TD10 : Produit tensoriel

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Soit K un corps, et soient A et B des K-algèbres.

a) Définir une structure de K-algèbre sur $A \otimes_K B$.
b) Montrer que les K-algèbres $K[X] \otimes_K K[Y]$ et $K[X, Y]$ sont isomorphes.
c) Montrer que le morphisme naturel de K-algèbres de $K(X) \otimes_K K(Y)$ vers $K(X, Y)$ est injectif mais non surjectif.

Solution de l'exercice 1.

a) On sait que $A \otimes_K B$ est naturellement muni d'une structure de K-espace vectoriel. Il reste à définir la multiplication. Pour cela, on remarque par exemple que la multiplication sur A est une application bilinéaire $A \times A \to A$, donc elle induit une application linéaire $m_A : A \otimes A \to A$. On dispose donc d'une application linéaire naturelle
$$m_A \otimes m_B : (A \otimes A) \otimes (B \otimes B) \to A \otimes B$$
définie sur les tenseurs purs par $(m_A \otimes m_B)(a \otimes a' \otimes b \otimes b') = aa' \otimes bb'$. Alors la commutativité et l'associativité du produit tensoriel permettent d'identifier cette application à une application linéaire
$$m_{A\otimes B} : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \to A \otimes B\,,$$
correspondant à une application bilinéaire $m : (A\otimes B)\times(A\otimes B) \to A\otimes B$ qui est la multiplication souhaitée. Par construction, elle vérifie $m(a \otimes b, a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb')$.
En utilisant le fait que les multiplications m_A et m_B munissent A et B d'une structure de K-algèbre, il est facile de vérifier que m munit $A \otimes B$ d'une structure de K-algèbre : par exemple, on vérifie que
$$(a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2)\, a' \otimes b' = (a_1 \otimes b_1)(a' \otimes b') + (a_2 \otimes b_2)(a' \otimes b') = a_1a' \otimes b_1b' + a_2a' \otimes b_2b'\,,$$
et que K est central dans l'algèbre $A \otimes B$ ainsi définie.
Une variante consiste à considérer, pour tout $(a, b) \in A \times B$, l'application bilinéaire $m_{a,b} : A \times B \to A \otimes B$ définie par $(a', b') \mapsto aa' \otimes bb'$. Elle induit naturellement une application linéaire $m_{a,b} : A \otimes B \to A \otimes B$. Il est facile de voir que l'application $m : (a, b) \mapsto m_{a,b}$ est une application bilinéaire $m : A \times B \to \mathrm{End}_K(A \otimes B)$, donc elle induit une application linéaire $M : A \otimes B \to \mathrm{End}_K(A \otimes B)$. Il est alors clair que M induit une application bilinéaire $M' : (A \otimes B) \times (A \otimes B) \to A \otimes B$, qui est la multiplication souhaitée.

b) L'application naturelle $K[X] \times K[Y] \to K[X, Y]$ définie par $(P(X), Q(Y)) \mapsto P(X)Q(Y)$ est clairement bilinéaire, donc elle induit une application linéaire $\varphi : K[X] \otimes_K K[Y] \to K[X, Y]$. Il est facile de voir que φ est un morphisme de K-algèbres (pour la structure de K-algèbre définie en a)).
On voit ensuite que φ envoie la base $(X^i \otimes Y^j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de $K[X]\otimes K[Y]$ sur la base $(X^iY^j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de $K[X, Y]$, donc φ est un isomorphisme.
On peut également considérer l'application linéaire $\psi : K[X, Y] \to K[X] \otimes_K K[Y]$ définie par $\sum_{m,n} \lambda_{m,n}X^mY^n \mapsto \sum_{m,n} \lambda_{m,n}\, X^m \otimes Y^n$ (ces sommes sont finies), et vérifie que $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$ sont bien les applications identité sur chacun des espaces en question.

c) On dispose comme en b) d'une application linéaire naturelle $\widetilde{\varphi} : K(X) \otimes_K K(Y) \to K(X,Y)$, définie par $\widetilde{\varphi}(f(X) \otimes f(Y)) = f(X)g(Y)$. On voit que l'image de $\widetilde{\varphi}$ est incluse dans le sous-espace strict

$$V := \left\{ R(X,Y) \in K(X,Y) : \exists (Q_1(X), Q_2(Y)) \in K[X] \times K[Y] \, , \, R(X,Y)Q_1(X)Q_2(Y) \in K[X,Y] \right\} .$$

Ceci montre bien que $\widetilde{\varphi}$ n'est pas surjective, puisque par exemple l'élément $\frac{1}{X+Y} \in K(X,Y)$ n'est pas dans V.

Définissons

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\psi} : & V & \to & K(X) \otimes_K K(Y) \\ & \dfrac{\sum_{m,n} \lambda_{m,n} X^m Y^n}{Q_1(X)Q_2(Y)} & \mapsto & \sum_{m,n} \lambda_{m,n} \dfrac{X^m}{Q_1(X)} \otimes \dfrac{Y^n}{Q_2(Y)} \end{array} .$$

On constate facilement que $\widetilde{\psi}$ est bien définie et que $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}$ est l'identité, ce qui assure l'injectivité voulue.

Exercice 2 : $\star$

a) Notons $M_2(\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-algèbre des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathbf{H}$ la $\mathbb{R}$-algèbre des quaternions. Montrer que les $\mathbb{C}$-algèbres $M_2(\mathbb{C})$ et $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sont isomorphes.

b) Montrer que $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$ est isomorphe à $M_4(\mathbb{R})$.

Solution de l'exercice 2.

a) On constate d'abord que $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est naturellement munie d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre : on a un isomorphisme naturel de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}i \oplus \mathbb{C}j \oplus \mathbb{C}k$, avec $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, et $ij = -ji = k$.

Par conséquent, il est facile de vérifier que l'application

$$1 \otimes a + i \otimes b + j \otimes c + k \otimes d \mapsto \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$

définit bien un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbf{H} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$.

b) On va montrer que $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$ est isomorphe à $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ (qui est isomorphe à $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$, puisque pour toute K-algèbre A, on a que $\mathrm{Mat}_n(K) \otimes_K A \simeq \mathrm{Mat}_n(A)$).

On considère la sous-$\mathbb{R}$-algèbre A de dimension 4 de $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$ engendrée par $1 \otimes 1, i \otimes 1, j \otimes j, k \otimes j$ (on vérifie que le sous-espace vectoriel engendré par ces quatre vecteurs est bien une sous-algèbre). Alors l'application linéaire $a : A \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ définie par $a(1 \otimes 1) := I_2$, $a(i \otimes 1) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a(j \otimes j) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $a(k \otimes j) := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est bien un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres. De même, on définit la sous-$\mathbb{R}$-algèbre B de dimension 4 de $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$ engendrée par $1 \otimes 1, 1 \otimes j, i \otimes k, i \otimes i$ (on vérifie que le sous-espace vectoriel engendré par ces quatre vecteurs est bien une sous-algèbre). Alors on voit que l'isomorphisme linéaire $A \to B$ défini par $1 \otimes 1 \mapsto 1 \otimes 1$, $i \otimes 1 \mapsto 1 \otimes j$, $j \otimes j \mapsto i \otimes k$ et $k \otimes j \mapsto i \otimes i$ est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres, donc $B \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ comme $\mathbb{R}$-algèbres.

Enfin, les deux sous-$\mathbb{R}$-algèbres A et B commutent dans $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$, donc l'application linéaire naturelle $A \otimes_{\mathbb{R}} B \to \mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$ induite par la multiplication dans $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$ (i.e. $(a,b) \mapsto ab$) est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres. On vérifie enfin que c'est un isomorphisme en calculant les dimensions et en montrant par exemple que l'image contient des générateurs de $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$.

Plus directement, notons $\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose ensuite

$$\alpha(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1, \quad \alpha(i \otimes 1) = \sigma_i \otimes \sigma_j, \quad \alpha(j \otimes 1) = \sigma_j \otimes 1, \quad \alpha(k \otimes 1) = \sigma_k \otimes \sigma_j \, .$$

Ces matrices vérifient les mêmes relations que les générateurs de $\mathbf{H}$. Faisons la même chose de manière symétrique :

$$\alpha(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1, \quad \alpha(1 \otimes i) = \sigma_j \otimes \sigma_i, \quad \alpha(1 \otimes j) = 1 \otimes \sigma_j, \quad \alpha(1 \otimes k) = \sigma_j \otimes \sigma_k \, .$$

Cela suffit pour prolonger α en un morphisme d'algèbres $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, dont on vérifie (en calculant les dimensions) que c'est un isomorphisme.

