

SUR LES REVÊTEMENTS DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

Olivier Debarre

27 juin 2006

On travaille sur le corps des complexes. Soit $f : Y \rightarrow X$ un revêtement, c'est-à-dire un morphisme surjectif fini, de degré d entre variétés projectives lisses de même dimension n . Le morphisme f est plat, donc le faisceau $f_*\mathcal{O}_Y$ est localement libre et il existe un *morphisme trace* $\mathrm{Tr}_{Y/X} : f_*\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ tel que la composée

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{Y/X}} \mathcal{O}_X$$

soit la multiplication par d . On note E_f le dual de son noyau. C'est un fibré vectoriel sur X de rang $d - 1$ qui vérifie¹

$$f_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X \oplus E_f^\vee$$

Notons que si X est connexe, Y l'est si et seulement si $H^0(X, E_f^\vee) = 0$.

Exemple 1 Soit $E \subset \mathbf{P}^n$ une courbe elliptique normale de degré $n + 1$. Le fibré vectoriel associé au revêtement

$$\{(x, H) \in E \times (\mathbf{P}^n)^\vee \mid x \in H\} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} (\mathbf{P}^n)^\vee$$

de degré $n + 1$ est le fibré tangent $T_{\mathbf{P}^n}$.

L'intérêt de ce fibré vectoriel provient de la proposition suivante.

¹Par dualité pour un morphisme fini et plat, on a aussi

$$f_*\omega_{Y/X} = \mathcal{O}_X \oplus E_f$$

Proposition 1 *Il existe une factorisation*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad} & E_f \\ & \searrow f & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

DÉMONSTRATION. L'inclusion $E_f^\vee \subset f_* \mathcal{O}_Y$ induit un morphisme

$$\mathrm{Sym} E_f^\vee \longrightarrow f_* \mathcal{O}_Y$$

de \mathcal{O}_Y -algèbres qui est surjectif puisque $\mathrm{Sym}^0 E_f^\vee$ s'envoie sur \mathcal{O}_X et $\mathrm{Sym}^1 E_f^\vee$ sur E_f^\vee . En prenant les spectres relatifs, on obtient

$$E_f = \mathbf{Spec} \mathrm{Sym} E_f^\vee \hookrightarrow \mathbf{Spec} f_* \mathcal{O}_Y = Y$$

qui est l'inclusion cherchée. □

Exemple 2 Si $f : Y \rightarrow X$ est un revêtement double, E_f est un faisceau inversible sur X et le lieu de branchement de f est un diviseur lisse dans X qui est le lieu des zéros d'une section $s \in H^0(X, E_f^{\otimes 2})$. On reconnaît la construction classique : Y se trouve dans l'espace total de E_f comme

$$Y = \{(x, t) \in E_f \mid t^2 = s(x)\}$$

Inversement, étant donné un faisceau inversible L sur X et un diviseur lisse dans $|L^{\otimes 2}|$, on peut construire un revêtement double $f : Y \rightarrow X$, avec Y lisse, ramifié au-dessus de ce diviseur. On ne peut donc espérer montrer des propriétés de E_f en général.

Rappelons qu'à tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur un schéma X de type fini (sur \mathbf{C}), on associe le X -schéma

$$\mathbf{P}(\mathcal{F}) = \mathbf{Proj} \left(\bigoplus_{m \geq 0} \mathrm{Sym}^m \mathcal{F} \right)$$

et un faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{F})}(1)$ sur $\mathbf{P}(\mathcal{F})$. On dit que \mathcal{F} est *ample* si $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{F})}(1)$ l'est.

Dans la situation décrite plus haut, l'amplitude de E_f a plusieurs conséquences importantes :

- a) si S est une variété propre intègre et $g : S \rightarrow X$ un morphisme dont l'image est de dimension au moins 1, $S \times_X Y$ est connexe² ;
- b) pour tout entier ℓ , le lieu des points y de Y où le degré local de f (c'est-à-dire le nombre de feuilletts qui se rejoignent en y) est $> \ell$ est de codimension $\leq \ell$ pour $\ell \leq \min\{d-1, n\}$ ³ ;
- c) les morphismes induits

$$f^* : H^i(X, \mathbf{C}) \longrightarrow H^i(Y, \mathbf{C})$$

sont bijectifs pour $i \leq n - d + 1$.

