

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (PARIS 7)
ÉCOLE DOCTORALE DE PARIS CENTRE

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

Max REMPEL

POSITIVITÉ DES CYCLES DANS LES VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES

dirigée par Olivier DEBARRE

Soutenue le 28 septembre 2012 devant le jury composé de :

Samuel BOISSIÈRE	Université Poitiers	Rapporteur
Sébastien BOUCKSOM	Université Paris VI	Examineur
Olivier DEBARRE	École Normale Supérieure	Directeur de thèse
Stéphane DRUEL	Université Grenoble I	Examineur
Daniel HUYBRECHTS	Universität Bonn	Rapporteur
Alessandra SARTI	Université Poitiers	Examineur
Claire VOISIN	Université Paris VI	Examineur

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Olivier Debarre, sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. Pendant quatre ans il a su me guider avec son enthousiasme et ses nombreux conseils. Je le remercie pour sa disponibilité, ses encouragements et pour sa grande patience.

Je remercie également Samuel Boissière et Daniel Huybrechts pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse et pour l'attention qu'ils ont portée à mon travail.

Mes remerciements vont aussi à Sébastien Boucksom, Stéphane Druel, Alessandra Sarti et Claire Voisin qui ont accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Pour la préparation de cette thèse, j'ai eu la chance de travailler au DMA de l'ENS. Je tiens à remercier toute l'équipe du DMA et en particulier mes collègues du "toit" pour l'ambiance chaleureuse pendant ces quatre ans.

Ma gratitude va aussi à mes amis avec qui j'ai partagé des bons moments pendant mes études à Francfort, Amiens et Strasbourg.

Je remercie ma famille pour son soutien constant sans lequel cette thèse n'aurait pas été possible.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à Kira pour son soutien et sa patience pendant ces dernières années.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Motivation	7
1.2	Résultats principaux et plan	8
1.2.1	La puissance d'une variété abélienne	8
1.2.2	La variété de Fano d'une cubique	10
1.2.3	Produit d'une courbe	12
2	La puissance d'une variété abélienne	14
2.1	Introduction	14
2.2	La structure de l'algèbre $N^\bullet(A^e)$	16
2.2.1	Le groupe de Hodge d'une variété abélienne	16
2.2.2	Classes de Hodge sur la puissance d'une variété abélienne	17
2.2.3	Générateurs et relations pour les classes de Hodge	18
2.2.3.1	Un résultat de Tankeev et un résultat de Thompson	18
2.2.3.2	Générateurs explicites	20
2.2.4	Le cas $A \times A$	23
2.3	Classes positives	26
2.3.1	Préliminaires	26
2.3.1.1	Notions de positivité sur une variété abélienne	26
2.3.1.2	Une conjecture de Harvey, Knapp et Lawson	28
2.3.1.3	Les résultats de Debarre, Ein, Lazarsfeld et Voisin	29
2.3.2	Le cône $S^k \text{Psef}^1(A^e)$	30
2.3.2.1	Diviseurs pseudoeffectifs	31
2.3.2.2	Produits de diviseurs pseudoeffectifs	31
2.3.3	Le cône semipositif	33
2.3.3.1	Décomposition des formes hermitiennes	34
2.3.3.2	Spéctraèdres	36
2.3.3.3	Le cas $A \times A$	37
2.3.4	Comparaison des cônes	42
2.3.4.1	Classes pseudoeffectives et classes semipositives	42
2.3.4.2	Classes numériquement effectives et classes pseudoeffectives	46
3	La variété de Fano d'une cubique	50
3.1	Introduction	50
3.2	Généralités	52
3.2.1	Variétés hyperkählériennes	52
3.2.2	Les conjectures de Hassett et Tschinkel	53
3.2.2.1	Le cône des diviseurs pseudoeffectifs	53
3.2.2.2	Le cône des 1-cycles	54
3.2.2.3	Le cône des classes de diviseurs nef	55
3.2.3	La face isotrope	56

3.3	La variété des droites d'une cubique	57
3.3.1	Les résultats de Beauville et Donagi	57
3.3.1.1	La variété de Fano comme déformation d'un schéma de Hilbert	57
3.3.1.2	L'application d'Abel-Jacobi	58
3.3.2	Classes algébriques sur la variété de Fano	59
3.3.2.1	Cubiques spéciales	59
3.3.2.2	Classes algébriques sur la variété de Fano	60
3.3.3	Classification des droites et un endomorphisme rationnel	61
3.3.3.1	Classification des droites	61
3.3.3.2	L'endomorphisme rationnel de Voisin	62
3.4	Classes positives de codimension 1 et 2	63
3.4.1	Cubiques générales	63
3.4.1.1	Classes induites par la Grassmannienne et la face isotrope	64
3.4.1.2	L'endomorphisme rationnel de Voisin	65
3.4.1.3	Restrictions sur $\text{Psel}^2(F)$	67
3.4.2	Cubiques contenant un plan	69
3.4.2.1	Les diviseurs D_P et D_Q	69
3.4.2.2	Classes nef et classes de courbes	72
3.4.2.3	Géométrie birationnelle	73
3.4.2.4	Automorphismes de F	75
3.4.2.5	La face isotrope	77
3.4.3	Cubiques contenant un scroll cubique	78
3.4.3.1	Les résultats de Hassett et Tschinkel	79
3.4.3.2	Automorphismes de F	82
3.4.3.3	La face isotrope	85
3.4.4	Cubiques pfaffiennes	85
3.4.4.1	Le schéma de Hilbert $S^{[2]}$	86
3.4.4.2	L'isomorphisme de Beauville et Donagi	87
3.4.4.3	Classes nef et classes de courbes	87
3.4.4.4	Classes pseudoeffectives et géométrie birationnelle	88
3.4.4.5	La face isotrope	90
4	Produit d'une courbe	91
4.1	Introduction	91
4.1.1	Une question de Kollár	91
4.1.2	La méthode de Vojta	92
4.2	Préliminaires	94
4.3	Classes symétriques sur $X \times X$	95
4.3.1	Le produit symétrique d'une courbe	95
4.3.2	Classes nef symétriques	96
4.4	Construction de classes nef d'après Vojta	97
4.4.1	Restrictions pour le cône pseudoeffectif	97
4.4.2	Une section affine	100
4.4.3	Classes nef	101
4.4.4	Représentation des classes nef dans la section affine	102
5	Bibliographie	106

1. Introduction

Cette introduction est composée de deux parties. Dans la première partie, on donne une motivation des problèmes traités dans cette thèse et dans la deuxième partie, on présente les résultats principaux obtenus chapitre par chapitre.

1.1 Motivation

Soit X une variété algébrique complexe projective de dimension n et posons

$$N_{\mathbb{Z}}^k(X) := H^{k,k}(X, \mathbb{C}) \cap H^{2k}(X, \mathbb{Z})$$

et

$$N^k(X) := N_{\mathbb{Z}}^k(X) \otimes \mathbb{R}$$

pour $k \in \{0, \dots, n\}$. Dans les cas qui nous intéressent, la conjecture de Hodge est vraie et équivalence numérique coïncide avec équivalence homologique, de sorte que l'on peut voir $N^k(X)$ comme le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par les classes numériques des sous-variétés de X . On définit différentes notions de positivité qui donnent chacune lieu à un cône convexe saillant dans $N^k(X)$.

Définition 1.1.0.1. Une classe $\beta \in N^k(X)$ est dite *effective* s'il existe des sous-variétés Z_i de X de codimension k telles que $\beta = \sum_{i=1}^m a_i [Z_i]$ avec $a_i \in \mathbb{R}^+$. Le cône des classes effectives est noté $\text{Eff}^k(X)$. On définit le cône des classes *pseudoeffectives* $\text{Psef}^k(X) \subset N^k(X)$ comme l'adhérence du cône $\text{Eff}^k(X)$. Le cône des classes *numériquement effectives (nefs)* $\text{Nef}^{n-k}(X) \subset N^{n-k}(X)$ est défini comme dual du cône $\text{Psef}^k(X)$ par rapport au produit d'intersection. Une classe dans l'intérieur de $\text{Psef}^k(X)$ est dite *big*. Les notions *effectif*, *pseudoeffectif* et *nef* sont des notions de *positivité*.

Pour étudier des cônes dans $N^k(X)$, on a d'abord besoin de résoudre le problème suivant.

Problème 1. *Déterminer la dimension et des générateurs du \mathbb{R} -espace vectoriel $N^k(X)$.*

Parfois, il est plus facile de regarder la dimension au lieu de la codimension des cycles; dans ce cas, on écrit $N_k(X) := N^{n-k}(X)$, $\text{Psef}_k(X) := \text{Psef}^{n-k}(X)$, etc. pour $k \in \{0, \dots, n\}$.

En codimension 1 et $n - 1$, les cônes de classes positives ont été étudiés dans nombreux travaux et sont liés à des questions classiques. Le cône fermé $\text{Psef}_1(X)$ engendré par les classes des courbes joue un rôle central dans la classification birationnelle des variétés algébriques. Plus précisément, certains rayons extrémaux de $\text{Psef}_1(X)$ correspondent à une contraction birationnelle $X \rightarrow X'$. Le cône $\text{Psef}^1(X)$ est le cône fermé engendré par les diviseurs effectifs, de sorte que l'étude de ce cône revient au problème de déterminer les fibrés en droites sur X admettant une section

globale non triviale. L'intérieur du cône $\text{Nef}^1(X)$ est le cône engendré par les classes des diviseurs amples, de sorte que l'on a une inclusion

$$\text{Nef}^1(X) \subset \text{Psef}^1(X) \quad (1.1)$$

et donc $\text{Nef}_1(X) \subset \text{Psef}_1(X)$ par dualité. Par un résultat de Boucksom, Demailly, Paun et Peternell [14, Thm. 0.2], $\text{Nef}_1(X)$ est engendré par les classes des courbes qui bougent dans une famille qui couvre X . En codimension 1 et $n-1$, on a donc de belles interprétations géométriques des cônes en question. Cependant, il est souvent difficile de déterminer ces cônes dans des cas particuliers.

Problème 2. *Déterminer les cônes de classes positives en codimension 1 et $n-1$ dans des cas particuliers.*

En codimension supérieure, i.e., pour $2 \leq k \leq n-2$, l'étude des cônes de classes positives a juste récemment été abordée dans [21], [67] et [17]. Dans [21], Fulger détermine les cônes des classes pseudoeffectives pour un fibré vectoriel projectif E sur une courbe lisse C . De plus, il montre que l'on a

$$\text{Nef}^k(E) \subset \text{Psef}^k(E)$$

avec égalité pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ si et seulement si E est semistable [21, Prop. 1.5]¹. D'autre part, Debarre, Ein, Lazarsfeld et Voisin montrent dans [17] que l'on a

$$\text{Psef}^2(A \times A) \subsetneq \text{Nef}^2(A \times A)$$

pour une surface abélienne A principalement polarisée très générale. L'inclusion (1.1) ne se généralise donc pas en codimension supérieure.

Problème 3. *Déterminer les cônes de classes positives en codimension supérieure et étudier la relation entre les cônes $\text{Psef}^k(X)$ et $\text{Nef}^k(X)$ dans des cas particuliers.*

Le but de cette thèse est d'étudier

- les problèmes 1 et 3 pour la puissance A^e d'une variété abélienne principalement polarisée très générale A (chapitre 2);
- les problèmes 1 - 3 pour la variété F paramétrant les droites dans une cubique lisse X dans \mathbb{P}^5 (chapitre 3);
- le problème 2 pour le produit $C \times C$ d'une courbe très générale C de genre g (chapitre 4).

1.2 Résultats principaux et plan

Cette thèse est composée de trois chapitres indépendants, chaque chapitre consacré à l'étude des cônes de classes positives dans un cas particulier. On donne un résumé, chapitre par chapitre, des résultats principaux obtenus. Pour un plan plus détaillé de chaque chapitre, on renvoie à l'introduction du chapitre respectif.

1.2.1 La puissance d'une variété abélienne

Dans le chapitre 2, on regarde la puissance A^e d'une variété abélienne principalement polarisée très générale A de dimension n . Écrivons $A = U/\Gamma$, où U est un espace vectoriel complexe de dimension n et Γ est un réseau dans U . Le produit d'intersection munit $\mathbf{N}^\bullet(A^e) := \bigoplus_{k=0}^{en} \mathbf{N}^k(A^e)$ d'une structure de \mathbb{R} -algèbre et l'on a une action canonique de $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ sur $\mathbf{N}^\bullet(A^e)$. Par un résultat de Tankeev [61],

¹. Pour Fulger, une classe est nef si elle est pseudoeffective et nef dans notre sens. Mais on vérifie que ces deux notions coïncident dans le cas qu'il regarde.

$N^\bullet(A^e)$ est engendré par les classes des cycles de codimension 1. On a donc un morphisme surjectif naturel $\mathbf{S}^\bullet N^1(A^e) \rightarrow N^\bullet(A^e)$, où l'on note $\mathbf{S}^\bullet N^1(A^e)$ l'algèbre symétrique engendrée par $N^1(A^e)$. En utilisant que $N^\bullet(A^e)$ admet une description comme un certain espace d'invariants on obtient, concernant le problème 1 :

Proposition 1.2.1.1. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n . L'idéal I tel que*

$$N^\bullet(A^e) = \mathbf{S}^\bullet N^1(A^e)/I,$$

i.e., l'idéal des relations dans $\mathbf{S}^\bullet N^1(A^e)$, est engendré par des classes de cycles de codimension $n + 1$ et l'on peut en décrire des générateurs explicitement. En particulier, l'application

$$\mathbf{S}^k N^1(A^e) \rightarrow N^k(A^e)$$

est un isomorphisme si et seulement si $k \in \{0, \dots, n\}$.