Exercice 3 : $\star\star$

a) Soient U et V des espaces vectoriels (sur un corps K). On note $U^* = \mathrm{Hom}_K(U, K)$ le dual de U. Expliciter une application linéaire naturelle injective $\Phi : U^* \otimes_K V \to \mathrm{Hom}_K(U, V)$. Quelles sont les images des tenseurs décomposés (c'est-à-dire les $\lambda \otimes v$ avec $\lambda \in U^*$ et $v \in V$) ? Quelle est l'image de l'application Φ ? Quand est-elle un isomorphisme ?

b) Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Que vaut

$$\max_{x \in E \otimes F} \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists (e_1, \dots, e_n) \in E^n \text{ et } (f_1, \dots, f_n) \in F^n \, , \, x = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i \right\} ?$$

Solution de l'exercice 3.

a) On définit $\phi : U^* \times V \to \mathrm{Hom}_K(U, V)$ par $\phi(\varphi, v) := \varphi(.)v$. Il est clair que l'application ϕ est bilinéaire, donc elle induit une application $\Phi : U^* \otimes_K V \to \mathrm{Hom}_K(U, V)$. Il est clair que l'image de Φ est exactement le sous-espace $W \subset \mathrm{Hom}_K(U, V)$ des applications linéaires de rang fini. Par construction, les tenseurs décomposés sont envoyés sur les applications linéaires de rang 1. En outre, pour tout $f \in W$, on choisit une base $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathrm{Im}\,(f)$, de sorte que $f = \sum_{i=1}^n f_i(.) v_i$, avec $f_i \in U^*$. La formule de changement de bases assure que l'élément $\Psi(f) := \sum_{i=1}^n f_i \otimes v_i \in U^* \otimes_K V$ ne dépend pas de la base (v_i) choisie. Cela permet de définir une application linéaire $\Psi : W \to U^* \otimes_K V$ telle que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$, ce qui assure que Φ est injective (d'image W).

Finalement, Φ est un isomorphisme si et seulement si tout application linéaire $U \to V$ est de rang fini si et seulement si U ou V est de dimension finie.

b) La question a) assure que l'on a un isomorphisme canonique $\Phi : E \otimes_K F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(E^*, F)$, et que si pour tout $x \in E \otimes_K F$, on note

$$\mathrm{rg}(x) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists (e_1, \dots, e_n) \in E^n \text{ et } (f_1, \dots, f_n) \in F^n \, , \, x = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i \right\} ,$$

alors on a $\mathrm{rg}(x) = \mathrm{rg}(\Phi(x))$, où le second rang est le rang classique d'une application linéaire. Par conséquent, on voit immédiatement que l'on a

$$\max_{x \in E \otimes F} \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists (e_1, \dots, e_n) \in E^n \text{ et } (f_1, \dots, f_n) \in F^n \, , \, x = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i \right\} = \min\{\dim(E), \dim(F)\} .$$

Remarque : la question plus générale du nombre maximal de tenseurs décomposables dont on a besoin pour écrire un élément quelconque de $E_1 \otimes_K \cdots \otimes_K E_n$, où les E_i sont des K-espaces vectoriels de dimension finie, est très difficile si $n \geq 3$. Cette question est encore largement ouverte, et la réponse dépend du corps K...

Exercice 4 :

Soit K un corps et soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que le dual $(\bigwedge^n E)^*$ de $\bigwedge^n E$ est canoniquement isomorphe à $\bigwedge^n E^*$.

Solution de l'exercice 4. Définissons l'application bilinéaire suivante

$$b : \begin{array}{ccc} (E^*)^n \times E^n & \to & K \\ ((\alpha_i)_i, (x_j)_j) & \mapsto & \det((\alpha_i(x_j))_{ij}) \end{array} .$$

Pour tout $(x_j)_j$, l'application $b(\cdot, (x_j))$ est alternée et passe donc au quotient pour définir $\bigwedge^n E^* \times E^n \to K$. De la même manière, c'est encore alterné en l'autre variable et b induit donc une application

bilinéaire $\bar{b} : \bigwedge^n E^* \times \bigwedge^n E \to K$. Cette dernière est non dégénérée : il suffit de prendre pour $(\alpha_i)_i$ la base duale de (x_i) pour obtenir 1.
L'application $(\alpha_i)_i \mapsto b((\alpha_i), \cdot)$ est l'isomorphisme $\bigwedge^n E^* \xrightarrow{\sim} \left(\bigwedge^n E\right)^*$ recherché.

Exercice 5 :
Soit $n \geq 1$ un entier, soit K un corps et soit E un espace vectoriel de dimension n sur K. Montrer que le dual $(\bigwedge^i E)^*$ de $\bigwedge^i E$ est non canoniquement isomorphe à $\bigwedge^{n-i} E$.

Solution de l'exercice 5. L'application naturelle $\bigwedge^i E \times \bigwedge^{n-i} E \to \bigwedge^n E$ composée avec l'isomorphisme non canonique (voir cours) $\bigwedge^n E \simeq K$ montrent que $(\bigwedge^i E)^*$ est non canoniquement isomorphe à $\bigwedge^{n-i} E$.

Exercice 6 : $\star\star$
Soit K un corps et soient E et F des K-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que l'on a une bijection entre l'ensemble des applications linéaires $\bigwedge^n E \to F$ et l'ensemble des applications n-linéaires alternées $E^n \to F$.

Solution de l'exercice 6. Si $f : \bigwedge^n E \to F$, on peut lui associer $(e_i)_i \mapsto f(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$.
On peut construire l'application réciproque de la manière suivante : notons $\phi : \bigwedge^n E^* \xrightarrow{\sim} \left(\bigwedge^n E\right)^*$ l'isomorphisme de l'exercice 4. Notons $(f_1, \ldots, f_r)$ une base de F et $(f_1^*, \ldots, f_r^*)$ la base duale. Si $g : E^n \to F$ est n-linéaire alternée, on lui associe $\sum_j \phi(f_j^* \circ g) f_j$. On vérifie ensuite que c'est bien l'inverse de l'application précédente.

Exercice 7 : $\star\star$
Soit K un corps et soit E un K-espace vectoriel. Soient $u_1, \ldots, u_r$ des éléments de E.

a) Montrer que l'on a $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r E$ si et seulement si la famille $(u_1, \ldots, u_r)$ est libre dans E.
b) Montrer que l'on a $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r E$ si et seulement s'il existe une forme alternée f sur E telle que $f(u_1, \ldots, u_r) \neq 0$.

Solution de l'exercice 7.

a) Si on a une relation linéaire non triviale $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r = 0$ avec les λ_i dans K, on peut supposer $\lambda_{i_0} = 1$ pour un certain i_0. Alors on a
$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = -\sum_{j \neq i_0} \lambda_j \, u_1 \wedge \cdots \wedge u_{i_0-1} \wedge u_j \wedge u_{i_0+1} \wedge \ldots u_r = 0 \,.$$
Si la famille $(u_i)_i$ est libre, notons F le sous-espace de E engendré par ces vecteurs : la droite $\bigwedge^r F \subseteq \bigwedge^r E$ est alors engendrée par $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$.
b) Si $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ est non nul, notons F le sous-espace de E de base $(u_1, \ldots, u_r)$. Alors la forme linéaire $\bigwedge^r F \to K$ définie par $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \mapsto 1$ peut se prolonger par 0 sur un supplémentaire de $\bigwedge^r F$ dans $\bigwedge^r E$ et on obtient une forme linéaire $f : \bigwedge^r E \to K$ telle que $f(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) \neq 0$. La réciproque est évidente.

Exercice 8 :
Soit K un corps et soient E et F des K-espaces vectoriels. Soit $n \geq 1$ un entier et soit $u : E \to F$ une aplication linéaire.

a) Définir une application linéaire "naturelle" $\bigwedge^n u : \bigwedge^n E \to \bigwedge^n F$.
b) Supposons que le rang de u est fini égal à un entier r. Montrer que si $n \leq r$, alors le rang de $\bigwedge^n u$ est $\binom{n}{r}$, et si $n > r$, l'application $\bigwedge^n u$ est nulle.

Solution de l'exercice 8.

a) Il s'agit de $\bigwedge^n u : x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto u(x_1) \wedge \cdots \wedge u(x_n)$.

b) On vérifie que l'image de $\bigwedge^n u$ est $\bigwedge^n \big(\mathrm{Im}\,(u)\big)$, ce qui assure le résultat.

Exercice 9 :
Soit K un corps et soient A et B des K-algèbres graduées.

a) Montrer qu'il existe sur $A \otimes_K B$ une structure naturelle de K-algèbre graduée telle que
$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{(\deg b)(\deg a')}(aa' \otimes bb').$$
On note $A \otimes_K^{\mathrm{su}} B$ l'algèbre ainsi obtenue.

b) Soient V et W des espaces vectoriels sur K. Montrer que l'on a un isomorphisme de K-algèbres
$$\bigwedge(V \oplus W) \simeq \bigwedge V \otimes_K^{\mathrm{su}} \bigwedge W.$$

Solution de l'exercice 9.

a) D'abord, la multiplication ainsi définie est bien associative. Ensuite, la distributivité par rapport à l'addition permet de définir la multiplication sur $A \otimes B$ et de lui fournir la structure d'algèbre voulue (voir aussi l'exercice 1).

b) En tant que K-espaces vectoriels, l'isomorphisme est clair puisque l'on a, pour tout $n \geq 0$, un isomorphisme naturel :
$$\bigwedge^n (V \oplus W) \simeq \bigoplus_{k=0}^{n} \left(\bigwedge^k V\right) \otimes_K \left(\bigwedge^{n-k} W\right),$$
et ce dernier espace est exactement le sous-espace vectoriel de $(\bigwedge V) \otimes_K (\bigwedge W)$ formé des éléments de degré n.
Reste à vérifier la compatibilité avec la multiplication, qui se fait sur les tenseurs indécomposables. Pour cela,

soient $n, n' \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n, 0 \leq k' \leq n', v_1, \dots, v_k, v'_1, \dots, v'_{k'} \in V, w_{k+1}, \dots, w_n, w'_{k'+1}, \dots, w'_{n'} \in W$.