On s'attend à ce que l'application f^* soit encore bijective pour la cohomologie à coefficients entiers, ainsi que les applications induites $f_* : \pi_i(Y) \rightarrow$

²Soit $f' : S \times_X Y \rightarrow S$ le morphisme déduit de f . Si g est fini, le fibré vectoriel $E_{f'} = g^*E_f$ est ample, donc $H^0(S, E_{f'}^\vee) = 0$. Il s'ensuit que $S \times_X Y$ est connexe. Dans le cas général, on considère la factorisation de Stein $f : S \xrightarrow{p} T \xrightarrow{h} X$, où p est à fibres connexes et h est fini. Le morphisme $S \times_X Y \rightarrow T \times_X Y$ induit par p est à image et fibres connexes, donc $S \times_X Y$ est connexe.

³Soit $e_f(y)$ le degré local de f en y . Montrons que pour tout entier ℓ , le fermé

$$R_\ell = \{y \in Y \mid e_f(y) > \ell\}$$

n'est pas vide pour $\ell \leq \min\{d-1, n\}$; c'est un résultat général qu'il est alors de codimension $\leq \ell$. On procède par récurrence sur ℓ . On a $R_0 = Y$. Soit $\ell > 0$ et soit R une composante irréductible de $R_{\ell-1}$. Elle est de codimension $\leq \ell-1 < n$ dans Y , donc $R \times_X Y$ est connexe. Mais $R \times_X Y$ contient la diagonale Δ_R de R . S'il lui est égal, $R \subset R_{d-1} \subset R_\ell$. Sinon, une autre composante de $R \times_X Y$ rencontre Δ_R et si y est un point d'intersection, on a $e_f(y) > \ell$, de sorte que R_ℓ n'est pas vide.

⁴Considérons la complétion projective $\pi : \bar{E}_f = \mathbf{P}(E_f^\vee \oplus \mathcal{O}_X) \rightarrow X$ de E_f . Soit $\xi \in H^{2e}(\bar{E}_f, \mathbf{C})$ la classe du diviseur à l'infini $\bar{E}_f - E_f$ et soit $[Y] \in H^{2e}(\bar{E}_f, \mathbf{C})$ la classe de l'image de $Y \xrightarrow{j} \bar{E}_f$, avec $e = d-1$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{n-e+i}(Y, \mathbf{C}) & \xrightarrow{j^*} & H^{n+e+i}(\bar{E}_f, \mathbf{C}) = H^{n+e+i}(X, \mathbf{C})[\xi] & \xleftarrow{\pi^*} & H^{n+e+i}(X, \mathbf{C}) \\
 & \searrow \cdot j^*[Y] & \downarrow j^* & & \swarrow f^* \\
 & & H^{n+e+i}(Y, \mathbf{C}) & &
 \end{array}$$

avec $i \geq 0$. La classe de Y dans \bar{E}_f est d fois celle de la section nulle ; comme $j^*\xi = 0$, on en déduit que $j^*[Y]$ n'est autre que $dc_e(f^*E_f)$. Un analogue du théorème de Lefschetz difficile, dû à Sommese, montre que puisque f^*E_f est ample, le cup-produit par sa classe de Chern d'ordre maximal est surjectif lorsque $e \leq n$. L'application j^* est alors surjective, et comme $j^*\xi = 0$, il en est de même pour f^* . Comme f^* est injective en tout degré, elle est bijective, et on obtient c) par dualité de Poincaré.

$\pi_i(X)$.

Lorsque X est un espace projectif, l'amplitude de E_f est connue.