Concernant l'étude des cônes de classes positives, on remarque d'abord que l'intersection de deux classes pseudoeffectives est encore pseudoeffective sur une variété abélienne, de sorte que l'on a une inclusion

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) \subset \text{Psef}^k(A^e) \subset \text{Nef}^k(A^e),$$

où $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ est le cône engendré par les produits des diviseurs pseudoeffectifs. Remarquons que cela entraîne $\text{Psef}^1(A^e) = \text{Nef}^1(A^e)$. Ce cône est bien connu, de sorte que l'on s'intéresse aux cônes dans $N^k(A^e)$ pour $2 \leq k \leq en - 2$. Le cône $\text{Psef}^1(A^e)$ est engendré par l'orbite d'une certaine classe sous l'action de $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ qui préserve les différents cônes. Cela induit une description de $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ en fonction de générateurs. Alors que l'on voit pas de moyen de décrire le cône $\text{Psef}^k(A^e)$ directement, on peut introduire un cône auxiliaire : on peut voir une classe $\alpha \in N^k(A^e)$ comme une forme hermitienne sur $\bigwedge^k U^e$, et une classe dont la forme hermitienne est semipositive est dite semipositive. Si l'on note $\text{Semi}^k(A^e)$ le cône engendré par ces classes, on a

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) \subset \text{Psef}^k(A^e) \subset \text{Semi}^k(A^e) \subset \text{Nef}^k(A^e)$$

pour $k \in \{0, \dots, en\}$. Si l'on arrive à calculer les matrices représentant les formes hermitiennes associées aux classes dans $N^k(A^e)$, cela fournit des inéquations définissant $\text{Semi}^k(A^e)$. La comparaison des cônes $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ et $\text{Semi}^k(A^e)$ se ramène ainsi à un problème de géométrie convexe, la comparaison d'un cône défini par des générateurs et d'un cône défini par des inéquations. En faisant des calculs explicites et en appliquant un argument de géométrie convexe, Debarre, Ein, Lazarsfeld et Voisin montrent ainsi que l'on a [17, Thm. 4.1]

$$\mathbf{S}^2 \text{Psef}^1(A^2) = \text{Semi}^2(A^2), \tag{1.2}$$

ce qui fournit des inéquations définissant $\text{Psef}^2(A^2)$. Si l'on veut généraliser le résultat (1.2) en codimension supérieure, il se posent deux problèmes : premièrement, les matrices des formes hermitiennes deviennent très rapidement beaucoup plus grandes, ce qui rend les calculs très pénibles ; deuxièmement, l'argument de géométrie convexe qui permet de déduire (1.2) ne marche plus en codimension supérieure. On résout le premier problème en donnant une description plus conceptuelle des matrices représentant les formes hermitiennes respectives, ce qui nous ramène essentiellement à

1. décomposer $\bigwedge^k U^{\oplus e}$ en $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ -modules irréductibles ;
2. calculer les matrices représentant l'action de $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ sur les $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ -modules irréductibles apparaissant dans $\bigwedge^k U^{\oplus e}$.

Cela nous permet de construire une classe semipositive dans $\text{Semi}^3(A^2)$ qui n'appartient pas à $\mathbf{S}^3(\text{Psef}^1(A^2))$ pour $n \geq 3$. En appliquant un argument de récurrence, on trouve que l'égalité 1.2 ne tient plus en codimension supérieure.

Théorème 1.2.1.2. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension $n \geq 3$ et soit $e \geq 2$. On a*

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) \subsetneq \text{Semi}^k(A^e) \quad (1.3)$$

pour $3 \leq k \leq n$. Lorsque $e = 2$, les rayons extrémaux du cône $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^2)$ sont aussi extrémaux dans le cône $\text{Semi}^k(A^2)$ pour $2 \leq k \leq n$.

Concernant la comparaison des cônes $\text{Psef}^k(A^e)$ et $\text{Nef}^k(A^e)$, Debarre, Ein, Lazarsfeld et Voisin montrent par un calcul direct que l'on a $\text{Psef}^2(A^2) \subsetneq \text{Nef}^2(A^2)$ pour A une surface abélienne principalement polarisée très générale [17, Prop. 4.4]. Si l'on veut généraliser ce résultat, il se pose le problème que le cône $\text{Nef}^2(A^e)$ est défini comme le dual de $\text{Psef}^{en-2}(A^e)$ que l'on ne sait pas décrire explicitement. En utilisant la structure de $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ -module de $\mathbf{N}^\bullet(A^2)$ et la représentation des cônes $\text{Semi}^k(A^2)$ en fonction de matrices, on construit une classe dans $\text{Nef}^k(A^2)$ qui n'appartient pas à $\text{Semi}^k(A^2)$ pour tout $2 \leq k \leq 2n - 2$ et $n \geq 2$. Comme $\text{Psef}^k(A^e) \subset \text{Semi}^k(A^e)$, un argument de récurrence nous donne alors le théorème suivant.

Théorème 1.2.1.3. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n et soit $e \geq 2$. On a*

$$\text{Psef}^k(A^e) \subsetneq \text{Nef}^k(A^e)$$

pour $2 \leq k \leq en - 2$.

1.2.2 La variété de Fano d'une cubique

Dans le chapitre 3, on étudie la variété F paramétrant les droites sur une cubique lisse X dans \mathbb{P}^5 . La variété F est dite la *variété de Fano* de X ; elle est lisse de dimension 4.

Par un résultat de Hassett [25], l'espace de modules des cubiques lisses \mathcal{C} admet une famille dénombrable de diviseurs irréductibles \mathcal{C}_d qui paramètrent les cubiques admettant une sous-variété dont la classe de (co)homologie n'est pas un multiple d'une intersection complète. Le diviseur \mathcal{C}_8 correspond par exemple aux cubiques contenant un plan et le diviseur \mathcal{C}_{12} correspond aux cubiques contenant un scroll cubique. Concernant le problème 1, on obtient comme résultat préliminaire (pour $k = 1$, c'est bien connu) :

Proposition 1.2.2.1. *Si X est générale, on a*

$$\mathbf{N}^1(F) = \mathbb{R} s_1 \quad , \quad \mathbf{N}^2(F) = \langle s_1^2, c_2(F) \rangle,$$

où s_1 est une certaine section hyperplane de F . Lorsque X est générale dans un diviseur $\mathcal{C}_d \subset \mathcal{C}$, il existe $\tau \in \mathbf{N}^1(F)$ tel que

$$\mathbf{N}^1(F) = \langle s_1, \tau \rangle \quad , \quad \mathbf{N}^2(F) = \langle s_1^2, s_1 \tau, \tau^2, c_2(F) \rangle.$$

Dans [11], Beauville et Donagi montrent que la variété de Fano d'une cubique pfaffienne générale, i.e., d'une cubique générale dans $\mathcal{C}_{14} \subset \mathcal{C}$, est isomorphe à un schéma de Hilbert $S^{[2]}$ paramétrant les sous-schémas de longueur 2 d'une surface K3 S . Cela entraîne que toute variété de Fano d'une cubique est une variété hyperkählérienne (cf. définition 3.2.1.1) équivalente par déformation à $S^{[2]}$. Comme F

est hyperkählérienne, la cohomologie $H^2(F, \mathbb{Z})$ est munie d'une forme quadratique entière, dite forme de Beauville (par dualité, on obtient une forme quadratique à valeurs rationnelles sur $H^{2n-2}(F, \mathbb{Z})$). Dans [27], Hassett et Tschinkel donnent une description conjecturale des cônes de classes positives dans $N^1(F)$ et $N_1(F)$ en fonction de cette forme quadratique. Ces conjectures ont été vérifiées par Hassett et Tschinkel pour la variété de Fano d'une cubique générale contenant un scroll cubique [29]. Concernant la positivité en codimension 1 resp. 3, notre résultat principal est la vérification de ces conjectures pour la variété de Fano d'une cubique générale contenant un plan et pour la variété de Fano d'une cubique pfaffienne générale.

Pour les cubiques générales contenant un plan P , le point clé est la construction de deux diviseurs premiers et une étude détaillée de leur géométrie, où l'on se sert d'une manière essentielle des résultats de Voisin obtenus dans [63]. Ces deux diviseurs premiers sont construits comme suit : soit $X \subset \mathbb{P}^5$ une cubique générale contenant un plan P et soit $L \subset \mathbb{P}^5$ un espace linéaire de dimension 3 contenant P . Alors on a $L \cap X = P \cup Q$, où Q est une quadrique dans \mathbb{P}^3 . On obtient deux diviseurs premiers D_P et D_Q paramétrant un certain ensemble de droites intersectant P resp. Q . Avec ces notations le résultat principal peut être formulé comme suit :

Théorème 1.2.2.2. *Soit $X \subset \mathbb{P}^5$ une cubique générale contenant un plan P et soit F la variété de Fano paramétrant les droites sur X . On a*

$$\begin{aligned} \text{Psef}^1(F) &= \mathbb{R}^+[D_P] + \mathbb{R}^+[D_Q], \\ \text{Nef}^1(F) &= \mathbb{R}^+(2[D_P] + 3[D_Q]) + \mathbb{R}^+(2[D_P] + [D_Q]). \end{aligned}$$

Le diviseur D_P est fibré en coniques au-dessus d'une surface K3 et si l'on note c la classe d'une telle conique et l la classe d'une droite dans P , on a

$$\text{Psef}_1(F) = \mathbb{R}^+ l + \mathbb{R}^+ c.$$

Regardons maintenant la variété de Fano F d'une cubique pfaffienne générale X . Dans ce cas, F est isomorphe à un schéma de Hilbert $S^{[2]}$, de sorte que la géométrie de F est d'un côté déterminée par la géométrie de X et d'autre part, on obtient des informations sur la géométrie de F en regardant F comme un schéma de Hilbert $S^{[2]}$. En utilisant ces deux points de vue, on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.2.2.3. *Soit X une cubique pfaffienne générale et soit F la variété de Fano de X . Alors il existe deux diviseurs premiers E_4 et E_5 dans F tels que tous les deux sont fibrés en courbes rationnelles lisses au-dessus d'une surface K3 générale de degré 14. Soit R_4 la classe d'une fibre dans E_4 et R_5 la classe d'une fibre dans E_5 . Alors on a*

$$\begin{aligned} \text{Psef}_1(F) &= \mathbb{R}^+ R_4 + \mathbb{R}^+ R_5, \\ \text{Psef}^1(F) &= \mathbb{R}^+[E_4] + \mathbb{R}^+[E_5], \\ \text{Nef}^1(F) &= \mathbb{R}^+([E_4] + 8[E_5]) + \mathbb{R}^+(8[E_4] + 2[E_5]). \end{aligned}$$

Concernant l'étude des classes positives en codimension 2, on obtient quelques résultats partiels dont le point de départ est un argument de Voisin [67, Prop. 2.4], qui montre que le cône fermé engendré par les classes des sous-variétés lagrangiennes de F (cf. définition 3.2.1.1) est une face de $\text{Psef}^2(F)$ (cf. définition 3.2.3.2). Pour une cubique X générale, $N^2(F)$ est de dimension 2, de sorte que la face lagrangienne correspond à un des deux rayons extrémaux.

Proposition 1.2.2.4. *Soit X une cubique générale contenant un plan, ou une cubique générale contenant un scroll cubique, ou une cubique pfaffienne générale. Soit F la variété de Fano de X . Alors la face isotrope de $\text{Psef}^2(F)$ est de dimension 3, c'est-à-dire de dimension maximale.*

Concernant la comparaison des cônes $\text{Psef}^2(F)$ et $\text{Nef}^2(F)$, on a la proposition suivante :

Proposition 1.2.2.5. *Soit X une cubique générale et F la variété de Fano de X . Alors on a*

$$\text{Psef}^2(F) \subset \text{Nef}^2(F) \tag{1.4}$$

et

$$\text{Eff}^2(F) \subsetneq \text{Nef}^2(F).$$

On obtient ce résultat en montrant qu'une certaine classe n'est pas effective et l'on conjecture que l'inclusion (1.4) est également stricte.

1.2.3 Produit d'une courbe

Dans le chapitre 4, on regarde le produit $X \times X$ d'une courbe générale X de genre g . Comme on a juste le cas de codimension 1, on écrit $\text{Psef}(X \times X)$ (resp. $\text{Nef}(X \times X)$) au lieu de $\text{Psef}^1(X \times X)$ (resp. $\text{Nef}^1(X \times X)$). Soit Δ la classe de la diagonale et soit $x_i, i \in \{1, 2\}$, la classe d'une fibre de la projection $X \times X \rightarrow X$ sur le i -ème facteur. Pour $g = 0$ et $g = 1$, le cône $\text{Nef}(X \times X)$ est bien connu alors que pour $g \geq 2$, il s'agit d'un problème ouvert. Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 1.2.3.1. *Soit X une courbe générale de genre $g \geq 2$. Alors on a*

$$\text{N}^1(X \times X) = \langle x_1, x_2, \Delta \rangle.$$

Expliquons d'abord ce à quoi l'on s'attend. Par Riemann-Roch, $\text{Psef}(X \times X)$ contient le cône défini par $c^2 \geq 0, c \cdot x \geq 0$, où $x \in \text{N}^1(X)$ est une classe ample. Si ce cône est strictement contenu dans $\text{Psef}(X \times X)$, il existe un rayon extrémal $r \in \text{Psef}(X \times X)$ tel que $r^2 < 0$. Comme un tel rayon r est engendré par la classe d'une courbe irréductible C (cf. [16, Lemme 6.2]), on est ramené à déterminer les courbes irréductibles d'autointersection négative. Autrement dit, une classe c est nef si et seulement si $c^2 \geq 0, c \cdot x \geq 0$ et si $c \cdot \alpha \geq 0$ pour toute classe effective α d'autointersection négative.