On calcule le produit suivant dans $\bigwedge(V \oplus W)$:
$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge w_{k+1} \wedge \dots \wedge w_n) \wedge (v'_1 \wedge \dots \wedge v'_{k'} \wedge w'_{k'+1} \wedge \dots \wedge w'_{n'}) = (-1)^{(n-k)k'} v_I \wedge w_J\,,$$
où on a posé $v_I = v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge v'_1 \wedge \dots \wedge v'_{k'}$ et $w_J = w_{k+1} \wedge \dots \wedge w_n \wedge w'_{k'+1} \wedge \dots \wedge w'_{n'}$.
Or par définition de $\otimes^{\mathrm{su}}$, on a dans $\bigwedge V \otimes_K^{\mathrm{su}} \bigwedge W$:
$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k \otimes w_{k+1} \wedge \dots \wedge w_n) \cdot^{\mathrm{su}} (v'_1 \wedge \dots \wedge v'_{k'} \otimes w'_{k'+1} \wedge \dots \wedge w'_{n'}) = (-1)^{(n-k)k'} v_I \otimes w_J\,,$$
ce qui assure que l'isomorphisme naturel de K-espaces vectoriels entre $\bigwedge(V \oplus W)$ et $(\bigwedge V) \otimes_K^{\mathrm{su}} (\bigwedge W)$ est bien un isomorphisme de K-algèbres.

Exercice 10 :
Soit K un corps et soit E un K-espace vectoriel.

a) Supposons E de dimension finie. On note $\bigwedge E = \bigoplus_n \bigwedge^n E$ et on écrit tout élément $z \in \bigwedge E$ sous la forme $z = \sum_{n \geq 0} z_n$. Montrer que $z \in \bigwedge E$ est inversible si et seulement si $z_0 \neq 0$.

b) Montrer que tout élément $z \in \bigwedge E$ appartient à un $\bigwedge F$ pour un certain sous-espace $F \subset E$ de dimension finie. En déduire une description des inversibles de $\bigwedge E$.

Solution de l'exercice 10.

a) Notons r la dimension de E. Si z est inversible d'inverse y, en projetant sur la composante en degré 0 de l'algèbre extérieure la relation $zy = 1$ dans $\bigwedge E$, on voit que $z_0 y_0 = 1$, donc la condition est nécessaire.

Réciproquement, supposons $z_0 \neq 0$. On vérifie que $z_0^{-1} \sum_{i=0}^{r} \big(-z_0^{-1} \sum_{n \geq 1} z_n\big)^{\wedge i}$ est une somme finie dans $\bigwedge E$ qui est l'inverse de z.

b) Seuls un nombre fini de z_n sont non nuls. Chacun s'écrit alors comme une somme finie

$$z_n = z_{n,1}^{(1)} \wedge \cdots \wedge z_{n,n}^{(1)} + \cdots + z_{n,1}^{(\alpha_n)} \wedge \cdots \wedge z_{n,n}^{(\alpha_n)} .$$

Il suffit alors de considérer pour F le sous-espace de E engendré par tous les $z_{n,i}^k$ avec $n \geq 0$ tel que $z_n \neq 0$, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq \alpha_n$. Alors $z \in \bigwedge F \subset \bigwedge E$.

La question a) assure alors que si $z_0 \neq 0$, alors z est inversible dans $\bigwedge F$, donc dans $\bigwedge E$. Réciproquement, si z est inversible dans $\bigwedge E$ d'inverse y, alors il existe un sous-espace vectoriel $G \subset E$ de dimension finie tel que $y, z \in \bigwedge G \subset \bigwedge E$, et la question a) assure que $z_0 \neq 0$.

Exercice 11 : $\star\star$

Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $F \subset E$ des corps tels que E est un F-espace vectoriel de dimension n, de base $(1, x_1, \dots, x_{n-1})$. On suppose l'existence d'un groupe G de cardinal n, composé de F-automorphismes de E, tel que le corps $E^G = \{e \in E \mid \forall g \in G,\ ge = e\}$ est exactement F.

a) Montrer que les éléments de G sont linéairement indépendants.

b) Soit V un E-espace vectoriel, muni d'une action semi-linéaire de G. On définit le sous-F-espace vectoriel des G-invariants par $V^G := \{v \in V \mid \forall g \in G\ gv = v\}$. Prouver que l'application naturelle E-linéaire $\eta : V^G \otimes_F E \to V$ commute à l'action de G.

c) Montrer que η est un isomorphisme.

Solution de l'exercice 11.

a) On raisonne par l'absurde. Soit $\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k = 0$ dans $\mathrm{End}_F(E) \subset E^E$ une relation de dépendance linéaire sur E de longueur k minimale (avec les $g_i \in G$ deux-à-deux distincts et $\lambda_i \in E^*$ pour tout i). On peut supposer $k \geq 2$. Comme les caractères g_i sont distincts, on a l'existence d'un élément $y \in E$ avec $g_1(y) \neq g_2(y)$. On a alors, pour tout $x \in E$, $g_1(y) \sum_i \lambda_i g_i(x) = 0$, et aussi $\sum_i \lambda_i g_i(xy) = \sum_i \lambda_i g_i(x) g_i(y) = 0$. En soustrayant ces deux égalités, on obtient une combinaison linéaire non triviale et strictement plus courte, à savoir

$$\lambda_2(g_2(y) - g_1(y))g_2 + \cdots + \lambda_k(g_k(y) - g_1(y))g_k = 0 ,$$

ce qui contredit la minimalité de la relation initiale.

b) Tout d'abord, on dispose bien d'une application E-linéaire $\eta : V^G \otimes_F E \to V$ puisque l'application $V^G \times E \to V$ définie par $(v, e) \mapsto ev$ est bilinéaire.

Pour tout $g \in G$, et tous $v \in V^G$ et $e \in E$, on a

$$\eta(g \cdot (v \otimes e)) = \eta(v \otimes g(e)) = \eta(g(v) \otimes g(e)) = g(e)g(v) = g(ev) ,$$

donc η est bien G-équivariante.

c) Montrons d'abord que η est surjective. Notons $g_1 = \mathrm{Id}, \dots, g_n$ les éléments de G. On renomme aussi $x_0 := 1 \in E$. Soit v un élément non nul de V. Posons, pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $v_j := \sum_i g_i(x_j v) \in V^G$. Par la question a), la matrice $(g_i(x_j))_{i,j}$ est inversible, et en inversant le système précédent, on obtient les $g_i(v)$ comme combinaisons linéaires des v_j. La relation donnant $g_0(v)$ affirme alors la surjectivité souhaitée.

Montrons ensuite que η est injective. Si ce n'est pas le cas, il existe une famille $(v_1, \dots, v_m)$ de vecteurs de V^G qui est F-libre mais non E-libre. On suppose l'entier m minimal pour cette propriété. On dispose d'une combinaison linéaire non triviale $\sum_i \lambda_i v_i = 0$ sur E. Comme les λ_i ne sont pas tous dans F, on peut supposer $\lambda_1 \notin F$ et $\lambda_m = 1$. Comme $\lambda_1 \notin F = E^G$, il existe $g \in G$ tel que $g(\lambda_1) \neq \lambda_1$. On obtient alors une relation $\sum_{i=1}^{m-1} (g(\lambda_i) - \lambda_i)v_i = 0$, qui contredit la minimalité de m. Donc η est bien injective.

Exercice 12 : $\star\star$

Soit K un corps.

a) Définir une notion de suite exacte de K-espaces vectoriels.

b) Soit $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ une suite exacte de K-espaces vectoriels. Soit également W un K-espace vectoriel.

  i) Montrer que la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_K(V_3, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_1, W) \to 0$$

  est une suite exacte.

  ii) Montrer que la suite

$$0 \to V_1 \otimes_K W \to V_2 \otimes_K W \to V_3 \otimes_K W \to 0$$

  est une suite exacte.

Solution de l'exercice 12.

a) Soient $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des K-espaces vectoriels et $f_n : E_n \to E_{n+1}$ des applications linéaires. On dit que la suite

$$\dots \xrightarrow{f_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \xrightarrow{f_n} E_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

est exacte en rang n (ou en E_n) si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f_n)$. On dit que la suite est exacte si elle est exacte en rang n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

b) On note $f : V_1 \to V_2$ et $g : V_2 \to V_3$ les deux morphismes non triviaux de la suite exacte.

  i) — Montrons que la composée $\mathrm{Hom}_K(V_3, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_1, W)$ est l'application nulle. Soit $\varphi : V_3 \to W$ une application linéaire. Alors l'image de φ dans $\mathrm{Hom}_K(V_2, W)$ est $\varphi \circ g$ et son image dans $\mathrm{Hom}_K(V_1, W)$ est $\varphi \circ g \circ f$. Or la suite initiale est exacte, donc $g \circ f = 0$, donc l'image de φ dans $\mathrm{Hom}_K(V_1, W)$ est nulle.

