $[\mathbf{Q}(a^2) : \mathbf{Q}] = 3$.

c) En déduire qu'aucune des racines de P n'est constructible à la règle et au compas.

Exercice 5. Soient $p_1, \ldots, p_m$ des nombres premiers distincts.

a) Montrer que l'extension $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_m})$ est galoisienne. On note G son groupe de Galois.

b) Montrer que tout élément de G est d'ordre 2. En déduire que G est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^r$ pour un certain entier $r \leq m$.

c) Exprimer en fonction de r le nombre de sous-extensions de $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_m})$ de degré 2 sur $\mathbf{Q}$.

d) Montrer que G est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m$.

e) Le réel $\sqrt{15}$ est-il dans le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{10}, \sqrt{42})$?

Exercice 6. Soient K et K' des sous-corps d'un corps L tels que l'extension $K \cap K' \subset L$ soit algébrique. On suppose que les extensions $K \subset L$ et $K' \subset L$ sont normales. Montrer que l'extension $K \cap K' \subset L$ est aussi normale.