Question 1.2.3.2 (Kollár). *Soit X une courbe très générale de genre ≥ 4 . Est-ce que la diagonale Δ est la seule courbe d'autointersection négative ? C'est équivalent à demander si le cône $\text{Nef}(X \times X)$ est déterminé par les inéquations*

$$c^2 \geq 0 \quad , \quad c \cdot x \geq 0 \quad , \quad c \cdot \Delta \geq 0.$$

Pour $g = 2$ ou $g = 3$, la situation est légèrement différente ; on renvoie à l'introduction du chapitre 4 pour plus de détails.

En utilisant une méthode de Vojta [68], on obtient des restrictions sur le cône des classes pseudoeffectives pour $g \geq 2$, ce qui permet, par dualité, de construire de nouvelles classes nef dans $\text{N}^1(X \times X)$. Expliquons rapidement cette méthode. Soit c la classe d'une courbe irréductible $C \subset X \times X$ qui n'est pas un multiple de la classe d'une fibre x_i . Écrivons $c = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma(\Delta - x_1 - x_2)$, où l'on a $\deg(p_i|_C) = d_i$ et donc $d_i \geq 1$; par symétrie, on peut supposer $d_2 \geq d_1$. On essaye d'exclure l'existence de courbes d'autointersection négative avec d_1 petit fixé en appliquant Riemann-Hurwitz et en étudiant l'application

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X^{(d_1)} \\ x &\mapsto p_2((p_1|_C)^{-1}(x)), \end{aligned}$$

où $X^{(d_1)}$ est le produit symétrique de X . Notre résultat principal est alors la proposition suivante.

Proposition 1.2.3.3. Soit $[C] = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma(\Delta - x_1 - x_2)$ la classe d'une courbe irréductible C dans $X \times X$ avec $d_2 \geq d_1$.

1. Lorsque X est une courbe très générale de genre $g \geq 3$, on a ou bien $[C] \in \{x_1, \Delta\}$ ou bien $d_1 \geq 2$.
2. Si X est une courbe très générale de genre $g = 4$, on a ou bien $[C] \in \{x_1, \Delta, 3x - \Delta\}$ ou bien $d_1 \geq 3$.
3. Si X est une courbe très générale de genre $g \geq 5$ et g est un carré parfait, on a ou bien $[C] \in \{x_1, \Delta\}$ ou bien $d_1 \geq 3$.

Pour $g = 2$, les classes nef de la forme $d(x_1 + x_2) + \gamma\Delta \in N^1(X \times X)$ sont connues, de sorte que l'on obtient par exemple l'image suivante d'une section affine dans le demi-espace $d_2 \geq d_1$, où les classes dans la région en gris foncé sont nefes et toute classe nef doit être contenue dans la région en gris clair (cf. §4.4.4 pour une image des classes nefes obtenue selon le genre g).

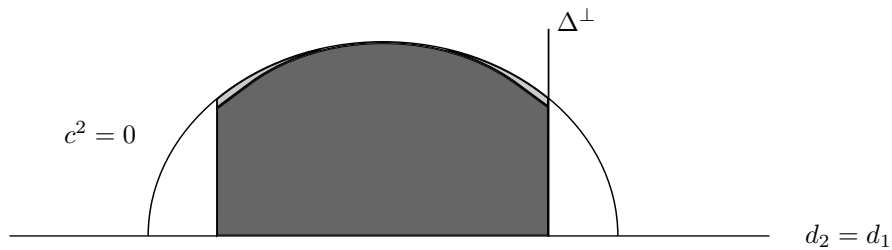


FIGURE 1.1 – Cône nef pour $g = 2$

2. La puissance d'une variété abélienne

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des classes positives dans $N^k(A^e)$ pour une variété abélienne principalement polarisée très générale A . Dans la première section, on étudie l'algèbre $N^\bullet(A^e)$ et l'on montre comme résultat principal la proposition suivante (corollaire 2.2.3.12).

Proposition 2.1.0.4. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n . L'idéal I tel que*

$$N^\bullet(A^e) = \mathbf{S}^\bullet N^1(A^e)/I,$$

i.e., l'idéal des relations dans $\mathbf{S}^\bullet N^1(A^e)$, est engendré par des classes de cycles de codimension $n + 1$ et l'on peut en décrire des générateurs explicitement. En particulier, l'application

$$\mathbf{S}^k N^1(A^e) \rightarrow N^k(A^e)$$

est un isomorphisme si et seulement si $k \in \{0, \dots, n\}$.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des cônes de classes positives. Soit B une variété abélienne quelconque de dimension m . Si l'on écrit $B = V/\Lambda$ avec V un \mathbb{C} -espace vectoriel et Λ un réseau dans V , on peut identifier une classe $\alpha \in N^k(B)$ avec une (k, k) -forme réelle sur V , ce qui nous permet de définir d'autres notions de positivité (cf. §2.3) :

1. une classe $\alpha \in N^k(B)$ est dite *fortement positive* si la (k, k) -forme associée s'écrit comme combinaison linéaire convexe de formes

$$il_1 \wedge \bar{l}_1 \wedge \dots \wedge il_k \wedge \bar{l}_k$$

avec $l_j \in V^*$ pour $j = 1, \dots, k$. On obtient ainsi le cône fermé $\text{Strong}^k(B)$ engendré par les classes fortement positives.

2. On dit qu'une classe $\alpha \in N^k(B)$ est *semipositive* si la forme hermitienne associée est semipositive et l'on note $\text{Semi}^k(B)$ le cône engendré par ces classes.

Le lien entre ces cônes est donné par la chaîne d'inclusions [17, Lemma 1.5]

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(B) \subset \text{Psef}^k(B) \subset \text{Strong}^k(B) \subset \text{Semi}^k(B) \subset \text{Nef}^k(B), \quad (2.1)$$

où l'on note $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(B)$ le cône convexe engendré par les produits de k éléments de $\text{Psef}^1(B)$. Pour $k = 1$ (et donc aussi pour $k = m - 1$), tous les cônes de la chaîne (2.1) coïncident, de sorte que l'on a un seul cône qui a été déterminé par Rosoff [57,

Thm. 1] (cf. aussi l'article de Prendergast-Smith [54])¹. Pour $2 \leq k \leq m - 2$, on se demande quelles inclusions sont strictes et quelles inclusions sont des égalités. On a par exemple la conjecture suivante qui est un cas particulier d'une conjecture de Harvey, Knapp [35] et Lawson [41] (cf. §2.3.1.2).

Conjecture 2.1.0.5 (Harvey, Knapp, Lawson). *Soit B une variété abélienne de dimension m . Alors on a, pour tout $k \in \{0, \dots, m\}$,*

$$\text{Psef}^k(B) = \text{Strong}^k(B).$$

En générale, il est difficile de décrire les cônes $\text{Psef}^k(B)$ et $\text{Strong}^k(B)$ explicitement, ce qui rend la vérification de la conjecture 2.1.0.5 difficile. Or, comme expliqué dans l'introduction (§1.2.1), les deux cônes accessibles pour une description explicite sont les cônes $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ et $\text{Semi}^k(A^e)$. L'égalité des deux cônes entraînerait donc d'un côté une caractérisation du cône $\text{Psef}^k(A^e)$ et d'autre part, elle entraînerait la conjecture 2.1.0.5. Pour $e = 2$ et $k = 2$, c'est le cas par un résultat de Debarre, Ein, Lazarsfeld et Voisin [17, Thm. 4.1]; par un argument de dualité, cela entraîne la conjecture 2.1.0.5 aussi pour $e = 2$ et $k = 2n - 2$ [17, Prop. 5.2]. En codimension supérieure, on obtient le résultat suivant (théorème 2.3.4.9).

Théorème 2.1.0.6. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n et soit $e \geq 2$.*

1. *On a*

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) \subsetneq \text{Semi}^k(A^e)$$

pour $3 \leq k \leq n$. Lorsque $e = 2$, les rayons extrémaux du cône $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A \times A)$ sont aussi extrémaux dans le cône $\text{Semi}^k(A \times A)$ pour $2 \leq k \leq n$.

2. *Pour $n = 3$, on a*

$$\mathbf{S}^4 \text{Psef}^1(A \times A) = \text{Semi}^4(A \times A).$$

La conjecture 2.1.0.5, resp. la question de savoir si le cône $\text{Psef}^k(A^e)$ coïncide avec l'un des deux cônes $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ ou $\text{Semi}^k(A^e)$, reste ouverte pour $k \geq 3$ et $e \geq 2$ (resp. $k \geq 2$ et $e \geq 3$).

Concernant la comparaison des cônes $\text{Psef}^k(A^e)$ et $\text{Nef}^k(A^e)$, on obtient le résultat suivant (théorème 2.3.4.9).

Théorème 2.1.0.7. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n et soit $e \geq 2$. On a*

$$\text{Psef}^k(A^e) \subsetneq \text{Nef}^k(A^e)$$

pour $2 \leq k \leq en - 2$.

Pour $n = 2$ et $e = 2$, c'est [17, Prop. 4.4].

Le plan de ce chapitre est le suivant : dans la section 2.2, on étudie d'abord la \mathbb{R} -algèbre $\mathbf{N}^\bullet(A^e)$ comme une certaine algèbre d'invariants d'un groupe symplectique qui admet en même temps une structure de $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ -module (§2.2.1 - 2.2.2). Cela nous permet ensuite de montrer la proposition 2.1.0.4 dans §2.2.3. On termine la section 2.2 en faisant des calculs explicites pour $e = 2$ (§2.2.4).

Dans la section 2.3, on discute d'abord en détail la relation entre les diverses notions de positivité et l'on rappelle les résultats de Debarre, Ein, Lazarsfeld et Voisin obtenus dans [17]. On termine la section 2.3.1 en discutant la conjecture de Harvey, Knapp et Lawson. Ensuite, on étudie les cônes $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ et $\text{Semi}^k(A^e)$ dans §2.3.2 et §2.3.3. C'est surtout la représentation des classes semipositives que l'on obtient dans §2.3.3, qui joue un rôle clé dans la démonstration des théorèmes 2.1.0.6 et 2.1.0.7 dans §2.3.4.

1. Comme la présentation du sujet dans l'article de Prendergast-Smith [54](2010) est mieux adaptée à nos besoins, on prend cet article comme notre référence standard pour les résultats en codimension 1 (alors que l'article de Rosoff [57] (1981) est beaucoup plus ancien).

2.2 La structure de l'algèbre $N^\bullet(A^e)$

2.2.1 Le groupe de Hodge d'une variété abélienne

Pour un espace vectoriel E donné, on note

$$\bigwedge^\bullet E = \bigoplus_{k \geq 0} \bigwedge^k E$$

l'algèbre extérieure et

$$S^\bullet E = \bigoplus_{k \geq 0} S^k E$$

l'algèbre symétrique. Si G est un groupe et M est un G -module, on note M^G l'espace des invariants dans M sous l'action de G .

Soit B une variété abélienne complexe de dimension n et écrivons $B = U/\Gamma$, où U est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n et $\Gamma \subset U$ est un réseau. Soit $K = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{R} , et posons $U_K = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} K$. On a $\Gamma = H_1(B, \mathbb{Z})$ et donc $U_K = H_1(B, K)$ par extension des scalaires. Par dualité, on obtient $H^1(B, \mathbb{Z}) = \Gamma^*$, où l'on note Γ^* le réseau dual à Γ . Pour $k \geq 1$, le cup-produit fournit alors un isomorphisme

$$H^k(B, \mathbb{Z}) \simeq \bigwedge^k \Gamma^*, \quad (2.2)$$

de sorte que l'on a par extension des scalaires

$$H^k(B, K) \simeq \bigwedge^k U_K^*.$$

Remarquons aussi que, pour $k \geq 1$, on a également un isomorphisme

$$H_k(B, \mathbb{Z}) \simeq \bigwedge^k \Gamma, \quad (2.3)$$

où le produit extérieur correspond au produit de Pontryagin des classes d'homologie.

Posons $H^{p,q}(B) := H^q(B, \Omega_B^p)$, où l'on note Ω_B^p le faisceau des p -formes holomorphes sur B . La décomposition de Hodge donne

$$H^n(B, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(B),$$

et l'on a (cf. [40, Thm. 1.4.1])

$$H^{p,q}(B) = \bigwedge^p U^* \otimes \bigwedge^q \overline{U}^*, \quad (2.4)$$

où $U^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, \mathbb{C})$ est l'espace vectoriel dual de l'espace vectoriel complexe U , et \overline{U}^* est l'espace vectoriel des formes \mathbb{C} -antilinéaires sur U .

Soit

$$N_{\mathbb{Q}}^k(B) := H^{k,k}(B) \cap H^{2k}(B, \mathbb{Q})$$

le \mathbb{Q} -espace vectoriel des classes de Hodge (rationnelles) de degré $2k$ sur B . Posons $N^k(B) := N_{\mathbb{Q}}^k(B) \otimes \mathbb{R}$ et

$$N^\bullet(B) := \bigoplus_{k \geq 0} N^k(B).$$

Le produit d'intersection munit $N^\bullet(B)$ de la structure d'une \mathbb{R} -algèbre. Remarquons que l'on a par l'équation (2.4) une injection de $N^k(B)$ dans l'espace vectoriel réel des (k, k) -formes réelles sur U , que l'on note $\bigwedge_{\mathbb{R}}^{(k,k)} U^*$.