  — Montrons maintenant que le noyau de $\mathrm{Hom}_K(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_1, W)$ est contenu dans l'image de $\mathrm{Hom}_K(V_3, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_2, W)$. Soit $\varphi : V_2 \to W$ dans ce noyau, i.e. tel que $\varphi \circ f = 0$. Alors $f(V_1) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$, donc le théorème de factorisation assure que φ se factorise en une application linéaire $V_2/f(V_1) \to W$. Or g induit un isomorphisme $V_2/f(V_1) \simeq V_3$, donc φ se factorise en $\overline{\varphi} : V_3 \to W$ de sorte que $\overline{\varphi} \circ g = \varphi$. Cela assure que φ est l'image de $\overline{\varphi}$ par l'application naturelle $\mathrm{Hom}_K(V_3, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_2, W)$.

  — Montrons que l'application $\mathrm{Hom}_K(V_3, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_2, W)$ est injective. Soit $\varphi : V_3 \to W$ tel que $\varphi \circ g = 0$. Comme g est surjective par hypothèse, il est clair que cela implique que $\varphi = 0$, d'où l'injectivité souhaitée.

  — Montrons que l'application $\mathrm{Hom}_K(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_1, W)$ est surjective. Soit $\varphi : V_1 \to W$ une application linéaire. On choisit un supplémentaire V_1' de $f(V_1)$ dans V_2, et on définit une application linéaire $\psi : V_2 \to W$ en posant $\psi_{|f(V_1)} = \varphi \circ {f_{|V_1}}^{-1}$ et $\psi_{|V_1'} = 0$. Il est alors clair que $\psi \circ f = \varphi$, donc φ est l'image de ψ par $\mathrm{Hom}_K(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_1, W)$.

  On a bien prouvé l'exactitude souhaitée.

  ii) — Montrons que la composée $V_1 \otimes_K W \to V_2 \otimes_K W \to V_3 \otimes_K W$ est l'application nulle. Soit $v_1 \otimes w \in V_1 \otimes W$. Alors l'image de $v_1 \otimes w$ dans $V_2 \otimes W$ est $f(v_1) \otimes w$ et son image dans $V_3 \otimes W$ est $g(f(v_1)) \otimes W$. Or la suite initiale est exacte, donc $g \circ f = 0$, donc l'image de $v_1 \otimes w$ dans $V_3 \otimes W$ est nulle.

  — Montrons maintenant que le noyau de $V_2 \otimes W \to V_3 \otimes W$ est contenu dans l'image de $V_1 \otimes W \to V_2 \otimes W$. Pour cela, on constate que le point précédent assure que l'application $V_2 \otimes W \to V_3 \otimes W$ se factorise en une application linéaire $\overline{f} : V_2 \otimes W/\mathrm{Im}\,(V_1 \otimes W) \to V_3 \otimes W$, définie par $\overline{f}(v_2 \otimes w) = f(v_2) \otimes w$. On définit une application $h : V_3 \times W \to V_2 \otimes W/\mathrm{Im}\,(V_1 \otimes W)$ de la façon suivante : si $(v_3, w) \in V_3 \times W$, la surjectivité de g assure qu'il existe $v_2 \in V_2$ tel que $g(v_2) = v_3$, et on définit $h(v_3, w)$ comme l'image de $v_2 \otimes w$ dans le quotient $V_2 \otimes W/\mathrm{Im}\,(V_1 \otimes W)$. Vérifions que la définition de h est correcte : si $v_2, v_2' \in V_2$ vérifient que $g(v_2) = v_3 = g(v_2')$, alors $v_2 - v_2' \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}\,(f)$, donc il existe $v_1 \in V_1$ tel que $v_1 - v_2' = f(v_1)$. Alors on a $v_2 \otimes w - v_2' \otimes w = (v_2 - v_2') \otimes w = f(v_1) \otimes w \in \mathrm{Im}\,(V_1 \otimes W)$. Donc h est bien définie.

En outre, il est clair que h est bilinéaire, donc h induit une application linéaire $\overline{h}$: $V_3 \otimes W \to V_2 \otimes W/\mathrm{Im}\,(V_1 \otimes W)$
Il est immédiat de vérifier que $\overline{h}$ est la réciroque de l'application $\overline{g}$. Cela assure bien que le noyau de $V_2 \otimes W \to V_3 \otimes W$ est égal à l'image de $V_1 \otimes W \to V_2 \otimes W$.

— Montrons que l'application $V_1 \otimes W \to V_2 \otimes W$ est injective. On fixe une base $(w_i)_{i\in I}$ de W. Alors $W \cong \bigoplus_{i\in I} Kw_i$, et le morphisme $V_1 \otimes W \to V_2 \otimes W$ s'identifie que morphisme $\bigoplus_{i\in I} f \otimes \mathrm{id}_i : \bigoplus_{i\in I} V_1 \otimes Kw_i \to \bigoplus_{i\in I} V_2 \otimes Kw_i$, qui est bien injectif puisque chacune des composantes de ce morphisme est le morphisme injectif $f : V_1 \to V_2$.

— Montrons que l'application $V_2 \otimes W \to V_3 \otimes W$ est surjective. Soit $v_3 \otimes w \in V_3 \otimes W$. Par surjectivité de g, il existe $v_2 \in V_2$ tel que $g(v_2) = v_3$. Alors $v_3 \otimes w$ est l'image de $v_2 \otimes w$ par l'application $V_2 \otimes W \to V_3 \otimes W$. une application linéaire. On choisit un supplémentaire V_1' de $f(V_1)$ dans V_2, et on définit une application linéaire $\psi : V_2 \to W$ en posant $\psi_{|_{f(V_1)}} = \varphi \circ f_{|_{V_1}}{}^{-1}$ et $\psi_{|_{V_1'}} = 0$. Il est alors clair que $\psi \circ f = \varphi$, donc φ est l'image de ψ par $\mathrm{Hom}_K(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_1, W)$.

On a bien prouvé l'exactitude souhaitée.

Remarque : on peut également déduire la question b) ii) de la question b) i), en montrant le fait suivant : une suite $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ de K-espaces vectoriels est exacte si et seulement si pour tout K-espace vectoriel F, la suite $0 \to \mathrm{Hom}_K(E_3, F) \to \mathrm{Hom}_K(E_2, F) \to \mathrm{Hom}_K(E_1, F) \to 0$ est une suite exacte. La preuve de ce fait est facile (du même ordre que la preuve de b)i)). Il suffit ensuite d'appliquer cela à la suite $0 \to V_1 \otimes W \to V_2 \otimes W \to V_3 \otimes W \to 0$, en utilisant les identifications $\mathrm{Hom}_K(V_i \otimes W, F) \simeq \mathrm{Hom}_K(V_i, \mathrm{Hom}_K(W, F))$...

Exercice 13 :
Soit V un espace vectoriel hermitien complexe de dimension finie n, de base $(e_1, \ldots, e_n)$. On ne suppose pas que cette base est orthonormale. Pour $1 \leq i \leq n$, soit s_i une transformation unitaire telle que $s_i(e_i) = c_i e_i$ avec $c_i \neq 1$ et telle que s_i est l'identité sur $e_i^\perp$. On appelle G le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par les s_i.

a) Soit $x \in V$. Exprimer $s_i(x)$ comme combinaison linéaire de x et de e_i.
b) Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que tout élément de $\bigwedge^k V$ invariant par G est nul (on pourra procéder par récurrence sur n en considérant le sous-espace V' de base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ et en décomposant V en somme directe de V' et de son supplémentaire orthogonal).
c) On suppose que G est fini. Montrer que pour tout élément A de $\mathrm{End}(V)$ on a :

$$\sum_{g\in G} \det(A - g) = |G| \cdot \det(A) \quad \text{et} \quad \sum_{g\in G} \det(\mathrm{Id} - Ag) = |G|.$$

d) En déduire que pour tout A de $\mathrm{End}(V)$, il existe $g \in G$ tel que Ag n'a aucun point fixe non nul.

