Généralités sur les anneaux

Exercice n° 1 Soit A un anneau commutatif.

1. Soit I un idéal de A. Relier les idéaux de A/I à ceux de A. Même question pour les idéaux premiers et maximaux.
2. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Montrer que l'image réciproque par f d'un idéal premier est un idéal premier. Que se passe-t-il pour les idéaux maximaux ?
3. Soient $I \subset J$ deux idéaux de A. Montrer que A/J est canoniquement isomorphe au quotient de A/I par J/I.
4. Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que IJ est inclus dans $I \cap J$. A-t-on toujours égalité ?

Exercice n° 2

1. Soit X un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Quels sont les idéaux maximaux de l'anneau $C^0(X, \mathbb{R})$? Donner un exemple d'idéal premier non maximal.
2. Avec les notations précédentes, on munit $C^0(X, \mathbb{R})$ de la topologie de la convergence uniforme. Montrer que tout idéal premier est contenu dans un unique idéal maximal et qu'il y est dense. On pourra utiliser des partitions de l'unité.

Exercice n° 3 Soit A un anneau qui n'est pas un corps. Montrer que $A[X]$ n'est pas principal.

Exercice n° 4 Soit k un corps. On note $A = k[[X]]$ l'anneau des séries formelles en X à coefficients dans k. C'est l'ensemble des sommes formelles $\Sigma_{i \geq 0} a_i X^i$, avec les lois de compositions évidentes. Montrer que A est un anneau local [1], d'idéal maximal engendré par X. En déduire que A est principal. Montrer que A est euclidien.

Exercice n° 5

1. Soit A un anneau euclidien. Montrer que l'on peut trouver un élément non inversible de A tel que la restriction à $A^* \bigcup \{0\}$ de la projection canonique de A sur $A/(x)$ soit surjective (choisir x non inversible tel que $\phi(x)$ est minimal, où ϕ est une division euclidienne sur A).
2. Soit $\alpha = \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$, et $A = \mathbb{Z}[\alpha]$. Déterminer le groupe A^*. On pourra considérer le module d'un élément inversible de A.
3. Montrer que A n'est pas un anneau euclidien.
4. Soient a et b deux éléments non nuls de A. Montrer qu'il existe $q, r \in A$ tels que $r = 0$ ou $|r| < |b|$ et qui vérifient soit $a = bq + r$ soit $2a = bq + r$.
5. Montrer que l'idéal engendré par 2 dans A est maximal.
6. Montrer que A est un anneau principal [2].

1. Un anneau est dit local s'il a un unique idéal maximal.

2. L'anneau des entiers de $\mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$, pour d un entier positif sans facteur carré, est principal pour $d = 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163$. On ne sait pas s'il existe une infinité d'entiers positifs d sans facteur carré tels que l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ soit principal.

7. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel.
8. En utilisant une méthode similaire, montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau principal.

Extensions de corps

Exercice n° 6 Soit K un corps. Montrer que toute sous-extension algébrique de $K(X)/K$ est triviale.

Exercice n° 7 Posons $K = \mathbb{Q}(T)$, $K_1 = \mathbb{Q}(T^2)$ et $K_2 = \mathbb{Q}(T^2 - T)$. Montrer que K est algébrique sur K_1 et K_2 mais pas sur $K_1 \cap K_2$.

Exercice n° 8 Soit K/k une extension finie de degré impair. Montrer que si x engendre K sur k, alors x^2 engendre K sur k.

Exercice n° 9 Soit p un nombre premier, et soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit P le polynôme $X^n + X + p$.

1. Montrer que les racines complexes de P sont toutes de module supérieur ou égal à 1.
2. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ si p est différent de 2.
3. Si $p = 2$, montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ si et seulement si n est pair. Si n est impair, montrer que $P(X)/(X + 1)$ est irréductible.
4. Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers tel que $|a_0|$ est un nombre premier strictement supérieur à $|a_1| + \ldots + |a_n|$. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice n° 10 (Nombres de Liouville) Le but de cet exercice est de donner un exemple explicite de nombre transcendant.

1. Soit α un nombre complexe algébrique irrationel. Montrer qu'il existe un réel C strictement positif et un entier n tels que

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, |\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{C}{q^n}.$$

   On pourra introduire un polynôme à coefficients entiers qui annule α et appliquer judicieusement l'inégalité des accroissements finis.
2. Montrer que $\sum_{i \geq 0} 10^{-i!}$ est transcendant.