Or, on a un isomorphisme entre l'espace vectoriel réel des (k, k) -formes réelles sur U et celui des formes hermitiennes sur $\bigwedge^k U$, que l'on note \mathcal{H} : si l'on munit U des coordonnées (z_1, \dots, z_n) et U^* des coordonnées duales, cet isomorphisme est donné par

$$\mathcal{H} \rightarrow \bigwedge_{\mathbb{R}}^{k,k} U^* \quad (2.5)$$

$$\sum_{I,J} h_{IJ} dz_I \otimes d\bar{z}_J \mapsto \sqrt{-1}^{k^2} \sum_{I,J} h_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

où $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k}$, et de même pour J . Comme on a une injection de $N^k(B)$ dans $\bigwedge_{\mathbb{R}}^{(k,k)} U^*$, on peut ainsi identifier une classe de Hodge sur B de degré $2k$ avec une forme hermitienne sur $\bigwedge^k U$. On note désormais H_α la forme hermitienne sur $\bigwedge^k U$ associée à une classe α dans $N^k(B)$.

Soit $J : U_{\mathbb{R}} \rightarrow U_{\mathbb{R}}$ la structure complexe associée à

$$H_1(B, \mathbb{C}) = H^{-1,0}(B) \oplus H^{0,-1}(B).$$

Alors on obtient un morphisme

$$\begin{aligned} h_J : \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathrm{GL}(U_{\mathbb{R}}) \\ e^{\sqrt{-1} \cdot \theta} &\mapsto \cos \theta \cdot \mathrm{id}_U + \sin \theta \cdot J, \end{aligned}$$

qui agit par multiplication par z sur $H^{1,0}(B)$ et par multiplication par \bar{z} sur $H^{0,1}(B)$ (cf. [40, Prop. 17.1.1, Rem. 17.1.2]).

Définition 2.2.1.1. Le *groupe de Hodge* de B , noté $\mathrm{Hg}(B)$, est le plus petit sous-groupe de $\mathrm{GL}(U_{\mathbb{Q}})$ défini sur \mathbb{Q} tel que $h_J(\mathbb{S}^1) \subset \mathrm{Hg}(B)(\mathbb{R})$.

Soit $\theta \in H^2(B, \mathbb{Z})$ une polarisation de B . Par l'isomorphisme

$$H^2(B, \mathbb{Q}) = \bigwedge^2 U_{\mathbb{Q}}^*,$$

θ définit une forme alternée non-dégénérée

$$\omega_\theta : U_{\mathbb{Q}} \times U_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}.$$

On note $\mathrm{Sp}(U_{\mathbb{Q}}, \omega_\theta)$ le groupe symplectique associé à ω_θ , qui est naturellement un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(U_{\mathbb{Q}})$. Le groupe de Hodge $\mathrm{Hg}(B)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(U_{\mathbb{Q}}, \omega_\theta)$ pour toute polarisation θ [40, Prop. 17.3.2].

Regardons $H^1(B, \mathbb{Q}) = U_{\mathbb{Q}}^*$ comme représentation duale de $\mathrm{Hg}(B)$. Par l'isomorphisme $H^n(B, \mathbb{Q}) = \bigwedge^n U_{\mathbb{Q}}^*$, on obtient ainsi une structure de $\mathrm{Hg}(B)$ -module sur $H^n(B, \mathbb{Q})$. Par l'égalité [40, 17.3.3]

$$N_{\mathbb{Q}}^k(B) = H^{2k}(B, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(B)},$$

on est ainsi ramené à un calcul d'invariants pour déterminer les classes de Hodge.

2.2.2 Classes de Hodge sur la puissance d'une variété abélienne

Soit A une variété abélienne (pas forcément principalement polarisée très générale). On veut étudier l'algèbre des classes de Hodge sur des puissances de A . Écrivons $A = U/\Gamma$, où U est un \mathbb{C} -espace vectoriel et Γ est un réseau dans U . Si

l'on écrit $A^e = (U \otimes_{\mathbb{Z}} W_{\mathbb{Z}}) / (\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} W_{\mathbb{Z}})$, où $W_{\mathbb{Z}}$ est un \mathbb{Z} -module libre de rang e , on obtient une injection

$$\begin{aligned} \text{End}(W_{\mathbb{Z}}) &\rightarrow \text{End}(A^e) \\ g &\mapsto u_g, \end{aligned}$$

où u_g est défini par l'application linéaire

$$\begin{aligned} U \otimes_{\mathbb{Z}} W_{\mathbb{Z}} &\rightarrow U \otimes_{\mathbb{Z}} W_{\mathbb{Z}} \\ u \otimes w &\mapsto u \otimes {}^t g w. \end{aligned}$$

Posons, pour $g \in \text{End}(W_{\mathbb{Z}})$ et pour $\alpha \in H^{\bullet}(A^e, \mathbb{Q})$,

$$g \cdot \alpha = u_g^* \alpha.$$

Cela induit une action de $\text{GL}(W_{\mathbb{Q}})$ sur $H^{\bullet}(A^e, \mathbb{Q})$, et l'on a

$$H^k(A^e, \mathbb{Q}) \simeq \bigwedge^k U^* \otimes W_{\mathbb{Q}}$$

en tant que $\text{GL}(W_{\mathbb{Q}})$ -modules, où $\text{GL}(W_{\mathbb{Q}})$ agit sur $W_{\mathbb{Q}}$ tautologiquement.

Il découle de la définition du groupe de Hodge que l'on a

$$\text{Hg}(A^e) = \text{Hg}(A) \tag{2.6}$$

et que $\text{Hg}(A)$ agit diagonalement sur $H^1(A^e, \mathbb{Q})$ (cf. par exemple [30, Cor. 1.11]), c'est-à-dire

$$\forall g \in \text{Hg}(A) \quad \forall u \in U_{\mathbb{Q}}^* \quad \forall w \in W_{\mathbb{Q}} \quad g \cdot (u \otimes w) = g \cdot u \otimes w.$$

On obtient ainsi une structure de $\text{Hg}(A) \times \text{GL}(W_{\mathbb{Q}})$ -module sur $H^k(A^e, \mathbb{Q})$. Par construction, $N_{\mathbb{Q}}^{\bullet}(A^e)$ est invariant sous l'action de $\text{GL}(W_{\mathbb{Q}})$.

2.2.3 Générateurs et relations pour les classes de Hodge

Soit maintenant (A, θ) une variété abélienne principalement polarisée très générale et reprenons les notations de la section précédente. Par un résultat de Tankeev, l'algèbre $N^{\bullet}(A^e)$ est engendrée par des classes de codimension 1 (théorème 2.2.3.1), de sorte que l'application canonique $\mathbf{S}^{\bullet} N^1(A^e) \rightarrow N^{\bullet}(A^e)$ est surjective. On détermine des générateurs de $N^{\bullet}(A^e)$ et l'idéal des relations dans $\mathbf{S}^{\bullet} N^1(A^e)$ (proposition 2.2.3.9 et corollaire 2.2.3.12). Le groupe de Hodge d'une variété abélienne principalement polarisée très générale étant le groupe symplectique $\text{Sp}(U_{\mathbb{Q}})$ (par rapport à la polarisation principale), on est ramené à l'étude de l'algèbre des invariants $(\bigwedge^{\bullet} U_{\mathbb{Q}}^* \otimes W_{\mathbb{Q}})^{\text{Sp}(U_{\mathbb{Q}})}$ en tant que $\text{GL}(W_{\mathbb{Q}})$ -module pour obtenir ces résultats. Comme cette algèbre a été étudiée par Thompson dans [62], notre travail consiste essentiellement à traduire ses résultats dans notre cadre.

2.2.3.1 Un résultat de Tankeev et un résultat de Thompson

Soit $K = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{R} . On a

$$H^k(A^e, K) \simeq \bigwedge^k (U_K^* \otimes_{\mathbb{Z}} W_{\mathbb{Z}}).$$

Théorème 2.2.3.1 (Tankeev). *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale. Alors on a*

$$\text{Hg}(A^e) = \text{Sp}(U_{\mathbb{Q}}) \tag{2.7}$$

et $N_{\mathbb{Q}}^{\bullet}(A^e)$ est engendré par des classes de codimension 1.

Démonstration. Pour montrer (2.7), il suffit par (2.6) de remarquer que l'on a $\text{Hg}(A) = \text{Sp}(U_{\mathbb{Q}})$ pour A très générale (cf. [40, Prop. 17.4.2]). Il s'ensuit

$$N_{\mathbb{Q}}^{\bullet}(A^e) = \left(\bigwedge^{\bullet} U_{\mathbb{Q}}^* \otimes W_{\mathbb{Q}} \right)^{\text{Sp}(U_{\mathbb{Q}})}.$$

Par un théorème de Howe [31, Thm. 2] (cf. aussi [56, pp. 529-530]), l'algèbre à droite est engendrée par des classes de degré 2, ce qui fournit le résultat souhaité. \square

L'action de $\text{Sp}(U_{\mathbb{Q}}) \times \text{GL}(W_{\mathbb{Q}})$ sur $V_{\mathbb{Q}}^* := U_{\mathbb{Q}}^* \otimes W_{\mathbb{Q}}$ s'étend naturellement à une action de $\text{Sp}(U_{\mathbb{R}}) \times \text{GL}(W_{\mathbb{R}})$ sur $V_{\mathbb{R}}^* = U_{\mathbb{R}}^* \otimes W_{\mathbb{R}}$, et comme $\text{Sp}(U_{\mathbb{Q}})$ est dense dans $\text{Sp}(U_{\mathbb{R}})$, on a

$$N^k(A^e) = \left(\bigwedge^{2k} V_{\mathbb{Q}}^* \right)^{\text{Sp}(U_{\mathbb{Q}})} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \left(\bigwedge^{2k} V_{\mathbb{R}}^* \right)^{\text{Sp}(U_{\mathbb{R}})}.$$

Comme expliqué plus haut, on traduit maintenant des résultats connus de la théorie des représentations dans notre cadre, où le résultat principal est le théorème 2.2.3.6. Pour faciliter les notations pour la suite, on pose $W := W_{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.2.3.2 (Thompson). *On a un isomorphisme de $\text{GL}(W)$ -modules*

$$N^{\bullet}(A^e) \simeq \bigoplus_{\sigma} \mathbb{S}_{\sigma}(W),$$

où l'on note \mathbb{S}_{σ} le foncteur de Schur correspondant au tableau de Young σ et où l'on prend la somme sur les σ tels que

1. chaque ligne de σ a un nombre pair d'éléments,
2. la première ligne a au plus $2n$ éléments et
3. le nombre de lignes est au plus e .

Les facteurs irréductibles de $N^k(A^e)$ correspondent aux diagrammes de Young à $2k$ cases dans cette décomposition.

Démonstration. [62, proposition 2.2]. \square

Corollaire 2.2.3.3. *On a*

$$N^1(A^e) \simeq \mathbf{S}^2 W$$

en tant que $\text{GL}(W)$ -modules.

Démonstration. Le tableau de Young ayant une ligne à 2 cases correspond au $\text{GL}(W)$ -module $\mathbf{S}^2 W$, et l'on a donc $N^1(A^e) = \mathbf{S}^2 W$. \square

De plus, on a le résultat suivant bien connu [31, Prop. 1].

Proposition 2.2.3.4. *On a un isomorphisme de $\text{GL}(W)$ -modules*

$$\mathbf{S}^{\bullet} N^1(A^e) \simeq \bigoplus_{\sigma} \mathbb{S}_{\sigma}(W),$$

où l'on note \mathbb{S}_{σ} le foncteur de Schur correspondant au tableau de Young σ et où l'on prend la somme sur les σ tels que

1. chaque ligne de σ a un nombre pair d'éléments,
2. le nombre de lignes est au plus e .

Les facteurs irréductibles de $\mathbf{S}^k N^1(A^e)$ correspondent aux diagrammes de Young à $2k$ cases dans cette décomposition.

Comme $\mathbf{S}^{2k} W$ correspond au tableau de Young ayant une ligne à $2k$ cases, on voit qu'il existe une injection canonique

$$\varepsilon_k : \mathbf{S}^{2k} W \rightarrow \mathbf{S}^k(\mathbf{N}^1(A^e)). \quad (2.8)$$

Par un résultat d'Abeasis [1, Thm. 3.1], on en déduit le résultat suivant.

Proposition 2.2.3.5 (Abeasis). *Soit l un entier positif fixé, et soit I_l^\bullet l'idéal engendré par $\varepsilon_l(\mathbf{S}^{2l} W)$ dans $\mathbf{S}^\bullet \mathbf{N}^1(A^e)$. Alors I_l^\bullet est $\mathrm{GL}(W)$ -invariant et l'on a un isomorphisme de $\mathrm{GL}(W)$ -modules*

$$I_l^\bullet \simeq \bigoplus_{\sigma} \mathbb{S}_{\sigma}(W),$$

où l'on note \mathbb{S}_{σ} le foncteur de Schur correspondant au tableau de Young σ et où l'on prend la somme sur les σ tels que

1. chaque ligne de σ a un nombre pair d'éléments,
2. la première ligne a au moins $2l$ éléments et
3. le nombre des lignes est au plus e .

Si l'on pose $I_l^k := \mathbf{S}^k \mathbf{N}^1(A^e) \cap I_l^\bullet$, les facteurs irréductibles de I_l^k correspondent aux diagrammes de Young à $2k$ cases dans cette décomposition.

On peut résumer ces résultats dans le théorème suivant (cf. [62, Thm. 2.3]).

Théorème 2.2.3.6 (Thompson). *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n , et soit I l'idéal engendré par $\varepsilon_{n+1}(\mathbf{S}^{2n+2} W)$ dans $\mathbf{S}^\bullet \mathbf{N}^1(A^e)$. Alors on a un isomorphisme de $\mathrm{GL}(W)$ -modules*

$$\mathbf{S}^\bullet \mathbf{N}^1(A^e)/I \simeq \mathbf{N}^\bullet(A^e).$$

En particulier, l'application

$$\mathbf{S}^k \mathbf{N}^1(A^e) \rightarrow \mathbf{N}^k(A^e)$$

est un isomorphisme si et seulement si $k \in \{0, \dots, n\}$.