Solution de l'exercice 13.

a) La formule usuelle de projection orthogonale assure que l'on a

$$s_i(x) = (c_i - 1)\frac{\langle x, e_i\rangle}{\|e_i\|^2} e_i + x\,.$$

b) On raisonne par récurrence sur n :
— si $n = 1$, alors la seule valeur intéressante est $k = 1$, et on a $\bigwedge^k V = \bigwedge^1 V = V = Ke_1$. Or par définition, on a $s_1(e_1) = c_1 e_1 \neq e_1$, donc $\left(\bigwedge^k V\right)^G = \{0\}$.
— Soit $n > 1$ et supposons le résultat démontré si $\dim V = n - 1$. On considère le sous-espace vectoriel V' suggéré dans l'énoncé, ainsi que la décomposition en somme directe orthogonale $V = V' \oplus^\perp V'^\perp$. Alors $\dim V' = n-1$ et $\dim V'^\perp = 1$. Soit $k \geq 1$. On a alors un isomorphisme canonique

$$\bigwedge^k (V) \simeq \bigoplus_{i=0}^{k} \bigwedge^i (V') \otimes \bigwedge^{k-i} (V'^\perp) = \bigwedge^k (V') \oplus \left(\bigwedge^{k-1} (V') \otimes V'^\perp\right).$$

Supposons d'abord $k \geq 2$. Alors l'hypothèse de récurrence assure que $\bigwedge^k(V')^{G'} = \{0\}$ et $\bigwedge^{k-1}(V')^{G'} = \{0\}$, où $G' := \langle s_1, \dots, s_{n-1}\rangle \subset G$. Soit alors $x = x_1 + x_2 \otimes v \in \bigwedge^k(V)^G$, avec $x_1 \in \bigwedge^k(V')$, $x_2 \in \bigwedge^{k-1}(V')$ et $v \in V'^{\perp}$. Alors pour tout $1 \leq i \leq n-1$, on a $s_i(x) = x$, donc comme V' et $V'^{\perp}$ sont stables par s_i, on a $s_i(x_1) = x_1$ et $s_i(x_2) \otimes v = x_2 \otimes v$. Donc $x_1 \in \bigwedge^k(V')^{G'} = \{0\}$, donc $x = x_2 \otimes v$. Si $v = 0$, alors $x = 0$, sinon, on a $s_i(x_2) = x_2$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, donc $x_2 \in \bigwedge^{k-1}(V')^{G'} = \{0\}$, donc $x = 0$ dans tous les cas. Donc $\bigwedge^k(V)^G = \{0\}$.

Supposons maintenant $k = 1$. Alors par récurrence, on a seulement $\bigwedge^1(V')^{G'} = \{0\}$, et donc si $x = x_1 + x_2 \otimes v \in \bigwedge^1(V)^G$, on a toujours $x_1 = 0$, et donc $x = x_2 \otimes v$, avec $x_2 \in \mathbb{C}$ et $v \in V'^{\perp}$. On applique alors $s_n \in G$ à ce vecteur : $s_n(x) = x$ implique que $s_n(v) = v$. Si $v \neq 0$, Kv est un supplémentaire de V' et la restriction de s_n à V' est l'identité, alors que $s_n \neq \mathrm{id}$, donc $s_n(v) \neq v$. Par conséquent, $v = 0$ et donc $x = 0$. Donc $\bigwedge^1(V)^G = \{0\}$.

Cela conclut la preuve.

c) On considère l'endomorphisme $S := \sum_{g \in G} \bigwedge^n(A - g) : \bigwedge^n(V) \to \bigwedge^n(V)$. C'est une homothétie de rapport $\sum_{g\in G} \det(A-g)$. Soit alors $e := e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ un vecteur non nul de $\bigwedge^n(V)$. Alors

$$S(e) = S(e_1) \wedge \cdots \wedge S(e_n)$$

s'écrit, en développant, comme une somme finie de termes dont le premier est $\sum_{g \in G} A(e_1) \wedge \cdots \wedge A(e_n) = |G| \det(A) \cdot e$ et les suivants sont des multiples de vecteurs de la forme

$$A(e_{i_{k+1}}) \wedge \cdots \wedge A(e_{i_n}) \wedge \sum_{g \in G} g(e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge g(e_{i_k})$$

avec $1 \leq k \leq n$ et $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$. Or pour tout $k \geq 1$, le vecteur $\sum_{g \in G} g(e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge g(e_{i_k}) \in \bigwedge^k(V)$ est clairement fixe par G, donc la question b) assure que $\sum_{g\in G} g(e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge g(e_{i_k}) = 0$, donc finalement

$$S(e) = |G| \det(A) \cdot e \,,$$

i.e.

$$\sum_{g \in G} \det(A - g) = |G| \det(A) \,.$$

De même, on obtient avec un raisonnement exactement similaire que

$$\left(\sum_{g \in G} \bigwedge^n (\mathrm{Id} - Ag)\right)(e) = \sum_{g \in G} e = |G| \cdot e \,,$$

puisque tous les termes restants sont nuls pour la même raison que plus haut. On en déduit donc que

$$\sum_{g \in G} \det(\mathrm{Id} - Ag) = |G| \,.$$

d) Soit $A \in \mathrm{End}(V)$. La seconde formule de la question c) assure qu'il existe $g \in G$ tel que $\det(\mathrm{Id} - Ag) \neq 0$. Donc $\mathrm{Id} - Ag$ est inversible, donc Ag n'a pas de point fixe non nul dans V.

Exercice 14 : $\star\star\star$

Soient p un nombre premier impair, $r \geq 1$ et $q = p^r$.

a) On note $V_1, V_2 := (\mathbb{F}_{q^2})^2$, et (e_i, f_i) la base canonique de V_i. On munit $V := V_1 \otimes_{\mathbb{F}_{q^2}} V_2$ de la forme bilinéaire symétrique b définie par $b(v_1 \otimes v_2, v_1' \otimes v_2') := b_1(v_1, v_1')b_2(v_2, v_2')$, où b_i est la forme bilinéaire alternée sur V_i telle que $b_i((1,0),(0,1)) = 1$. On pose enfin

$$V' := \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}_p}\{e_1 \otimes e_2, f_1 \otimes f_2, \lambda e_1 \otimes f_2 + \overline{\lambda} f_1 \otimes e_2 : \lambda \in \mathbb{F}_{q^2}\} \subset V \,.$$

i) Montrer que $\dim_{\mathbb{F}_p} V' = 4$.

ii) Construire un morphisme de groupes $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^2}) \to \mathrm{O}(V', b)$.

iii) En déduire un isomorphisme de groupes $\mathrm{P}\Omega_4^-(\mathbb{F}_q) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$.

b) On note (e_i) la base canonique de $\mathbb{F}_q^4$ et on note $W := \bigwedge^2(\mathbb{F}_q^4)$.

i) Quelle est la dimension de W comme $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel ?

ii) Montrer que W est muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée naturelle f telle que pour tout $\sigma : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$, $f(e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)} \wedge e_{\sigma(4)}) = \varepsilon(\sigma)$, avec par convention $\varepsilon(\sigma) = 0$ si σ n'est pas bijective.

iii) Montrer que $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_q)$ agit naturellement sur W.

iv) Construire un morphisme de groupes $\mathrm{SL}_4(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{O}(W, f)$.

v) En déduire un isomorphisme $\mathrm{P}\Omega_6^+(\mathbb{F}_q) \cong \mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_q)$.

c) On note (e_1, e_2, e_3, e_4) une base orthonormée pour la forme sesquilinéaire naturelle sur $X := (\mathbb{F}_{q^2})^4$, et $X' \subset \bigwedge^2 X$ le sous-$\mathbb{F}_q$-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\lambda e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)} + \overline{\lambda} e_{\sigma(3)} \wedge e_{\sigma(4)}$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{A}_4$ et $\lambda \in \mathbb{F}_{q^2}$.

i) Montrer que $\dim_{\mathbb{F}_q} X' = 6$.

ii) Montrer que X' est muni d'une forme bilinéaire symétrique f telle que pour tout $\sigma \in \mathfrak{A}_4$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_{q^2}$,

$$f(\lambda e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)} + \overline{\lambda} e_{\sigma(3)} \wedge e_{\sigma(4)}, \mu e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)} + \overline{\mu} e_{\sigma(3)} \wedge e_{\sigma(4)}) = \lambda\overline{\mu} + \overline{\lambda}\mu\,.$$

iii) Construire un morphisme de groupes $\mathrm{SU}_4(\mathbb{F}_{q^2}) \to \mathrm{O}(X', f)$.

iv) En déduire un isomorphisme de groupes $\mathrm{P}\Omega_6^-(\mathbb{F}_q) \cong \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_{q^2})$.

Solution de l'exercice 14.

a) i) On fixe un élément $\varepsilon \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$. On vérifie facilement que V' est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension 4, dont une base est $e_1 \otimes e_2, f_1 \otimes f_2, e_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes e_2, \varepsilon e_1 \otimes f_2 + \overline{\varepsilon} f_1 \otimes e_2$.

ii) On considère la représentation de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$ sur V définie par l'action diagonale $g \cdot (v_1 \otimes v_2) := g(v_1) \otimes \overline{g}(v_2)$. Montrons que le sous-$\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $V' \subset V$ est stable par cette action. Comme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$ est engendré par les transvections, il suffit de montrer que V' est stable par les transvections. Pour cela, il suffit de considérer l'élément $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ (dans la base (e_i, f_i) de V_i), avec $\lambda \in \mathbb{F}_{q^2}$. On a alors

$$g \cdot (e_1 \wedge e_2) = (e_1 + \lambda f_1) \otimes (e_2 + \overline{\lambda} f_2) = e_1 \otimes e_2 + (\lambda f_1 \otimes e_2 + \overline{\lambda} e_1 \otimes f_2) + \lambda\overline{\lambda} f_1 \otimes f_2 \in V'$$

car $\lambda\overline{\lambda} \in \mathbb{F}_q$. De même,

$$g \cdot (f_1 \otimes f_2) = f_1 \otimes f_2 \in V'\,,$$

et

$$g \cdot (\varepsilon e_1 \otimes f_2 + \overline{\varepsilon} f_1 \otimes e_2) = (\varepsilon\lambda + \overline{\varepsilon}\overline{\lambda}) f_1 \otimes f_2 + (\varepsilon e_1 \otimes f_2 + \overline{\varepsilon} f_1 \otimes e_2) \in V'$$

car $\varepsilon\lambda + \overline{\varepsilon}\overline{\lambda} \in \mathbb{F}_q$.