Théorème 1 (Lazarsfeld, 1980) *Soient Y une variété projective lisse et $f : Y \rightarrow \mathbf{P}^n$ un revêtement. Le fibré vectoriel $E_f(-1)$ est globalement engendré.*

DÉMONSTRATION. Des résultats de Mumford montrent qu'il suffit pour cela de montrer que $E_f(-1)$ est 0-régulier, c'est-à-dire

$$H^i(\mathbf{P}^n, E_f(-i-1)) = 0$$

pour tout $i > 0$. Cela résulte du théorème d'annulation de Kodaira sur la variété Y . \square

Ce résultat a été généralisé ensuite par Kim et Manivel au cas où X est une grassmannienne ou une grassmannienne lagrangienne. Nous nous intéressons ici au cas où X est une variété abélienne.

Théorème 2 (Peternell–Sommese, 2002) *Soient X une variété abélienne, Y une variété projective lisse et $f : Y \rightarrow X$ un revêtement. Le fibré vectoriel E_f est nef.*

DÉMONSTRATION. Soit H un diviseur ample sur X . On peut supposer Y connexe, auquel cas on montre comme ci-dessus que $E_f((n+1)H)$ est globalement engendré. Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y' = Y \times_X X & \xrightarrow{f'} & X \\ \downarrow & & \downarrow \mathbf{k}_X \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

où \mathbf{k}_X est la multiplication par k . Le fibré vectoriel

$$E_{f'}((n+1)H) = (\mathbf{k}_X^* E_f)((n+1)H)$$

est globalement engendré, donc nef. Comme $\mathbf{k}_X^* H = k^2 H$, on en déduit que $E_f(\frac{n+1}{k^2} H)$ est nef (on peut donner un sens à cela), donc aussi, en passant à la limite, E_f . \square

Le fibré vectoriel E_f peut très bien être numériquement trivial (c'est le cas par exemple si f est étale). Lorsque X est une variété abélienne *simple*, on a un résultat plus fort que nous allons démontrer.

Théorème 3 *Soient X une variété abélienne simple, Y une variété projective lisse connexe et $f : Y \rightarrow X$ un revêtement. Si f ne se factorise par aucune isogénie non triviale $X' \rightarrow X$, le fibré vectoriel E_f est ample.*

On note comme plus haut d le degré de f et n la dimension de X . Si $d \leq n$, on peut montrer que le morphisme $f_* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ est bijectif. En particulier, le groupe $H_1(Y, \mathbf{Z})$ est isomorphe à $H_1(X, \mathbf{Z})$ (comparer avec la propriété c) ci-dessus), donc est sans torsion. Il en est donc de même pour $H^2(Y, \mathbf{Z})$ par le théorème des coefficients universels.

Lorsque $d < n$, le morphisme $H^2(f, \mathbf{Z}) : H^2(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(Y, \mathbf{Z})$ est injectif à conoyau fini et il en est donc de même pour $\text{Pic}(f) : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(Y)$. Il est probable que ces deux applications soient bijectives.

1 Transformée de Fourier–Mukai

Soient X une variété abélienne de dimension n et \widehat{X} sa variété abélienne duale. Pour tout point ξ de \widehat{X} , on note P_ξ le faisceau inversible numériquement trivial correspondant sur X .

Il existe sur $X \times \widehat{X}$ un unique faisceau inversible \mathcal{P} , dit de Poincaré, qui vérifie, pour tout ξ dans \widehat{X} ,

$$\mathcal{P}|_{X \times \{\xi\}} \simeq P_\xi \quad , \quad \mathcal{P}|_{\{0\} \times \widehat{X}} \simeq \mathcal{O}_{\widehat{X}}$$

Étant donné un faisceau cohérent \mathcal{F} sur X , ou plus généralement un complexe de tels faisceaux, on définit

$$\widehat{\mathcal{F}} = q_*(p^* \mathcal{F} \otimes \mathcal{P})$$

où $p : X \times \widehat{X} \rightarrow X$ et $q : X \times \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$ sont les deux projections. On définit ainsi un foncteur de la catégorie des \mathcal{O}_X -modules cohérents dans celle des $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$ -modules cohérents, dont on note

$$\mathbf{R}\widehat{\mathcal{F}} : \mathbf{D}(X) \rightarrow \mathbf{D}(\widehat{X})$$

le foncteur dérivé. Comme \widehat{X} est canoniquement isomorphe à X , on a aussi un autre foncteur

$$\mathbf{R}\mathcal{S} : \mathbf{D}(\widehat{X}) \rightarrow \mathbf{D}(X)$$

Le résultat principal de Mukai est le suivant.