Corollaire 2.2.3.7. *Pour toute classe $\alpha \in \mathbf{N}^1(A^e)$ non nulle et pour tout $0 \leq k \leq n-1$, l'application*

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^k(A^e) &\rightarrow \mathbf{N}^{k+1}(A^e) \\ \beta &\mapsto \alpha \cdot \beta \end{aligned}$$

est injective.

2.2.3.2 Générateurs explicites

Déterminons maintenant des générateurs explicites de $\mathbf{N}^\bullet(A^e)$ (c'est-à-dire une base du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbf{N}^1(A^e)$ et de l'idéal des relations dans $\mathbf{S}^\bullet(A^e)$).

Générateurs de $\mathbf{N}^\bullet(A^e)$. Comme A est principalement polarisée, on peut identifier A avec sa variété abélienne duale \widehat{A} , ce qui nous permet de voir le fibré de Poincaré \mathcal{P} comme un fibré sur $A \times A$. Soient $p_{i_1, \dots, i_l} : A^e \rightarrow A^l$ les projections. Posons

$$\theta_i := p_i^* \theta \quad \text{et} \quad \lambda_{jk} := c_1(p_{jk}^* \mathcal{P}).$$

Remarque 2.2.3.8. Notons A_i le i -ème facteur de A^e . Dans la décomposition de Künneth de $H^2(A^e, \mathbb{R})$, la classe θ_i est contenue dans la composante correspondant à $H^2(A_i, \mathbb{R})$, et λ_{jk} appartient à la composante correspondant à $H^1(A_j, \mathbb{R}) \otimes H^1(A_k, \mathbb{R})$ [40, Lemma 14.1.9].

On a la généralisation suivante de la proposition 3.1 de [17].

Proposition 2.2.3.9. *Soit (A, θ) une variété abélienne principalement polarisée très générale. La \mathbb{R} -algèbre $N^\bullet(A^e)$ est engendrée par les $\theta_i, 1 \leq i \leq e$ et les $\lambda_{jk}, 1 \leq j < k \leq e$.*

Démonstration. Par le corollaire 2.2.3.3, on a $N^1(A^e) \simeq \mathbf{S}^2 W$ et donc

$$\dim(N^1(A^e)) = \binom{e+1}{2}.$$

Comme les $\theta_i, \lambda_{jk}, 1 \leq i \leq e, 1 \leq j < k \leq e$ forment une famille libre de dimension $\binom{e}{2} + e = \binom{e+1}{2}$ dans $N^1(A^e)$ par la remarque 2.2.3.8, on obtient le résultat souhaité. \square

Déterminons maintenant comment $\mathrm{GL}(W)$ agit sur la base

$$\{\theta_i, \lambda_{jk} \mid 1 \leq i \leq e, 1 \leq j < k \leq e\}$$

de $N^1(A^e)$. Soit

$$v_{sr} = u_s \otimes w_r \quad 1 \leq s \leq n, 1 \leq r \leq e \quad (2.9)$$

une base de $V^* = U^* \otimes_{\mathbb{R}} W$ telle que l'on a dans les coordonnées associées (cf. [40, Lemme 3.6.4])

$$\begin{aligned} \theta_i &= \sum_{s=1}^n \sqrt{-1} dz_{si} \wedge d\bar{z}_{si}, \\ \lambda_{jk} &= \sum_{s=1}^n \sqrt{-1} dz_{sj} \wedge d\bar{z}_{sk} + \sqrt{-1} dz_{sk} \wedge d\bar{z}_{sj} \end{aligned} \quad (2.10)$$

pour $1 \leq i \leq e, 1 \leq j < k \leq e$.

Proposition 2.2.3.10. *Soit $g \in \mathrm{GL}(W)$ et soit $\rho(g)$ la matrice représentant g dans la base $\{w_1, \dots, w_e\}$. Sur l'ensemble des générateurs $\{\theta_i, \lambda_{jk} \mid 1 \leq i \leq e, 1 \leq j < k \leq e\}$ de $N^\bullet(A^e)$, la matrice $\rho(g)$ agit par :*

$$\begin{aligned} g\theta_i &= \sum_{j=1}^e \rho(g)_{ji}^2 \theta_j + \sum_{1 \leq j < k \leq e} \rho(g)_{ji} \rho(g)_{ki} \lambda_{jk}, \\ g\lambda_{jk} &= 2 \sum_{i=1}^e \rho(g)_{ij} \rho(g)_{ik} \theta_i + \sum_{1 \leq u < v \leq e} (\rho(g)_{vj} \rho(g)_{uk} + \rho(g)_{uj} \rho(g)_{vk}) \lambda_{uv}. \end{aligned}$$

Démonstration. Cela résulte d'un calcul direct dans les coordonnées (2.10) ou des arguments de [17, §3]. \square

Remarque 2.2.3.11. Si $\{w_1, \dots, w_e\}$ est une base de W , il découle de la proposition 2.2.3.10 que l'on obtient l'isomorphisme $N^1(A^e) \simeq \mathbf{S}^2 W$ en identifiant θ_i avec w_i^2 et λ_{jk} avec $2w_j w_k$ pour $1 \leq i \leq e, 1 \leq j < k \leq e$.

Générateurs de l'idéal des relations. Soit $m : A^e \rightarrow A$ l'application d'addition. Alors on a

$$m^*\theta = \sum_{i=1}^e \theta_i + \sum_{1 \leq j < k \leq e} \lambda_{jk}$$

et donc

$$\left(\sum_{i=1}^e \theta_i + \sum_{1 \leq j < k \leq e} \lambda_{jk} \right)^{n+1} = 0 \quad (2.11)$$

dans $H^{2n+2}(A^e, \mathbb{R})$. Regardons maintenant $\left(\sum_{i=1}^e \theta_i + \sum_{1 \leq j < k \leq e} \lambda_{jk} \right)^{n+1}$ comme polynôme dans $\mathbf{S}^{n+1} \mathbf{N}^1(A^e)$ et écrivons

$$\left(\sum_{i=1}^e \theta_i + \sum_{1 \leq j < k \leq e} \lambda_{jk} \right)^{n+1} = \sum_l P_l,$$

où chaque polynôme P_l définit une classe dans un facteur de la décomposition de Künneth de $H^{2n+2}(A^e, \mathbb{R})$ (cf. remarque 2.2.3.8 et exemple 2.2.3.13). On obtient ainsi précisément un polynôme non nul P_l pour chaque composante de Künneth, et par la relation (2.11), chaque polynôme P_l doit représenter la classe 0 dans $H^{2n+2}(A^e, \mathbb{R})$. On appelle les relations $P_l = 0$ dans $H^{2n+2}(A^e, \mathbb{R})$ ainsi obtenues, les *relations induites par la relation (2.11)*.

Corollaire 2.2.3.12. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n . Soit I l'idéal des relations dans $\mathbf{S}^\bullet \mathbf{N}^1(A^e)$, de sorte que $\mathbf{S}^\bullet \mathbf{N}^1(A^e)/I = \mathbf{N}^\bullet(A^e)$. Alors I est engendré par les relations induites par la relation*

$$\left(\sum_{i=1}^e \theta_i + \sum_{1 \leq j < k \leq e} \lambda_{jk} \right)^{n+1} = 0 \quad (2.12)$$

dans $H^{2n+2}(A^e, \mathbb{R})$ via la décomposition de Künneth.

Démonstration. On a

$$\binom{2n+1+e}{2n+2} = \dim \mathbf{S}^{2n+2} W$$

composantes dans la décomposition de Künneth de $H^{2n+2}(A^e, \mathbb{R})$, de sorte que l'équation (2.12) induit $\binom{2n+1+e}{2n+2}$ relations qui forment une famille libre dans $\mathbf{S}^{n+1}(\mathbf{N}^1(A^e))$. Par la proposition 2.2.3.5 et le théorème 2.2.3.6, on a

$$I \cap \mathbf{S}^{n+1}(\mathbf{N}^1(A^e)) \simeq \mathbf{S}^{2n+2} W,$$

d'où l'on déduit le résultat souhaité par une comparaison des dimensions. \square

Exemple 2.2.3.13. Supposons $n = 2$. On détermine les relations dans $\mathbf{S}^3 \mathbf{N}^1(A \times A)$ selon le corollaire 2.2.3.12. On a

$$(\theta_1 + \theta_2 + \lambda)^3 = \theta_1^3 + \theta_2^3 + \lambda^3 + 3\theta_1^2\theta_2 + 3\theta_1\theta_2^2 + 3\theta_1\lambda^2 + 3\theta_2\lambda^2 + 6\theta_1\theta_2\lambda$$

et

$$\begin{aligned} \theta_1^3 &\in H^6(A) \otimes H^0(A), & \theta_2^3 &\in H^0(A) \otimes H^6(A), \\ 3\theta_1^2\lambda &\in H^5(A) \otimes H^1(A), & 3\theta_2^2\lambda &\in H^1(A) \otimes H^5(A), \\ 3\theta_1^2\theta_2 + 3\theta_1\lambda^2 &\in H^4(A) \otimes H^2(A), & 3\theta_1\theta_2^2 + 3\theta_2\lambda^2 &\in H^2(A) \otimes H^4(A), \\ 6\theta_1\theta_2\lambda + \lambda^3 &\in H^3(A) \otimes H^3(A). \end{aligned}$$

Si l'on note I l'idéal des relations dans la \mathbb{R} -algèbre $\mathbf{S}^\bullet \mathbf{N}^1(A \times A)$, on a donc

$$I = \langle \theta_1^3, \theta_1^2\theta_2 + \theta_1\lambda^2, \theta_1^2\lambda, 6\theta_1\theta_2\lambda + \lambda^3, \theta_2^3, \theta_1\theta_2^2 + \theta_2\lambda^2, \theta_2^2 \rangle.$$

2.2.4 Le cas $A \times A$

Supposons toujours que A est une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n . Dans cette section, on donne d'abord une nouvelle démonstration de [17, Prop. 3.2] qui fournit des isomorphismes $N^k(A \times A) \rightarrow N^{2n-k}(A \times A)$ pour $1 \leq k \leq n$ (théorème 2.2.4.1). Ensuite, on détermine explicitement une base de chaque module irréductible dans une décomposition de $\mathbf{S}^k N^1(A \times A)$ en tant que $\mathrm{GL}(W)$ -module (remarque 2.2.4.2), et l'on montre que les modules irréductibles d'une décomposition de $N^n(A \times A)$ (en tant que $\mathrm{GL}(W)$ -module) sont orthogonaux deux à deux par rapport au produit d'intersection (corollaire 2.2.4.3). Enfin, on détermine les nombres d'intersection de deux classes de codimensions complémentaires dans $A \times A$ en fonction des polynômes en θ_1, θ_2 et λ représentant ces classes (proposition 2.2.4.4).

Soit W un espace vectoriel réel de dimension 2. Les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(W)$ étant des produits symétriques de W tensorisés avec une puissance du déterminant $\det(W)$, on peut étudier le $\mathrm{GL}(W)$ -module $N^\bullet(A \times A)$ de façon plus détaillée. Notons I l'idéal des relations dans $\mathbf{S}^\bullet N^1(A \times A)$, de sorte que

$$\mathbf{S}^\bullet N^1(A \times A)/I = N^\bullet(A \times A).$$

Soit $\sigma = (2r - 2i, 2i)$ le tableau de Young ayant $2r - 2i$ cases dans la première ligne et $2i$ cases dans la deuxième ligne. Si l'on note $\mathbb{S}_{(2r-2i, 2i)}$ le foncteur de Schur correspondant à ce tableau, on a

$$\mathbb{S}_{(2r-2i, 2i)}(W) = \det(W)^{\otimes 2i} \otimes \mathbf{S}^{2r-4i} W.$$

Posons $\mu = \theta_1 \theta_2 - 4\lambda^2$. Alors on a $g \cdot \mu = \det(g)^2 \mu$ de sorte que

$$\mathbb{R} \mu \simeq \det(W)^{\otimes 2}$$

en tant que $\mathrm{GL}(W)$ -module. La proposition 2.2.3.4 donne alors

$$\mathbf{S}^r N^1(A \times A) = \bigoplus_{0 \leq 2i \leq r} \mu^i \cdot \mathbf{S}^{2r-4i} W. \quad (2.13)$$

Le théorème suivant a déjà été montré dans [17] par un argument de récurrence. On donne une démonstration en utilisant la décomposition de $\mathbf{S}^\bullet N^1(A \times A)$ et de I en $\mathrm{GL}(W)$ -modules irréductibles.