Donc $V' \subset V$ est stable par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$. On a donc un morphisme de groupes naturel $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^2}) \to \mathrm{GL}(V')$.

Soit alors $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$. Si on note q la forme quadratique associée à b, on a

$$q(g \cdot (e_1 \otimes e_2)) = q(e_1 \otimes e_2 + (\lambda f_1 \otimes e_2 + \overline{\lambda} e_1 \otimes f_2) + \lambda\overline{\lambda} f_1 \otimes f_2) = -2\lambda\overline{\lambda} + 2\lambda\overline{\lambda} = 0 = q(e_1 \otimes e_2)$$

et

$$q(g \cdot (f_1 \otimes f_2)) = q(f_1 \otimes f_2)$$

et

$$q(g \cdot (\varepsilon e_1 \otimes f_2 + \overline{\varepsilon} f_1 \otimes e_2)) = q((\varepsilon\lambda + \overline{\varepsilon}\overline{\lambda}) f_1 \otimes f_2 + (\varepsilon e_1 \otimes f_2 + \overline{\varepsilon} f_1 \otimes e_2)) = -2\varepsilon\overline{\varepsilon} = q(\varepsilon e_1 \otimes f_2 + \overline{\varepsilon} f_1 \otimes e_2)\,.$$

Cela assure que les éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$ agissant sur V' préservent la forme b, donc le morphisme précédent est en fait un morphisme $\rho : \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^2}) \to \mathrm{O}(V', b)$, comme souhaité.

iii) Un calcul simple assure que le noyau du morphisme ρ construit à la question précédente est $\{\pm I_2\}$. Le calcul du groupe dérivé de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$ assure que le morphisme ρ est à valeurs dans $\Omega(V', b)$. Donc ce morphisme induit un morphisme injectif $\overline{\rho} : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{q^2}) \to \Omega(V', b)$. Un calcul de cardinaux assure alors que ce morphisme induit un isomorphisme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{q^2}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{P}\Omega(V', b)$. Enfin, on vérifie facilement que la forme bilinéaire symétrique b est de type $-$, et par conséquent le groupe $\mathrm{P}\Omega(V', b)$ s'identifie au groupe $\mathrm{P}\Omega_4^+(\mathbb{F}_q)$, ce qui conclut la preuve.

b) i) On sait que W est de dimension $\binom{4}{2} = 6$ sur $\mathbb{F}_p$.

ii) On définit la forme f sur la base $(e_i \wedge e_j)_{i<j}$ de W, de la façon suivante : on pose $f(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_k) := 1$ si la permutation $(i\,j\,k\,l)$ est paire, $f(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_k) := -1$ si cette permutation est impaire, et $f(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_k) := 0$ sinon. Il est clair que cela définit une forme bilinéaire symétrique non dégénérée vérifiant la propriété souhaitée.

iii) Il suffit de considérer l'action diagonale de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_q)$ sur W donnée par $g \cdot (x \wedge y) := g(x) \wedge g(y)$.

iv) On a construit à la question précédente un morphisme de groupes $\mathrm{SL}_4(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{GL}(W)$. Montrons que les éléments de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{F}_q)$ agissant sur W préservent la forme bilinéaire f. Pour cela, on considère la transvection $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{F}_q)$. On a alors $g \cdot (e_1 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_3 + \lambda e_2 \wedge e_3$ et $g \cdot (e_1 \wedge e_4) = e_1 \wedge e_4 + \lambda e_2 \wedge e_4$, et $g \cdot (e_i \wedge e_j) = e_i \wedge e_j$ sinon. Par conséquent, un calcul simple assure que l'on a $f(g \cdot (e_1 \wedge e_3), g \cdot (e_1 \wedge e_4)) = f(e_1 \wedge e_3 + \lambda e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4 + \lambda e_2 \wedge e_4) = \lambda - \lambda = 0 = f(e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4)$, et de même, pour tout i, j, k, l, on a $f(g \cdot (e_i \wedge e_j), g \cdot (e_k \wedge e_l)) = f(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l)$. Comme les transvections engendrent $\mathrm{SL}_4(\mathbb{F}_q)$, on en déduit que l'action de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{F}_q)$ sur W préserve la forme bilinéaire f. Par conséquent, l'action de la question précédente induit un morphisme naturel

$$\rho : \mathrm{SL}_4(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{O}(W, f) .$$

v) On vérifie que $\mathrm{Ker}(\rho) = \{\pm I_4\}$, que la forme quadratique associée à f est de type $+$, et alors le calcul du groupe dérivé de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{F}_q)$ assure que le morphisme ρ induit un morphisme de groupes injectif

$$\overline{\rho} : \mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{P}\Omega(W, f) \cong \mathrm{P}\Omega_6^+(\mathbb{F}_q) .$$

Un argument de cardinalité assure alors que ce morphisme est un isomorphisme.

c) i) On note ε un élément fixé de $\mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$. On vérifie qu'une base de X' est donnée les vecteurs

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \, , \, e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2 \, , \, e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3 \, , \, \varepsilon e_1 \wedge e_2 + \overline{\varepsilon} e_3 \wedge e_4 \, , \, \varepsilon e_1 \wedge e_2 + \overline{\varepsilon} e_3 \wedge e_4 \, , \, \varepsilon e_1 \wedge e_2 + \overline{\varepsilon} e_3 \wedge e_4 \, .$$

Par conséquent, $\dim_{\mathbb{F}_q} X' = 6$.

ii) On introduit la forme f comme la somme orthogonale des trois formes naturelles suivantes définies sur les trois $\mathbb{F}_q$-plans en somme directe $\{\lambda e_i \wedge e_j + \overline{\lambda} e_k \wedge e_l : \lambda \in \mathbb{F}_{q^2}\}$ (pour $(i, j, k, l) = (1, 2, 3, 4)$, $(1, 3, 4, 2)$ et $(1, 4, 2, 3)$), par les formules suivantes

$$f(\lambda e_i \wedge e_j + \overline{\lambda} e_k \wedge e_l, \mu e_i \wedge e_j + \overline{\mu} e_k \wedge e_l) := \lambda \overline{\mu} + \overline{\lambda} \mu .$$

Remarquons que la restriction de f à chacun de ces trois plans (deux-à-eux orthogonaux) est une forme quadratique non dégénérée de type $-$, donc f est une forme quadratique non dégénérée de type $-$ sur X'.

iii) On dispose de l'action naturelle de $\mathrm{SU}_4(\mathbb{F}_{q^2})$ sur $\bigwedge^2 X$ définie par $g \cdot (x \wedge y) := g(x) \wedge g(y)$. Or on vérifie que $\mathrm{SU}_4(\mathbb{F}_{q^2})$ est engendré par les matrices de permutation des vecteurs e_i, ainsi que par les matrices correspondant aux applications définies par $e_1 \mapsto \alpha e_1 + \beta e_2$, $e_2 \mapsto -\overline{\beta} e_1 + \overline{\alpha} e_2$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_{q^2}$ tels que $\alpha \overline{\alpha} + \beta \overline{\beta} = 1$. Or un calcul élémentaire assure que ces éléments de $\mathrm{SU}_4(\mathbb{F}_{q^2})$ préservent tous le sous-espace X' de $\bigwedge^2 X$, et qu'ils laissent également la forme quadratique f invariante. Par conséquent, l'action susmentionnée de $\mathrm{SU}_4(\mathbb{F}_{q^2})$ sur $\bigwedge^2 X$ induit un morphisme de groupes

$$\rho : \mathrm{SU}_4(\mathbb{F}_{q^2}) \to \mathrm{O}(X', f) .$$

iv) On voit que $\mathrm{Ker}(\rho) = \{\pm I_4\}$, et le calcul du sous-groupe dérivé de $\mathrm{SU}_4(\mathbb{F}_{q^2})$ assure que le morphisme ρ induit un morphisme de groupes injectif

$$\overline{\rho} : \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_{q^2}) \to \mathrm{P}\Omega(X', f) \cong \mathrm{P}\Omega_6^-(\mathbb{F}_q)\,.$$

Un calcul de cardinaux assure alors que le morphisme $\overline{\rho}$ est un isomorphisme.