Théorème 4 *On a un isomorphisme canonique de foncteurs*

$$\mathbf{R}\mathcal{S} \circ \mathbf{R}\widehat{\mathcal{S}} \simeq (-\mathbf{1}_X)^*[-n]$$

Exemple 3 Si $\xi \in \widehat{X}$, on vérifie que l'on a $\mathbf{R}\mathcal{S}(\mathbf{C}_\xi) = P_\xi[0]$. On en déduit $\mathbf{R}\widehat{\mathcal{S}}(P_\xi) = \mathbf{C}_{-\xi}[-n]$.

De façon plus pratique, la cohomologie du complexe $\mathbf{R}\widehat{\mathcal{S}}(\mathcal{F})$ est donnée par les

$$R^i \widehat{\mathcal{S}}(\mathcal{F}) = R^i q_*(p^* \mathcal{F} \otimes \mathcal{P})$$

C'est un faisceau sur \widehat{X} dont le support est contenu dans le lieu

$$V_i(\mathcal{F}) = \{\xi \in \widehat{X} \mid H^i(X, \mathcal{F} \otimes P_\xi) \neq 0\} \quad (1)$$

Définition 1 *Un faisceau cohérent \mathcal{F} sur X est dit M -régulier si*

$$\text{codim Supp } R^i \widehat{\mathcal{S}}(\mathcal{F}) > i$$

pour tout $i > 0$.

En général, on vérifiera la M -régularité en montrant $\text{codim } V_i(\mathcal{F}) > i$ pour tout $i > 0$ ⁵.

Exemple 4 Si L est un faisceau inversible ample sur X , on a $V_i(L) = \emptyset$ pour tout $i > 0$. Le complexe $\mathbf{R}\widehat{\mathcal{S}}(L)$ est concentré en degré 0, où c'est un faisceau localement libre de rang le degré $h^0(X, L)$ de L . On le note \widehat{L} . Le faisceau L est M -régulier.

On vérifie aussi que le complexe $\mathbf{R}\widehat{\mathcal{S}}(L^\vee)$ est concentré en degré n , où c'est le faisceau localement libre $(-\mathbf{1}_X)^* \widehat{L}^\vee$, de sorte que $\mathbf{R}\widehat{\mathcal{S}}(L^\vee) = (-\mathbf{1}_X)^* \widehat{L}^\vee[-n]$.

⁵Soit $\pi : X' \rightarrow X$ une isogénie. On a $V_i(\pi^* \mathcal{F}) = \pi^*(V_i(\mathcal{F}))$, de sorte que \mathcal{F} vérifie cette condition si et seulement si $\pi^* \mathcal{F}$ la vérifie. Probablement, \mathcal{F} est M -régulier si et seulement si $\pi^* \mathcal{F}$ l'est.

2 Faisceaux M -réguliers

Les faisceaux M -réguliers ont des propriétés géométriques remarquables.

Théorème 5 (Pareschi–Popa 2003, Debarre 2004) *Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent M -régulier sur la variété abélienne X . On considère les propriétés suivantes :*

- (i) *le faisceau \mathcal{F} est M -régulier ;*
- (ii) *pour tout faisceau inversible L ample sur X , il existe un entier positif N tel que, pour $(\xi_1, \dots, \xi_N) \in \widehat{X}^N$ général, l'application*

$$\bigoplus_{i=1}^N H^0(X, \mathcal{F} \otimes P_{\xi_i}) \otimes H^0(X, L \otimes P_{\xi_i}^\vee) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F} \otimes L) \quad (2)$$

est surjective ;