Théorème 2.2.4.1. *Soit (A, θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension n . Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, l'application*

$$\begin{aligned} \cdot \mu^k : N^{n-k}(A \times A) &\rightarrow N^{n+k}(A \times A) \\ \alpha &\mapsto \alpha \cdot \mu^k \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $0 \leq k \leq n$. Rappelons d'abord que

$$\mathbf{S}^{n-k} N^1(A \times A) = N^{n-k}(A \times A)$$

par le théorème 2.2.3.6, de sorte que

$$N^{n-k}(A \times A) = \bigoplus_{0 \leq 2i \leq n-k} \mu^i \cdot \mathbf{S}^{2n-4i} W.$$

Par la proposition 2.2.3.5, on a $\mathbb{S}_{(2r-2i, 2i)}(W) \subset I$ si et seulement si $2r - 2i \geq 2n + 2$, d'où

$$I \cap \mathbf{S}^{n+k} N^1(A \times A) = \bigoplus_{0 \leq 2i \leq 2k-2} \mu^i \cdot \mathbf{S}^{2(n+k)-4i} W$$

et donc

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}^{n+k}(A \times A) &= \mathbf{S}^{n+k} \mathbf{N}^1(A \times A)/I \\
 &\simeq \bigoplus_{2k \leq 2i \leq n+k} \mu^i \cdot \mathbf{S}^{2(n+k)-4i} W \\
 &= \bigoplus_{0 \leq 2i \leq n-k} \mu^{i+k} \cdot \mathbf{S}^{2(n-k)-4i} W \\
 &= \mu^k \cdot \mathbf{N}^{n-k}(A \times A).
 \end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.4.2. Par la proposition 2.2.3.5, on sait que l'idéal des relations I dans $\mathbf{S}^\bullet \mathbf{N}^1(A \times A)$ est engendré par $\mathbf{S}^{2n+2} W$ dans la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbf{S}^{n+1} \mathbf{N}^1(A \times A)$ (cf. (2.13)). En même temps, on sait, par le corollaire 2.2.3.12, qu'une base de $\mathbf{S}^{2n+2} W$ dans $\mathbf{S}^{n+1} \mathbf{N}^1(A \times A)$ est donnée par les relations induites par la relation

$$(\theta_1 + \theta_2 + \lambda)^{n+1} = 0$$

dans $H^{2n+2}(A \times A)$. Si l'on écrit

$$(\theta_1 + \theta_2 + \lambda)^{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} P_j(\theta_1, \theta_2, \lambda)$$

avec $P_j(\theta_1, \theta_2, \lambda) \in H^j(A, \mathbb{R}) \otimes H^{2(n+1)-j}(A, \mathbb{R})$, les polynômes $P_j(\theta_1, \theta_2, \lambda)$ forment une telle base de $\mathbf{S}^{2n+2} W$. Soit maintenant m un entier positif et posons, pour $k \in \{0, \dots, m\}$,

$$P_{2k,m}(\theta_1, \theta_2, \lambda) := \sum_{i=0}^{\min(k, m-k)} \binom{m+1}{k-i, m+1-k-i, 2i} \theta_1^{k-i} \theta_2^{m+1-k-i} \lambda^{2i}$$

et

$$P_{2k+1,m}(\theta_1, \theta_2, \lambda) := \sum_{i=0}^{\min(k, m-k)} \binom{m+1}{k-i, m-k-i, 1+2i} \theta_1^{k-i} \theta_2^{m-k-i} \lambda^{1+2i}.$$

Pour $m = n + 1$, ce sont précisément les polynômes donnant une base de $\mathbf{S}^{2n+2} W$ dans $\mathbf{S}^{n+1} \mathbf{N}^1(A \times A)$, i.e. les générateurs de I . Comme tout sous-module irréductible de $\mathbf{S}^k \mathbf{N}^1(A \times A)$ est de la forme $\mu^i \cdot \mathbf{S}^{2k-4i} W$, on peut en déduire une base de chaque module irréductible dans la décomposition de $\mathbf{S}^k \mathbf{N}^1(A \times A)$. Une base de $\mu^i \cdot \mathbf{S}^{2k-4i} W$ pour $0 \leq 2i \leq 2k$ est donnée par les polynômes

$$\mu^i P_{j, 2k-4i}(\theta_1, \theta_2, \lambda) \quad 0 \leq j \leq 2k - 4i.$$

Le théorème 2.2.3.6 et la proposition 2.2.3.5 nous permettent ainsi de décrire explicitement une base de $\mathbf{N}^k(A \times A)$ et une base de $I \cap \mathbf{S}^k \mathbf{N}^1(A \times A)$ pour $k \in \{0, \dots, 2n\}$.

Corollaire 2.2.4.3. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n . Les $\mathrm{GL}(W)$ -modules irréductibles dans la décomposition*

$$\mathbf{N}^n(A \times A) = \bigoplus_{0 \leq 2i \leq n} \mu^i \cdot \mathbf{S}^{2n-4i} W$$

sont deux à deux orthogonaux par rapport au produit d'intersection.

Démonstration. Soit $i < j$ et soient α et β des classes dans $N^n(A \times A)$ telles que α soit représentée par un polynôme $P_\alpha(\theta_1, \theta_2, \lambda) \in \mu^i \cdot \mathbf{S}^{2n-4i} W$ et β par un polynôme $P_\beta(\theta_1, \theta_2, \lambda) \in \mu^j \cdot \mathbf{S}^{2n-4j} W$. Alors on a $P_\alpha P_\beta \in \mu^{i+j} \cdot \mathbf{S}^{2n-4i} W \cdot \mathbf{S}^{2n-4j} W$, de sorte qu'il existe $Q(\theta_1, \theta_2, \lambda) \in \mu^{i+j} \cdot \mathbf{S}^{2n-4i} W = \mu^{i+j} \mathbf{S}^{2(n+2j)-4(i+j)} W$ et $T(\theta_1, \theta_2, \lambda) \in \mathbf{S}^{2n-4j} W$ tels que

$$P_\alpha \cdot P_\beta = Q \cdot T.$$

Or $\mu^{i+j} \cdot \mathbf{S}^{2(n+2j)-4(i+j)} W$ est un module irréductible dans $\mathbf{S}^{n+2j} N^1(A \times A)$ et l'on a par (2.13),

$$\mu^{i+j} \cdot \mathbf{S}^{2(n+2j)-4(i+j)} W \subset \mathbf{S}^{n+2j} N^1(A \times A) \cap I \iff 2(i+j) < 4j \iff i < j.$$

On en déduit $Q(\theta_1, \theta_2, \lambda) = 0$ dans $H^{2n}(A^e, \mathbb{R})$ et donc $\alpha \cdot \beta = 0$. \square

Proposition 2.2.4.4. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n . Les seuls monômes en θ_1, θ_2 et λ non nuls de degré $2n$ sont de la forme $\theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k} \lambda^{2k}$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$, et l'on a*

$$\theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k} \lambda^{2k} = (-1)^k (2k)! (n-k)!^2 \binom{n}{k}.$$

Démonstration. Il est clair que les mônomes de degré $2n$ de la forme $\theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k} \lambda^k$ sont précisément les monômes définissant une classe dans $H^n(A, \mathbb{R}) \otimes H^n(A, \mathbb{R})$ par rapport à la décomposition de Künneth (cf. remarque 2.2.3.8). Evidemment, c'est la seule composante non triviale, ce qui montre la première partie de l'énoncé. Pour la deuxième partie, on suppose que θ_1, θ_2 et λ sont donnés comme dans (2.10). Alors $\theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k}$ correspond à la $(n-k, n-k)$ -forme

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n \\ n \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq 2n}} \left((n-k)!^2 (\sqrt{-1})^{2(n-k)} \bigwedge_{1 \leq l \leq n-k} (dz_{i_l} \wedge d\bar{z}_{i_l}) \wedge \bigwedge_{1 \leq l \leq n-k} (dz_{j_l} \wedge d\bar{z}_{j_l}) \right).$$

Si l'on écrit

$$\lambda^{2k} = \sum_{I, J} a_{IJ} dz_{i_1} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k} \wedge d\bar{z}_{j_k}$$

avec $a_{IJ} \in \mathbb{R}$, $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ et $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ des multi-indices de longueur k dans $\{1, \dots, n\}$, on vérifie facilement que l'on a $a_{IJ} \neq 0$ et $a_{IJ} dz_{i_1} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k} \wedge d\bar{z}_{j_k} \wedge \theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k} \neq 0$ si et seulement si $a_{IJ} dz_{i_1} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k} \wedge d\bar{z}_{j_k}$ est de la forme

$$\begin{aligned} (2k)! \bigwedge_{1 \leq l \leq k} (\sqrt{-1} dz_{i_l} \wedge d\bar{z}_{i_{l+n}} \wedge \sqrt{-1} dz_{i_{l+n}} \wedge d\bar{z}_{i_l}) \\ = (-1)^{3k} (2k)! \bigwedge_{1 \leq l \leq k} (\sqrt{-1} dz_{i_l} \wedge d\bar{z}_{i_l} \wedge \sqrt{-1} dz_{i_{l+n}} \wedge d\bar{z}_{i_{l+n}}). \end{aligned}$$

Or il y a $\binom{n}{k}$ telles formes $a_{IJ} dz_{i_1} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k} \wedge d\bar{z}_{j_k}$, et pour chaque telle forme on a

$$a_{IJ} dz_{i_1} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k} \wedge d\bar{z}_{j_k} \wedge \theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k} = (-1)^k (2k)! (n-k)!^2,$$

de sorte que l'on obtient

$$\theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k} \lambda^{2k} = (-1)^k (2k)! (n-k)!^2 \binom{n}{k}.$$

\square

Remarque 2.2.4.5. Si A est de dimension n , on a

$$\mu^n = \sum_{k=0}^n 4^{n-k} (-1)^k \theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k} \lambda^{2k} = \sum_{k=0}^n 4^{n-k} (2k)! (n-k)!^2 \binom{n}{k} > 0.$$

Exemple 2.2.4.6. Soit $n = 2$. Alors on a

$$\theta_1^2 \theta_2^2 = 4, \quad \theta_1 \theta_2 \lambda^2 = -4, \quad \lambda^4 = 24, \quad \mu^2 = 96.$$

Notation 2.2.4.7. Si l'on a besoin de tenir compte de la dimension, on note A_n une variété abélienne de dimension n . Soit $P \in \mathbb{R}[\theta_1, \theta_2, \lambda]$ un polynôme homogène de degré k . On note $[P]_n$ la classe représentée par P dans $N^k(A_n \times A_n)$.

Lemme 2.2.4.8. Soient $P_1(\theta_1, \theta_2, \lambda)$ et $P_2(\theta_1, \theta_2, \lambda)$ des polynômes homogènes de degré k . Pour tout $n \geq k$, on a

$$[P_1]_k \cdot [P_2]_k = \frac{[\mu^k]_k}{[\mu^n]_n} ([P_1]_n \cdot \mu^{n-k} [P_2]_n).$$

Démonstration. Si l'on écrit $P_1 \cdot P_2 = \sum_{i=1}^k Q_i$ avec $Q_i \in \mu^i \cdot \mathbf{S}^{4k-4i} W$ selon (2.13), on a $[P_1]_k \cdot [P_2]_k = Q_0 \cdot \mu_k^k$ et donc

$$\begin{aligned} [P_1]_k \cdot [P_2]_k &= Q_0 \cdot [\mu^k]_k \\ &= \frac{[\mu^k]_k}{[\mu^n]_n} Q_0 \cdot [\mu^n]_n \\ &= \frac{[\mu^k]_k}{[\mu^n]_n} ([P_1]_n \cdot [\mu^{n-k}]_n \cdot [P_2]_n). \end{aligned}$$

□

2.3 Classes positives

Le but de cette section est de montrer les théorèmes 2.1.0.6 (théorème 2.3.4.3) et 2.1.0.7 (théorème 2.3.4.9). Après des discussions préliminaires (§2.3.1), on étudie en détail les cônes $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ et $\text{Semi}^k(A^e)$ dans §2.3.2 et §2.3.3. Les résultats de ces sections nous permettent alors de déduire les théorèmes 2.1.0.6 et 2.1.0.7 dans §2.3.4.

2.3.1 Préliminaires

2.3.1.1 Notions de positivité sur une variété abélienne

Soit B une variété abélienne et écrivons $B = U/\Gamma$, où U est un espace vectoriel complexe de dimension n et Γ est un réseau dans B . Dans ce paragraphe, on introduit diverses notions de positivité pour des classes de cycles sur B , qui donnent chacune lieu à un cône dans $N^k(B)$ pour $1 \leq k \leq n$. Rappelons que sur une variété abélienne, équivalence numérique et équivalence homologique coïncident.

Comme toute classe $\alpha \in N^k(B)$ est représentée par une (k, k) -forme réelle sur U , on peut définir d'autres notions de positivité à côté de celles définies dans l'introduction (cf. définition 1.1.0.1). Munissons U de coordonnées complexes $z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j$, $1 \leq j \leq n$. Alors l'espace vectoriel réel sous-jacent U est muni d'une orientation canonique par la (n, n) -forme réelle

$$\sqrt{-1}dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge \sqrt{-1}dz_n \wedge d\bar{z}_n = 2^n dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n.$$

Définition 2.3.1.1. Une (k, k) -forme réelle α est dite *fortement positive* si elle s'écrit comme combinaison linéaire convexe de formes

$$\sqrt{-1}l_1 \wedge \bar{l}_1 \wedge \cdots \wedge \sqrt{-1}l_k \wedge \bar{l}_k,$$

avec $l_j \in U$ pour $j = 1, \dots, k$. On note $\text{Strong}^k(U)$ le cône convexe fermé de ces classes.

Une $(n-k, n-k)$ -forme réelle est dite *faiblement positive* si le cup-produit avec toute (k, k) -forme fortement positive est positif, c'est-à-dire un multiple positif de l'orientation canonique. On note le cône de ces classes $\text{Weak}^{n-k}(U)$.

Remarque 2.3.1.2. Par définition, $\text{Weak}^{n-k}(U)$ est le cône dual de $\text{Strong}^k(U)$.

Remarque 2.3.1.3. Si l'on considère U comme un espace vectoriel réel muni d'une structure complexe $J : U \rightarrow U$, on peut également dire que α est une forme fortement positive si elle s'écrit comme combinaison convexe de formes

$$l_1 \wedge Jl_1 \wedge \cdots \wedge l_k \wedge Jl_k$$

avec $l_i \in U$.

Définition 2.3.1.4. On dit qu'une (k, k) -forme réelle est *semipositive* si sa forme hermitienne associée sur $\bigwedge^k U$ est semipositive (cf. (2.5)). On note le cône convexe fermé de ces formes $\text{Semi}^k(U)$.

On a les inclusions

$$\text{Strong}^k(U) \subset \text{Semi}^k(U) \subset \text{Weak}^k(U),$$

qui sont des égalités pour $k = 1$ et $k = n - 1$ et qui sont des inclusions strictes pour $2 \leq k \leq n - 2$ [35, Corol. 1.6].