Exercice 15 : $\star\star\star$
Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$, V un K-espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique sur V.

a) On note $I(q)$ l'idéal bilatère de $T(V)$ engendré par les éléments de la forme $v \otimes v - q(v)$ pour $v \in V$. On pose $C(q) := T(V)/I(q)$. Montrer que $C(q)$ est une K-algèbre, canoniquement isomorphe à $\bigwedge V$ comme K-espace vectoriel, et admettant une décomposition $C(q) = C(q)^+ \oplus C(q)^-$ définie par le degré des éléments de $T(V)$.

b) Vérifier $C(q)^+$ est une sous-algèbre de $C(q)$.

c) Montrer que $\dim_K C(q) = 2^n$ et donner une base de $C(q)$ comme K-espace vectoriel.

d) Montrer que V se plonge naturellement dans $C(q)$.

e) Calculer $C(q)$ lorsque $K = \mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}}(V) \leq 2$. Généraliser au cas où K est quelconque et $\dim_K(V) \leq 1$.

f) Calculer le centre de $C(q)$.

g) On note $\alpha := \mathrm{id}_{C(q)^+} \oplus -\mathrm{id}_{C(q)^-} \in \mathrm{GL}_K(C(q))$ et pour tout $x \in C(q)^\times$, $\rho_x \in \mathrm{End}_K(C(q))$ défini par $\rho_x : z \mapsto \alpha(x)zx^{-1}$. Montrer que cela définit un morphisme de groupes $\rho : C(q)^\times \to \mathrm{GL}_K(C(q))$.

h) On note $\Gamma(V,q) := \{x \in C(q)^\times : \rho_x(V) \subset V\}$. Montrer que $\Gamma(V,q)$ contient les vecteurs non isotropes de (V,q).

i) On suppose q non dégénérée. Montrer que $\mathrm{Ker}(\rho) = K^*$.

j) Montrer qu'il existe un unique $t \in \mathrm{GL}_K(C(q))$ tel que $t_{|V} = \mathrm{id}_V$ et $t(xy) = t(y)t(x)$ pour tout $x, y \in C(q)$.

k) Pour tout $x \in C(q)$, on pose $\overline{x} := t(\alpha(x))$. Montrer que la formule $N(x) := x\overline{x}$ définit une application $N : C(q) \to C(q)$ induisant un morphisme de groupes $N : \Gamma(V,q) \to K^*$.

l) On suppose q non dégénérée. Montrer que $\mathrm{Im}\,(\rho) = \mathrm{O}(V,q)$.

m) On suppose q non dégénérée. Montrer que l'on dispose d'un morphisme naturel $\theta : \mathrm{O}(V,q) \to K^*/(K^*)^2$.

n) On suppose q non dégénérée et isotrope. Montrer que $\theta : \mathrm{SO}(V,q) \to K^*/(K^*)^2$ est surjectif.

o) On suppose q non dégénérée. On note $\mathrm{Pin}(V,q) := \mathrm{Ker}(N) = \{g \in \Gamma(V,q) : N(g) = 1\}$ et $\mathrm{Spin}(V,q) := \{g \in \mathrm{Pin}(V,q) : \det(\rho(g)) = 1\}$. Montrer que l'on a des suites exactes de groupes :

$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathrm{Pin}(V,q) \xrightarrow{\rho} \mathrm{O}(V,q) \xrightarrow{\theta} K^*/(K^*)^2$$

et

$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathrm{Spin}(V,q) \xrightarrow{\rho} \mathrm{SO}(V,q) \xrightarrow{\theta} K^*/(K^*)^2\,.$$

p) On suppose $K = \mathbb{R}$ et q non dégénérée et non définie. Montrer que $\theta : \mathrm{SO}(V,q) \to K^*/(K^*)^2$ est surjective.

q) Montrer les isomorphismes suivants : $\mathrm{Spin}_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$, $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_4(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_5(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_6(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$, ainsi que $\mathrm{Spin}_2(\mathbb{R}) \cong \mathrm{U}_1(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_4(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

Solution de l'exercice 15.

a) Il est clair que $C(q)$ est naturellement une K-algèbre. Remarquons que contrairement à $\bigwedge(V)$ ou $S(V)$, l'algèbre $C(q)$ n'est en général pas naturellement $\mathbb{Z}$-graduée, puisque l'idéal $I(q)$ n'est pas homogène. On peut écrire un isomorphisme canonique de K-espaces vectoriels $C(q) \xrightarrow{\sim} \bigwedge V$ en toute caractéristique, mais cela demande quelques vérifications un peu longues. On donnera une autre version de cet isomorphisme (moins canonique) à la question c). La K-algèbre $T(V)$ est munie d'une décomposition en somme directe $T(V) = T(V)^+ \oplus T(V)^-$, où $T(V)^+$ (resp. $T(V)^-$) est le sous-espace vectoriel formé des éléments de degré pair (resp. impair). Or l'idéal $I(q)$ est engendré par des éléments de degré pair, donc cet idéal admet lui aussi une décomposition $I(q) = I(q)^+ \oplus I(q)^-$, où $I(q)^\pm := I(q) \cap T(q)^\pm$. Il est alors clair que le quotient $C(q) = T(V)/I(q)$ admet lui aussi une décomposition (en somme directe de sous-K-espaces vectoriels) de la forme $C(q) = C(q)^+ \oplus C(q)^-$, où $C(q)^+$ (resp. $C(q)^-$) est l'image de $T(V)^+$ (resp. $T(V)^-$) dans $C(q)$.

b) Comme $T(V)^+$ est une sous-K-algèbre de $T(V)$, on en déduit immédiatement que $C(q)^+$ est une sous-K-algèbre de $C(q)$. Remarquons également que $C(q)^-$ n'est pas une sous-algèbre de $C(q)$, mais que $C(q)^-$ est stable par multiplication par un élément de $C(q)^+$. On dit que $C(q)$ est une K-algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée.

c) Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de V. Par définition de $C(q)$, on a la relation suivante : pour tous $v, w \in C(q)$, $v \cdot w + w \cdot v = 2b(v, w)$. Par conséquent, tout produit $e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_r}$ peut se réécrire sous la forme d'une combinaison linéaire de produits $e_{j_1} \cdot \dots \cdot e_{j_s}$ avec $j_1 < \dots < j_s$. On en déduit donc que la famille $(e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_r})_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n}$ est une famille génératrice de $C(q)$ comme K-espace vectoriel. Donc $\dim_K C(q) \leq 2^n$.

Montrons que c'est une égalité. Pour cela, on démontre le fait suivant : si (V, q) et (V', q') sont deux espaces quadratiques, alors on a un isomorphisme canonique de K-algèbres graduées $C(q \oplus^\perp q') = C(q) \otimes^{\mathrm{su}} C(q')$. En effet, on dispose d'une application linéaire $\varphi : V \oplus V' \to C(V) \otimes C(q')$ définie par $\varphi(v \oplus v') := v \otimes 1 + 1 \otimes v'$. Or on a la relations suivante : pour tout $(v, v') \in V \times V'$, on a $\varphi(v \oplus v')^2 = q(v) + q(v') = (q \oplus^\perp q')(v \oplus v')$, donc la définition de $C(q \oplus^\perp q')$ assure que l'application φ se prolonge en un morphisme de K-algèbres graduées

$$\overline{\varphi} : C(q \oplus^\perp q') \to C(q) \otimes C(q') \, .$$

Réciproquement, les inclusions de V et V' dans $V \oplus V'$ assurent l'existence de morphismes de K-algèbres graduées $C(q), C(q') \to C(q \oplus^\perp q')$, dont on déduit (ce qui demande un petit calcul) un morphisme de K algèbres graduées $\psi : C(q) \otimes^{\mathrm{su}} C(q') \to C(q \oplus^\perp q')$. Il est alors immédiat de constater que ψ est la réciproque de $\overline{\varphi}$, ce qui conclut la preuve du fait énoncé plus haut.

Remarquons au passage que pour la calcul de la dimension et d'une base (voir ci-dessous), on a seulement besoin de la surjectivité de $\overline{\varphi}$, laquelle est évidente puisque les éléments $x \otimes 1$ et $1 \otimes x$, avec $x \in V$, $x' \in V'$, engendrent $C(q) \otimes^{\mathrm{su}} C(q')$ comme K-algèbre, et ces éléments sont clairement dans l'image de $\overline{\varphi}$.

Pour finir le calcul de la dimension, on raisonne par récurrence sur la dimension n de V. Si $n = 1$, on a $v = K$ et $q(x) = ax^2$ pour un certain $a \in K$. Si $a = 0$, on a $C(q) = \bigwedge K = K \oplus K$ qui est bien de dimension 2, et si $a \neq 0$, on voit que $T(K) \cong K[X]$ et il est évident que $C(q)$ est l'idéal de $K[X]$ engendré par $(X^2 - a)$, donc $C(q) \cong K[X]/(X^2 - a)$, qui est bien de dimension 2 sur K. Si $n > 1$, on a de nouveau deux cas : soit $q = 0$ et $C(q) \cong \bigwedge V$, auquel cas $\dim_K C(q) = 2^n$, soit $q \neq 0$, il existe $v \in V$ tel que $q(v) \neq 0$, et $V = Kv \oplus^\perp (Kv)^\perp$, donc $C(q) \cong C(q_{|_{Kv}}) \otimes C(q_{|_{(Kv)^\perp}})$, et l'hypothèse de récurrence assure que $\dim_K C(q) = 2.2^{n-1} = 2^n$.