- (iii) *le faisceau \mathcal{F} est continûment globalement engendré : il existe un entier positif N tel que, pour $(\xi_1, \dots, \xi_N) \in \widehat{X}^N$ général, l'application*

$$\bigoplus_{i=1}^N H^0(X, \mathcal{F} \otimes P_{\xi_i}) \otimes P_{\xi_i}^\vee \rightarrow \mathcal{F} \quad (3)$$

est surjective ;

- (iv) *il existe une isogénie $\pi : X' \rightarrow X$ telle que $\pi^*(\mathcal{F} \otimes P_\xi)$ soit globalement engendré pour tout $\xi \in \widehat{X}$;*
- (v) *\mathcal{F} est ample.*

On a (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Rightarrow (v)⁶.

DÉMONSTRATION. Montrons (i) \Rightarrow (ii). La surjectivité de l'application (2) est équivalente à celle, pour tout ouvert non vide U de \widehat{X} , de

$$\bigoplus_{\xi \in U} H^0(X, \mathcal{F} \otimes P_\xi) \otimes H^0(X, L \otimes P_\xi^\vee) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F} \otimes L)$$

⁶L'implication (v) \Rightarrow (iv) n'est pas vraie en général : si C est une courbe projective lisse dans sa jacobienne JC et \mathcal{F} un faisceau localement libre sur C vu comme faisceau sur JC , il se peut que l'image inverse de \mathcal{F} par aucun morphisme étale $C' \rightarrow C$ ne soit globalement engendré (voir Parameswaran s'il se peut que $H^0(C, \mathcal{F} \otimes P_\xi)$ soit nul pour tout $\xi \in \text{Pic}^0(C)$). Je ne connais pas d'exemple avec \mathcal{F} (ample) localement libre sur X : si $\dim X = 1$, on a par Riemann–Roch $h^0(\mathcal{F} \otimes P) = c_1(\mathcal{F}) > 0$; si $\dim X = 2$, on a par Riemann–Roch $h^0(\mathcal{F} \otimes P) \geq \frac{1}{2}(c_1^2(\mathcal{F}) - 2c_2(\mathcal{F}))$.

donc à l'injectivité de sa duale

$$H^0(X, \mathcal{F} \otimes L)^\vee \rightarrow \bigoplus_{\xi \in U} H^0(X, \mathcal{F} \otimes P_\xi)^\vee \otimes H^0(X, L \otimes P_\xi^\vee)^\vee$$

ou, par dualité de Serre, à l'injectivité de

$$\text{Ext}_X^g(\mathcal{F}, L^\vee) \rightarrow \bigoplus_{\xi \in U} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(H^0(X, \mathcal{F} \otimes P_\xi), H^g(X, L^\vee \otimes P_\xi)) \quad (4)$$

On rappelle (exemple 4) que le transformé de Mukai $\mathbf{R}\widehat{\mathcal{F}}(L^\vee)$ de L^\vee est le faisceau localement libre $\widehat{L}^\vee = (-\mathbf{1}_X)^* \widehat{L}^\vee$ sur \widehat{X} placé en degré n .

On vérifie qu'il existe une suite spectrale du quatrième quadrant ($p \geq 0$, $q \leq 0$)

$$E_2^{pq} = \text{Ext}_{\widehat{X}}^p(R^{-q}\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}), \widehat{L}^\vee) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{D}(\widehat{X})}^{p+q}(\mathbf{R}\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}), \widehat{L}^\vee)$$

Admettant l'existence de cette suite spectrale, on a par dualité de Serre

$$\text{Ext}_{\widehat{X}}^p(R^{-q}\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}), \widehat{L}^\vee) \simeq H^{n-p}(\widehat{X}, R^{-q}\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) \otimes \widehat{L}^\vee)^\vee$$

qui, puisque \mathcal{F} est M -régulier, est nul pour $q < 0$ et $n - p \geq n - (-q)$, c'est-à-dire $p \leq -q$. D'autre part, ces groupes sont bien sûr nuls sauf peut-être pour $0 \leq p \leq n$ et $-n \leq q \leq 0$.