Pour une variété abélienne B , on pose

$$\begin{aligned} \text{Strong}^k(B) &:= \text{Strong}^k(U) \cap \mathbf{N}^k(B), \\ \text{Weak}^k(B) &:= \text{Weak}^k(U) \cap \mathbf{N}^k(B), \\ \text{Semi}^k(B) &:= \text{Semi}^k(U) \cap \mathbf{N}^k(B). \end{aligned}$$

On a la chaîne d'inclusions suivante [17, Lemma 1.5] :

$$\text{Psef}^k(B) \subset \text{Strong}^k(B) \subset \text{Semi}^k(B) \subset \text{Weak}^k(B) \subset \text{Nef}^k(B). \quad (2.14)$$

Rapellons que toutes ces inclusions sont des égalités pour $k = 1$ et $k = n - 1$.

Remarque 2.3.1.5. Pour la variété abélienne B^e , tous les cônes dans la chaîne (2.14) sont invariants sous l'action de $\text{GL}(W)$ sur $\mathbf{N}^\bullet(B^e)$ (cf. §2.2.1 et [17, Prop. 1.6 et p. 12]).

Lemme 2.3.1.6. *On a les inclusions suivantes :*

- (a) $\text{Semi}^k(B) \cdot \text{Semi}^l(B) \subset \text{Semi}^{k+l}(B)$,
- (b) $\text{Strong}^k(B) \cdot \text{Strong}^l(B) \subset \text{Strong}^{k+l}(B)$,
- (c) $\text{Weak}^k(B) \cdot \text{Strong}^l(B) \subset \text{Weak}^{k+l}(B)$,
- (d) $\text{Nef}^k(B) \cdot \text{Psef}^l(B) \subset \text{Nef}^{k+l}(B)$.

Démonstration. Le premier énoncé résulte du fait que $\text{Semi}^k(U)$ est engendré par les formes $i^{k^2} a \wedge \bar{a}$ pour $a \in \bigwedge^k U$.

Pour le deuxième, il suffit de remarquer que $\text{Strong}^k(U)$ est engendré par les formes $i^{k^2} a \wedge \bar{a}$ pour $a \in \bigwedge^k U$ décomposable.

Enfin, on montre (c), l'argument pour (d) étant similaire. Soit $\alpha \in \text{Weak}^k(B)$ et $\beta \in \text{Strong}^l(B)$. Il faut vérifier que l'on a $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \geq 0$ pour tout $\gamma \in \text{Strong}^{2n-k-l}(B)$. Comme $\beta \cdot \gamma \in \text{Strong}^{2n-k}(B)$, cela découle du fait que l'on a $\alpha \in \text{Weak}^k(B)$. \square

2.3.1.2 Une conjecture de Harvey, Knapp et Lawson

Remarquons que les notions de positivité « faiblement positive », « semipositive » et « fortement positive » peuvent être définies plus généralement pour des classes d'une variété algébrique projective complexe [24, §1]. On a la conjecture suivante due à Harvey et Knapp et Lawson [24, p. 376].

Conjecture 2.3.1.7 (Harvey, Knapp, Lawson). *Soit X une variété algébrique complexe projective de dimension n . Alors toute classe rationnelle dans l'intérieur de $\text{Strong}^k(X)$ est la classe d'un cycle effectif à coefficients rationnels pour $0 \leq k \leq n$.*

Remarque 2.3.1.8. Une classe rationnelle $\alpha \in N_{\mathbb{Q}}^k(X)$ est effective si et seulement si elle représente un cycle effectif à coefficients rationnels : soit $\alpha \in \text{Eff}^k(X)$. Comme le cône effectif $\text{Eff}^k(X) \subset N^k(X)$ est engendré par des classes dans $N_{\mathbb{Q}}^k(X)$, il existe d'après le théorème de Carathéodory $v_0, \dots, v_n \in \text{Eff}^k(X) \cap N_{\mathbb{Q}}^k(X)$ tels que $\alpha = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$. Pour $\alpha \in \text{Eff}^k(X) \cap N_{\mathbb{Q}}^k(X)$, on a donc $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ pour $i = 0, \dots, n$, ce qui entraîne le résultat souhaité. Il en découle que la conjecture 2.3.1.7 entraîne $\text{Psef}^k(X) = \text{Strong}^k(X)$ (cf. conjecture 2.1.0.5).

Remarque 2.3.1.9. Une version plus faible de la conjecture 2.3.1.7 est équivalente à la conjecture de Hodge (cf. [24, p. 376-377]). En particulier, la conjecture 2.3.1.7 entraîne la conjecture de Hodge.

À l'origine, Harvey et Knapp [35, II, p. 59] conjecturaient même que toute classe rationnelle dans $\text{Strong}^k(X)$ est effective, mais la restriction à l'intérieur du cône $\text{Strong}^k(X)$ est nécessaire à cause de l'exemple suivant de Lawson [41, Thm. 6.7].

Théorème 2.3.1.10 (Lawson). *Soit E la courbe elliptique $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Alors il existe pour tout $k \geq 2$ une classe entière α dans le bord du cône $\text{Strong}^k(E^{2k})$ qui n'est pas effective.*

Lawson construit une classe satisfaisant les propriétés du théorème 2.3.1.10 comme suit. Soit X une variété algébrique (complexe) projective. Pour une classe $\alpha \in H^{2n-k}(X, \mathbb{R})$, on note $*\alpha$ son dual (de Poincaré) dans $H_k(X, \mathbb{R})$. Lawson étudie les classes fortement positives à travers leurs duals en exploitant une interprétation de l'homologie en fonction des courants sur X . Cela permet de définir une longueur $\|\cdot\|_{\mathbb{Z}}$ sur $H_k(X, \mathbb{Z})$ et une longueur $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$ sur $H_k(X, \mathbb{R})$ (cf. [41, §1]) telles que l'on ait

$$\|\alpha\|_{\mathbb{Z}} \geq \|i(\alpha)\|_{\mathbb{R}},$$

où l'on note $i : H_k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(X, \mathbb{R})$ l'application canonique. De plus, on a $\|m\alpha\|_{\mathbb{Z}} \leq m\|\alpha\|_{\mathbb{Z}}$ et $\|m\beta\|_{\mathbb{R}} = m\|\beta\|_{\mathbb{R}}$ pour tout entier positif m . Une classe $\alpha \in H_k(X, \mathbb{Z})$ est dite *stable*, s'il existe un entier positif m tel que $\|m\alpha\|_{\mathbb{Z}} = \|mi(\alpha)\|_{\mathbb{R}}$.

Lawson montre ensuite le théorème suivant [41, Corol. 2.6].

Théorème 2.3.1.11 (Lawson). *Soit X une variété algébrique complexe projective de dimension n . Une classe fortement positive $\alpha \in H^{2n-2k}(X, \mathbb{Z})$ est effective si et seulement si la classe $*\alpha \in H_{2k}(X, \mathbb{Z})$ est stable.*

Afin d'obtenir une classe fortement positive non effective, on est ainsi ramené à la construction d'une classe d'homologie $\beta \in H_{2k}(X, \mathbb{Z})$ qui n'est pas stable mais qui est le dual d'une classe fortement positive.

Soit \mathbb{R}^{2m} muni du produit intérieur standard et d'une structure complexe $J : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$. Notons $U = (\mathbb{R}^{2m}, J)$ l'espace vectoriel complexe associé. Regardons maintenant une variété abélienne $B = U/\Gamma$, où Γ est un réseau dans U (resp. dans \mathbb{R}^{2m}). Rappelons que l'on a $H_{2k}(B, \mathbb{Z}) = \bigwedge_{\mathbb{Z}}^{2k} \Gamma$ (cf. (2.3)), et que le produit intérieur standard sur \mathbb{R}^{2m} induit naturellement un produit intérieur sur $\bigwedge^k \mathbb{R}^{2m}$. Des formes

$\beta_1, \beta_2 \in \bigwedge^k \Gamma$ sont dites orthogonales si elles sont orthogonales vues comme formes dans $\bigwedge^k \mathbb{R}^{2m}$. Le critère suivant permet alors la construction souhaitée [41, Corol. 6.5].

Corollaire 2.3.1.12 (Lawson). *Soit $\beta \in H_{2k}(B, \mathbb{Z})$. Supposons que l'on peut écrire $\beta = \beta_1 + \beta_2$, où les β_i sont décomposables, $\beta_1 \perp \beta_2$ et $m\beta_i \notin \bigwedge_{\mathbb{Z}}^{2k} \Gamma$ pour tout entier positif m . Alors β n'est pas stable.*

Construisons donc une variété abélienne $B \simeq E^{2k}$, où E est la courbe elliptique $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, et une classe $\beta \in H_{2k}(B, \mathbb{Z})$ satisfaisant ces propriétés : soit $k \geq 2$ et posons $n = 4k$. Soit Γ le réseau dans \mathbb{R}^n engendré par les vecteurs

$$\begin{aligned} v_{2i-1} &= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \\ v_{2i} &= (0, \dots, 0, 1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

pour $i = 1, \dots, 2k$, où le j -ième coefficient de v_j est non nul. Munissons \mathbb{R}^n d'une structure complexe en posant

$$\begin{aligned} Jv_i &:= v_{i+2k}, \\ Jv_{i+2k} &:= -v_i \end{aligned}$$

pour $i = 1, \dots, 2k$. Si l'on note U l'espace vectoriel complexe de dimension $2k$ ainsi obtenu, on voit que la variété abélienne $B = U/\Gamma$ associée est isomorphe à E^{2k} .

Afin de construire la classe $\beta \in H_{2k}(B, \mathbb{Z})$, on pose

$$\begin{aligned} e_i &= v_{2i-1} + \sqrt{2}v_{2i}, \\ e'_i &= v_{2i-1} - \sqrt{2}v_{2i} \end{aligned}$$

pour $i = 1, \dots, 2k$ et

$$\beta_1 = e_1 \wedge \dots \wedge e_{2k}, \quad \beta_2 = e'_1 \wedge \dots \wedge e'_{2k}.$$

La classe $\beta = \beta_1 + \beta_2$ étant invariante sous l'automorphisme de Galois de $\bigwedge_{\mathbb{Z}[\sqrt{2}]}^{2k} \Gamma$ qui envoie $\sqrt{2}$ sur $-\sqrt{2}$, on voit que β est contenu dans $\bigwedge_{\mathbb{Z}}^{2k} \Gamma = H_{2k}(B, \mathbb{Z})$. Comme β_1 et β_2 ont des coefficients irrationnels, aucun multiple entier de β_i appartient à $\bigwedge_{\mathbb{Z}}^k \Gamma$. De plus, β_1 et β_2 sont orthogonaux de sorte que la classe β n'est pas stable par le corollaire 2.3.1.12.

Or on a $Je_i = e_{i+k}$ et $Je'_i = e'_{i+k}$ pour $i = 1, \dots, k$ de sorte qu'un calcul montre que le (k, k) -vecteur

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= (-1)^{k(k-1)/2} \beta \\ &= e_1 \wedge Je_1 \wedge \dots \wedge e_k \wedge Je_k + e'_1 \wedge Je'_1 \wedge \dots \wedge e'_k \wedge Je'_k \end{aligned}$$

est le dual de la (k, k) -forme fortement positive

$$\tilde{\alpha} = e_1^* \wedge Je_1^* \wedge \dots \wedge e_k^* \wedge Je_k^* + e_1^* \wedge Je_1^* \wedge \dots \wedge e_k^* \wedge Je_k^*.$$

Il reste à remarquer que $\tilde{\beta}^2 = 0$ implique que $\tilde{\beta}$ définit une classe sur le bord de $\text{Strong}^{2k}(E^{2k}, \mathbb{R})$.

2.3.1.3 Les résultats de Debarre, Ein, Lazarsfeld et Voisin

On résume les résultats principaux de Debarre, Ein, Lazarsfeld et Voisin concernant les classes pseudoeffectives dans le théorème suivant ([17, corollaire 5.1 et proposition 5.2]).

Théorème 2.3.1.13 (Debarre, Ein, Lazarsfeld, Voisin). *1. Soit E une courbe elliptique à multiplication complexe. Alors on a, pour tout entier positif s et pour $k \in \{0, \dots, s\}$,*

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(E^s) = \text{Psef}^k(E^s) = \text{Strong}^k(E^s).$$

2. Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension $n \geq 2$. Alors on a

$$\mathbf{S}^2 \text{Psef}^1(A \times A) = \text{Psef}^2(A \times A) = \text{Strong}^2(A \times A) = \text{Semi}^2(A \times A), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{S}^{2n-2} \text{Psef}^1(A \times A) = \text{Psef}^{2n-2}(A \times A) = \text{Strong}^{2n-2}(A \times A).$$

Le théorème 2.3.1.10 et le théorème 2.3.1.13 impliquent alors la proposition suivante.

Proposition 2.3.1.14. *Soit E la courbe elliptique $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Alors il existe pour tout $k \geq 2$ une classe entière $\alpha \in \mathbf{N}^k(E^{2k})$ telle que*

$$\alpha \in \text{Psef}^k(E^{2k}) \quad \text{et} \quad \alpha \notin \text{Eff}^k(E^{2k}).$$

C'est un phénomène qui n'apparaît pas en codimension 1, où toute classe pseudoeffective rationnelle est effective à cause de la proposition suivante [7, Lemme 1.1].