Finalement, $\dim_K C(q) = 2^n$, et la famille génératrice précédente formée des $(e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_r})_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n}$ est bien une base de $C(q)$.

Remarque : il est désormais facile d'exhiber un isomorphisme de K-espaces vectoriels entre $C(q)$ et $\bigwedge V$: il suffit de faire correspondre la base $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r})$ de $\bigwedge V$ avec la base $(e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_r})$ de $C(q)$...

d) On dispose du morphisme naturel $V \to T(V) \to C(q)$. On a montré à la question précédente que si (e_i) est une base de V, alors les images des vecteurs e_i dans $C(q)$ forment une famille libre. Cela assure que le morphisme naturel $V \to C(q)$ est bien injectif.

e) — On suppose d'abord $K = \mathbb{R}$. Si $n = 0$, il est clair que $C(q) \cong \mathbb{R}$. Si $n = 1$, on a montré à la question précédente que deux cas se présentaient : soit $q = 0$, et $C(q) \cong \bigwedge \mathbb{R} \cong K[X]/(X^2)$, soit $q \neq 0$ (disons $q(x) = ax^2$) et $C(q) \cong \mathbb{R}[X]/(X^2 - a)$; dans ce dernier cas, on a deux possibilités : si $a > 0$, alors $C(q) \cong \mathbb{R}^2$, et si $a > 0$, $C(q) \cong \mathbb{C}$. Enfin, si $n = 2$, limitons-nous aux formes quadratiques non dégénérées : il y a trois cas (trois signatures possibles). Si $\mathrm{sign}(q) = (2, 0)$, alors $C(q) \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Si $\mathrm{sign}(q) = (1, 1)$, alors $C(q) \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Si $\mathrm{sign}(q) = (0, 2)$, alors $C(q) \cong \mathbf{H}$, où $\mathbf{H}$ est l'algèbre des quaternions de Hamilton.

— Désormais, K est un corps quelconque. Si $n = 0$, on a $C(q) \cong K$. Si $n = 1$, on a trois possibilités : si on note $q(x) = ax^2$, soit $a = 0$ et alors $C(q) \cong \bigwedge K \cong K[X]/(X^2)$, soit $a \in (K^*)^2$ et alors $C(q) \cong K^2$, soit $a \notin (K^*)^2$ et alors $C(q) \cong K[X]/(X^2 - a) \cong K(\sqrt(a))$ est un corps qui est une extension quadratique de K.

f) On note $Z(q)$ le centre de l'algèbre $C(q)$. On fixe une base orthogonale (e_i) de V. Pour toute partie $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$, avec $i_1 < \dots < i_r$, on note $e_I := e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_r}$. Alors pour tout tel I et tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$e_I \cdot e_j = \varepsilon_{I,j} e_j \cdot e_I \,,$$

où $\varepsilon_{I,j} := (-1)^{|I|}$ si $j \notin I$ et $\varepsilon_{I,j} := -(-1)^{|I|}$ si $j \in I$. Soit alors $x = \sum_I x_I e_I \in C(q)$. On a clairement $a \in Z(q)$ si et seulement si $e_j \cdot x = x \cdot e_j$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Soit alors $j \in \{1, \dots, n\}$. En utilisant les relations de commutation susmentionnées, on obtient la caractérisation suivante : $x \cdot e_j = e_j \cdot x$ si et seulement si $x_I = 0$ pour tout I tel que ($|I|$ est pair et $j \in I$) ou ($|I|$ est impair et $j \notin I$). En faisant varier j dans $\{1, \dots, n\}$, on en déduit la dichotomie suivante :

— si n est pair : $x \in Z(q)$ si et seulement si $x_I = 0$ pour tout $I \neq \emptyset$. Donc $Z(q) = Ke_\emptyset \cong K$.

— si n est impair : $x \in Z(q)$ si et seulement si $x_I = 0$ pour tout $I \neq \emptyset$ et $I \neq \{1, \dots, n\}$. Donc $Z(q) = Ke_\emptyset \oplus Ke_{\{1,\dots,n\}} \cong K^2$.

g) Tout d'abord, pour tout $x \in C(q)^\times$, l'application $\rho_x : C(q) \to C(q)$ est bien linéaire, et elle est inversible d'inverse $\rho_{x^{-1}}$. Donc $x \mapsto \rho_x$ définit bien une application $\rho : C(q)^\times \to \mathrm{GL}_K(C(q))$. On voit facilement que c'est un morphisme de groupes en montrant que pour tout $x, y \in C(q)$, on a $\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$.

h) Voir cours, proposition III.6.4.

i) Voir cours, proposition III.6.5.

j) On définit $C'(q)$ comme la K-algèbre opposée à $C(q)$: $C'(q) = C(q)$ comme K-espace vectoriel, et la multiplication $\cdot'$ sur $C'(q)$ est définie par $a \cdot' b := b \cdot a$. Alors l'application naturelle $i : V \to C'(q)$ est une application linéaire telle que $i(x)^2 = q(x)$, donc par définition de $C(q)$, l'application i se prolonge en un morphisme de K-algèbres $i : C(q) \to C'(q)$ En composant ce morphisme avec l'identification $C'(q) \xrightarrow{\sim} C(q)$, on obtient une application linéaire $t : C(q) \to C(q)$ telle que $t_{|V} = \mathrm{id}_V$ et $t(x \cdot y) t(y) \cdot t(x)$. L'unicité de t résulte de la propriété universelle de $C(q)$ qui découle de sa définition. Et l'unicité implique que t est une involution.

k) voir cours, proposition III.6.6.

l) voir cours, proposition III.6.7.

m) voir cours, proposition III.6.8.

n) La forme q étant non dégénérée et isotrope, elle représente tous les éléments de K, i.e. l'application $q : V \to K$ est surjective. Par conséquent, soit $\lambda \in K^*$, il existe $v \in V$ tel que $q(v) = -\lambda$. Alors la question h) assure que $v \in \Gamma(V, q)$, et la définition de N assure que $N(v) = v \cdot (-v) = -q(v) = \lambda$. Mais $\rho(v)$ est une reflexion, donc $\rho(v) \in \mathrm{O}(V, q) \setminus \mathrm{SO}(V, q)$. Il suffit de multiplier v par un vecteur $v' \in V$ tel que $q(v') = -1$ (qui existe) pour obtenir un élément $x := v \cdot v' \in \Gamma(V, q)$ tel que $N(x) = \lambda$ et $\det(\rho(x)) = \det(\rho(v)) \det(\rho(v')) = (-1)(-1) = 1$, donc l'élément $\rho(x) \in \mathrm{SO}(V, q)$ vérifie que $\theta(\rho(x))$ est la classe de $N(x) = \lambda$ dans $K^*/(K^*)^2$. D'où la surjectivité souhaitée.

o) Le morphisme $\mathrm{Pin}(V, q) \to \mathrm{O}(V, q)$ est la composée de l'inclusion $\mathrm{Pin}(V, q) \subset \Gamma(V, q)$ avec le morphisme $\rho : \Gamma(V, q) \to \mathrm{O}(V, q)$. Par conséquent, le noyau de $\mathrm{Pin}(V, q) \to \mathrm{O}(V, q)$ est exactement

$$\mathrm{Ker}(\rho) \cap \mathrm{Pin}(V, q) = X^* \cap \mathrm{Pin}(V, q) = \{x \in K^* : N(x) = 1\} = \{x \in K^* : x^2 = 1\} = \{\pm 1\} \,.$$

Cela assure que la suite suivante (dont les morphismes sont les morphismes naturels)

$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathrm{Pin}(V,q) \xrightarrow{\rho} \mathrm{O}(V,q)$$

est exacte. En outre, soit $y \in \mathrm{Ker}(\theta : \mathrm{O}(V,q) \to K^*/(K^*)^2)$: par surjectivité de ρ (voir question k)), il existe $x \in \Gamma(V,q)$ tel que $\rho(x) = y$. Alors par construction de θ (voir question m)), on a $\theta(y) = N(x) \bmod (K^*)^2$. Comme $\theta(y) = 1 \in K^*/(K^*)^2$, il existe $t \in K^*$ tel que $N(x) = t^2$. Alors on a $\rho(t^{-1}x) = \rho(x) = y$ car $K^* = \mathrm{Ker}(\rho)$ et $N(t^{-1}x) = 1 \in K^*$, donc $t^{-1}x \in \mathrm{Pin}(V,q)$. On a donc montré que $y = \rho(t^{-1}x) \in \rho(\mathrm{Pin}(V,q))$, donc $\mathrm{Ker}(\theta) \subset \rho(\mathrm{Pin}(V,q))$. L'inclusion inverse étant évidente, cela termine la preuve de l'exactitude de la suite

$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathrm{Pin}(V,q) \xrightarrow{\rho} \mathrm{O}(V,q) \xrightarrow{\theta} K^*/(K^*)^2 \,.$$

La seconde suite exacte se déduit immédiatement de celle-ci, en remarquant que $\mathrm{Spin}(V,q) = \mathrm{Pin}(V,q) \cap \rho^{-1}(\mathrm{SO}(V,q))$.

p) C'est une conséquence directe de la question n).

q) Les détails sont laissés au lecteur courageux...