Les différentielles arrivant dans E_r^{00} étant toujours nulles, on a une chaîne d'inclusions

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}(\widehat{X})}(\mathbf{R}\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}), \widehat{L}^\vee) = E_\infty^{00} \subset \cdots \subset E_3^{00} \subset E_2^{00} = \text{Hom}_{\widehat{X}}(R^0\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}), \widehat{L}^\vee)$$

et un résultat de dualité de Mukai dit que le terme de gauche est isomorphe à $\text{Ext}_X^n(\mathcal{F}, L^\vee)$. On obtient ainsi une application injective

$$\text{Ext}_X^n(\mathcal{F}, L^\vee) \longrightarrow \text{Hom}_{\widehat{X}}(R^0\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}), \widehat{L}^\vee)$$

qui est le morphisme sur les espaces de sections globales associé au morphisme de faisceaux

$$\varphi : \text{Ext}_X^n(\mathcal{F}, L^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{X}} \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\widehat{X}}}(\mathbf{R}^0\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}), \widehat{L}^\vee)$$

On vérifie qu'en un point général $\xi \in \widehat{X}$, le morphisme entre fibres induit par φ n'est autre que l'application

$$\text{Ext}_X^n(\mathcal{F}, L^\vee) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(H^0(X, \mathcal{F} \otimes P_\xi), H^n(X, L^\vee \otimes P_\xi))$$

intervenant dans (4). Comme le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\widehat{X}}}(R^0\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}),\widehat{L}^\vee)$ est sans torsion, l'application (4) est injective.

Montrons (ii) \Rightarrow (iii). Soit L un faisceau inversible ample sur X tel que $\mathcal{F} \otimes L$ soit globalement engendré. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^N H^0(X, \mathcal{F} \otimes P_{\xi_i}) \otimes H^0(X, L \otimes P_{\xi_i}^\vee) \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{F} \otimes L) \otimes \mathcal{O}_X \\ \downarrow & & \downarrow \text{ev} \\ \bigoplus_{i=1}^N H^0(X, \mathcal{F} \otimes P_{\xi_i}) \otimes L \otimes P_{\xi_i}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{F} \otimes L \end{array}$$

la flèche horizontale du haut est surjective par (ii), et l'évaluation aussi. Il en est donc de même pour la flèche horizontale du bas, d'où (iii).

Montrons (iii) \Rightarrow (iv). Soit $\xi_0 \in \widehat{X}$. Comme les points de torsion sont denses dans \widehat{X}^N , l'ouvert des points de \widehat{X}^N pour lesquels l'application (3) est surjective et tous les $h^0(X, \mathcal{F} \otimes P_{\xi_i})$ ont leur valeur minimale contient un point du type

$$(\xi_0 + \eta_1(\xi_0), \dots, \xi_0 + \eta_N(\xi_0))$$

où $(\eta_1(\xi_0), \dots, \eta_N(\xi_0))$ est un point de torsion, donc contient aussi

$$U_{\xi_0} + (\eta_1(\xi_0), \dots, \eta_N(\xi_0))$$

où U_{ξ_0} est un voisinage de ξ_0 dans \widehat{X} . Comme \widehat{X} est quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini de ces voisinages, disons $U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_M}$.

Soit $\pi : X' \rightarrow X$ une isogénie telle que le noyau de $\widehat{\pi} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}'$ contienne tous les $\eta_i(\xi_j)$, pour $i \in \{1, \dots, N\}$ et $j \in \{1, \dots, M\}$. Fixons $j \in \{1, \dots, M\}$. L'application

$$\bigoplus_{i=1}^N H^0(X, \mathcal{F} \otimes P_\xi \otimes P_{\eta_i(\xi_j)}) \otimes \pi^* P_\xi^\vee \otimes \pi^* P_{\eta_i(\xi_j)}^\vee \longrightarrow \pi^* \mathcal{F}$$

est surjective pour tout $\xi \in U_{\xi_j}$. mais cette application n'est autre que

$$\bigoplus_{i=1}^N H^0(X, \mathcal{F} \otimes P_\xi \otimes P_{\eta_i(\xi_j)}) \otimes \pi^* P_\xi^\vee \longrightarrow \pi^* \mathcal{F}$$

et comme chaque $H^0(X, \mathcal{F} \otimes P_\xi \otimes P_{\eta_i(\xi_j)})$ est un sous-espace vectoriel de $H^0(Y, \pi^*(\mathcal{F} \otimes P_\xi))$, le faisceau $\pi^*(\mathcal{F} \otimes P_\xi)$ est globalement engendré pour tout $\xi \in U_{\xi_j}$, donc pour tout $\xi \in \widehat{X}$.

Montrons (iv) \Rightarrow (v). Soit C une courbe dans X' . S'il existe un quotient trivial $\pi^* \mathcal{F}|_C \twoheadrightarrow \mathcal{O}_C$, on a aussi des surjections $\pi^*(\mathcal{F} \otimes P_\xi)|_C \twoheadrightarrow \pi^*(P_\xi)|_C$ pour chaque $\xi \in \widehat{X}$. Comme $\pi^*(\mathcal{F} \otimes P_\xi)$ est globalement engendré, il en est de même pour $\pi^*(P_\xi)|_C$. Cela entraîne que l'application $\widehat{X} \rightarrow \widehat{X}' \rightarrow \text{Pic}^0(C)$ est nulle, donc que $\pi(C)$ est un point, ce qui est absurde. Le lemme de Gieseker⁷ entraîne que $\pi^* \mathcal{F}$ est ample, donc aussi \mathcal{F} . \square

3 Démonstration du théorème 3

C'est un théorème de Green et Lazarsfeld que les composantes irréductibles des lieux

$$V_i = \{\xi \in \widehat{X} \mid H^{n-i}(Y, f^* P_\xi^\vee) \neq 0\}$$

sont des sous-variétés abéliennes translatées de codimension $\geq i$ de \widehat{X} . Comme X est simple, V_i est fini pour $i > 0$. Notons $\widehat{Y} = \text{Pic}^0(Y)$. Comme Y est connexe, on a

$$\begin{aligned} V_n &= \{\xi \in \widehat{X} \mid H^0(Y, f^* P_\xi^\vee) \neq 0\} \\ &= \{\xi \in \widehat{X} \mid f^* P_\xi^\vee \simeq \mathcal{O}_Y\} \\ &= \text{Ker}(\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}) \end{aligned}$$

donc $V_n = \{0\}$ puisque \widehat{f} est injectif. Par dualité de Serre sur Y , on a

$$\begin{aligned} V_i &= \{\xi \in \widehat{X} \mid H^i(Y, \omega_Y \otimes f^* P_\xi) \neq 0\} \\ &= \{\xi \in \widehat{X} \mid H^i(X, f_* \omega_Y \otimes P_\xi) \neq 0\} \end{aligned}$$

Par dualité pour un morphisme fini, $f_* \omega_Y = \mathcal{O}_X \oplus E_f$, donc $V_i(E_f) \subset V_i$ et $V_n(E_f) = \emptyset$. Le faisceau E_f est M -régulier, donc ample par le théorème 5.

⁷Ce lemme énonce que pour qu'un faisceau cohérent globalement engendré \mathcal{G} sur une variété propre Y soit ample, il faut et il suffit que sa restriction à toute courbe n'ait pas de quotient trivial. Il se démontre ainsi : l'évaluation $H^0(Y, \mathcal{G}) \otimes \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{G}$ est surjective et induit un morphisme $f : \mathbf{P}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{P}(H^0(Y, \mathcal{G}) \otimes \mathcal{O}_Y) \rightarrow \mathbf{P}(H^0(Y, \mathcal{G}))$ tel que $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{G})}(1) = f^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(H^0(Y, \mathcal{G}))}(1)$; le faisceau \mathcal{G} est donc ample si et seulement si ce morphisme est fini.