Proposition 2.3.1.15 (Bauer). *Soit B une variété abélienne et soit D un diviseur entier sur B . Alors on a $[D] \in \text{Eff}^1(B)$ si et seulement si $[D] \in \text{Nef}^1(B)$.*

Remarque 2.3.1.16. Soit $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Le cône $\text{Psef}^1(E^{2k})$ doit avoir des classes irrationnelles non effectives sur le bord : si toutes les classes irrationnelles dans $\text{Psef}^1(E^{2k})$ étaient effectives, on aurait $\text{Psef}^1(E^{2k}) = \text{Eff}^1(E^{2k})$, ce qui entraînerait donc

$$\text{Eff}^k(E^{2k}) = \text{Psef}^k(E^{2k}) = \text{Strong}^k(E^{2k})$$

par le théorème 2.3.1.13. C'est une contradiction avec la proposition 2.3.1.14, d'où le résultat.

Remarque 2.3.1.17. Soit X une variété algébrique projective. Voisin conjecture que la classe $[Z] \in \mathbf{N}^k(X)$ d'une sous-variété Z de X est big si Z bouge dans une famille telle que les sous-espaces tangents correspondant dans un point général de X dominant la Grassmannienne correspondante. Si B est une variété abélienne, l'égalité $\text{Psef}^k(B) = \text{Strong}^k(B)$ entraîne la conjecture de Voisin [17, Rem. 6.4].

Concernant la comparaison des classes pseudoeffectives et nef, Debarre, Ein, Lazarsfeld et Voisin montrent [17, Cor. 5.1] :

Théorème 2.3.1.18. *1. Soit E une courbe elliptique à multiplication complexe et soit $s \geq 4$ un entier positif. Alors on a, pour $k \in \{2, \dots, s-2\}$,*

$$\text{Psef}^k(E^s) \subsetneq \text{Nef}^k(E^s).$$

2. Soit A une surface abélienne principalement polarisée très générale. Alors on a

$$\text{Psef}^2(A \times A) \subsetneq \text{Nef}^2(A \times A).$$

2.3.2 Le cône $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$

Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale. Dans cette section, on montre que le cône $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ engendré par les intersections de diviseurs pseudoeffectifs est fermé et l'on détermine ses rayons extrémaux pour $k \in \{0, \dots, n\}$ et $e \geq 2$ (proposition 2.3.2.5).

2.3.2.1 Diviseurs pseudoeffectifs

Regardons d'abord le cas $k = 1$ (cf. [40, §5.2] et [54]). Posons $\text{End}_{\mathbb{R}}(A^e) = \text{End}(A^e) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Notons $\text{End}_{\mathbb{R}}^s(A^e)$ l'espace des éléments symétriques par rapport à l'involution de Rosati de $\text{End}_{\mathbb{R}}(A^e)$ et T_x la translation par x dans A^e pour un $x \in A^e$ fixé. Ayant $\widehat{A^e} \simeq A^e$, on obtient un isomorphisme

$$\begin{aligned} N^1(A^e) &\simeq \text{End}_{\mathbb{R}}^s(A^e) \\ L &\mapsto \phi_L \end{aligned}$$

de \mathbb{R} -espaces vectoriels, où $\phi_L(x) = T_x^* L \otimes L^{-1}$. Si l'on identifie $\text{End}_{\mathbb{R}}(A^e)$ avec l'algèbre de matrices $\text{Mat}_e(\mathbb{R})$, l'involution de Rosati correspond à l'involution qui envoie une matrice sur sa transposée, de sorte que $N^1(A^e)$ est isomorphe à l'espace des matrices $e \times e$ réelles symétriques $\text{Sym}_e(\mathbb{R})$. Comme les valeurs propres de ϕ_L sont les mêmes que celles d'une matrice représentant la forme hermitienne H_L associée à L [40, Lemme 2.4.5], le cône $\text{Nef}^1(A^e)$ correspond au cône $\text{Sym}_e^+(\mathbb{R})$ des matrices réelles symétriques semipositives (cf. proposition 2.3.4.2 pour des propriétés élémentaires de ce cône). De plus, l'action de $\text{GL}(W)$ sur $N^1(A^e)$ correspond à l'action de $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ sur $\text{Sym}_e(\mathbb{R})$ donnée par [54, Theorem 4.2]

$$\forall g \in \text{GL}_e(\mathbb{R}) \quad \forall M \in \text{Sym}_e(\mathbb{R}) \quad g \cdot M = gM {}^t g,$$

de sorte que le cône $\text{Nef}^1(A^e)$ est homogène sous l'action de $\text{GL}(W)$.

Ayant $\phi_{\theta_i}(x_1, \dots, x_e) = (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$, on voit que θ_i correspond à une matrice symétrique de rang 1 dans $\text{Sym}_e^+(\mathbb{R})$, d'où l'on déduit que θ_i est extrémal dans $\text{Nef}^1(A^e)$. Toutes les matrices symétriques semipositives de rang 1 étant congruentes sous l'action de $\text{GL}(W)$, on obtient comme cas particulier de [54, Thm 4.3] l'énoncé suivant.

Proposition 2.3.2.1. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale. Alors on a*

$$\text{Psef}^1(A^e) = \text{Nef}^1(A^e) \simeq \text{Sym}_e^+(\mathbb{R})$$

et l'action de $\text{GL}(W)$ sur $\text{Psef}^1(A^e)$ correspond à l'action de $\text{GL}_e(\mathbb{R})$ sur $\text{Sym}_e^+(\mathbb{R})$ par congruence. La classe θ_1 correspond à une matrice de rang 1 sous cette identification, de sorte que l'ensemble des rayons extrémaux de $\text{Psef}^1(A^e)$ est l'orbite $\text{GL}(W) \cdot \theta_1$.

2.3.2.2 Produits de diviseurs pseudoeffectifs

Avant d'étudier le cône $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ pour $k \geq 2$, on aura besoin des notations suivantes.

Notation 2.3.2.2. Si E est un sous-ensemble de \mathbb{R}^d , on note $\text{conv}(E)$ l'enveloppe convexe de E et $\text{cone}(E)$ le cône convexe engendré par E . Pour un cône convexe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$, on note $\text{ext}(\mathcal{C})$ la réunion des rayons extrémaux de \mathcal{C} .

Remarque 2.3.2.3. Soit $\mathcal{B} := \{w_1, \dots, w_e\}$ une base de W . Munissons W du produit intérieur tel que la base \mathcal{B} soit orthonormée et notons $\text{O}(W)$ le groupe orthogonal par rapport à ce produit intérieur. Dans les coordonnées associées à \mathcal{B} , $\text{GL}(W)$ s'identifie avec $\text{GL}_e(\mathbb{R})$, et si l'on identifie $\mathbf{S}^2 W$ avec $N^1(A^e)$ comme décrit dans la remarque 2.2.3.11, l'action de $g \in \text{GL}(W)$ sur θ_1 ne dépend que de la première colonne de la matrice représentant g , de sorte que $\text{GL}(W) \cdot \theta_1 = \mathbb{R}_+^* (\text{O}(W) \cdot \theta_1)$.

Notation 2.3.2.4. Posons pour la suite

$$E_k = \{g_1 \theta_1 \cdots g_k \theta_1 \mid g_1, \dots, g_k \in \text{GL}(W)\} \subset N^k(A^e).$$

Pour α et $\beta \in N^\bullet(A^e)$, on écrit $\alpha \sim \beta$, si α et β sont dans la même orbite sous l'action de $\text{GL}(W)$.

Proposition 2.3.2.5. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n . Le cône $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ est fermé et l'on a l'inclusion*

$$\text{ext}(\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)) \subset E_k$$

qui est une égalité pour $k \in \{0, \dots, n\}$.

Démonstration. Posons $G = \text{GL}(W)$. Comme un cône fermé saillant est l'enveloppe convexe de ses rayons extrémaux, toute classe $\alpha \in \text{Psef}^1(A^e)$ s'écrit comme combinaison convexe de classes dans l'orbite $G \cdot \theta_1$ par la proposition 2.3.2.1. On a donc

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) = \text{cone}\{g_1\theta_1 \cdots g_k\theta_1 \mid g_1, \dots, g_k \in G\}.$$

En particulier, $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A \times A)$ est le cône engendré par l'image de l'application continue (cf. remarque 2.3.2.3)

$$\begin{aligned} \varphi : \text{O}(W) \times \cdots \times \text{O}(W) &\rightarrow \text{N}^k(A^e) \\ (g_1, \dots, g_k) &\mapsto g_1\theta_1 \cdots g_k\theta_1, \end{aligned}$$

i.e., $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ est engendré par un ensemble compact et est donc fermé. Or, l'enveloppe convexe de l'image de φ est compacte de sorte que tout $x \in \text{conv}(\text{im}(\varphi))$ s'écrit comme combinaison convexe d'un nombre fini d'éléments de $\text{im}(\varphi)$. Comme, par la remarque 2.3.2.3,

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) = \text{cone}(\text{conv}(\text{im}(\varphi))) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}^+, x \in \text{conv}(\text{im}(\varphi))\},$$

on a

$$\text{ext}(\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)) \subset E_k.$$

Montrons maintenant

$$E_k \subset \text{ext}(\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e))$$

pour $1 \leq k \leq n$. On raisonne par récurrence sur k . Pour éviter des indices, on le démontre pour $e = 2$, le raisonnement pour le cas $e \geq 3$ étant similaire.

Supposons donc $e = 2$. Pour $k = 1$, c'est la proposition 2.3.2.1. Soit maintenant $k \geq 2$ et soit $g_1\theta_1 \cdots g_k\theta_1 \in E_k$. Comme

$$g_1\theta_1 \cdots g_k\theta_1 \sim \theta_1 \cdot g_1^{-1}g_2\theta_1 \cdots g_1^{-1}g_k\theta_1 =: \alpha,$$

et comme $\text{ext}(\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A \times A))$ est invariant sous l'action de G , il suffit de montrer que α est extrémal. Ecrivons $\alpha = \sum_j s_j$ avec

$$s_j = g_1^j\theta_1 \cdots g_k^j\theta_1$$

et

$$g_i^j\theta_1 = (a_i^j)^2\theta_1 + (b_i^j)^2\theta_2 + a_i^j b_i^j \lambda.$$

Supposons qu'il existe un s_j tel que $b_i^j \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. Cela implique que s_j contient θ_2^k comme terme avec un coefficient strictement positif, ce qui n'est pas possible, car les coefficients de ce terme sont toujours ≥ 0 et α ne contient pas de tel terme. On peut donc supposer, pour tout j , $s_j = \theta_1 \cdot g_2^j\theta_1 \cdots g_k^j\theta_1$, i.e.,

$$\theta_1 \cdot (g_1^{-1}g_2\theta_1 \cdots g_1^{-1}g_k\theta_1) = \sum_j \theta_1 \cdot (g_2^j\theta_1 \cdots g_k^j\theta_1).$$

Par le corollaire 2.2.3.7, on a, pour $1 \leq k \leq n$,

$$g_1^{-1}g_2\theta_1 \cdots g_1^{-1}g_k\theta_1 = \sum_j g_2^j\theta_1 \cdots g_k^j\theta_1,$$

ce qui fournit le résultat par récurrence sur k : tous les $g_2^j\theta_1 \cdots g_k^j\theta_1$ doivent être proportionnels à $g_1^{-1}g_2\theta_1 \cdots g_1^{-1}g_k\theta_1$, donc tous les s_j sont proportionnels à α . \square

Finissons par la proposition suivante qui nous servira dans la section 2.3.4.2.

Proposition 2.3.2.6. *Soit $g \in \mathrm{GL}(W)$, soit $1 \leq k \leq n-1$ et soit*

$$\begin{aligned} \varphi_g : \mathbf{N}^k(A^e) &\rightarrow \mathbf{N}^{k+1}(A^e) \\ \alpha &\mapsto g\theta_1 \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Alors $\varphi_g^{-1}(\mathbf{S}^{k+1} \mathrm{Psef}^1(A^e)) = \mathbf{S}^k \mathrm{Psef}^1(A^e)$.

Démonstration. Il faut montrer que $g\theta_1 \cdot \alpha \in \mathbf{S}^{k+1} \mathrm{Psef}^1(A^e)$ implique que α est contenu dans $\mathbf{S}^k \mathrm{Psef}^1(A^e)$ (l'autre sens est clair). Par la stabilité de $\mathbf{S}^k \mathrm{Psef}^1(A^e)$ sous l'action de $\mathrm{GL}(W)$, il suffit de le montrer pour φ_{id} . Soit $\theta_1 \cdot \alpha \in \mathbf{S}^{k+1} \mathrm{Psef}^1(A^e)$. Par la proposition précédente, on peut alors écrire

$$\theta_1 \cdot \alpha = \sum_j g_1^j \theta_1 \cdots g_k^j \theta_1,$$

où la somme à droite contient un nombre fini de termes. Par l'argument utilisé dans la preuve de la proposition 2.3.2.5, on obtient

$$\theta_1 \cdot \alpha = \theta_1 \cdot \sum_j g_2^j \theta_1 \cdots g_k^j \theta_1.$$

Par le corollaire 2.2.3.7, on a donc

$$\alpha = \sum_j g_2^j \theta_1 \cdots g_k^j \theta_1 \in \mathbf{S}^k \mathrm{Psef}^1(A^e).$$

□

2.3.3 Le cône semipositif

Soit $A = U/\Gamma$ toujours une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n , où U est un espace vectoriel complexe et Γ un réseau dans U . Soit W un espace vectoriel réel de dimension e et écrivons $V^* \simeq U^* \otimes_{\mathbb{R}} W$. On note $V_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel engendré par les vecteurs v_{sr} , $1 \leq s \leq n$, $1 \leq r \leq e$ (cf. (2.9)).

Dans ce chapitre, on étudie les cônes semipositifs $\mathrm{Semi}^k(A^e)$. Dans une première étape, on remarque qu'au lieu de regarder la positivité des formes hermitiennes H_{α} sur $\bigwedge^k V$ associées aux classes $\alpha \in \mathbf{N}^k(A^e)$, on peut étudier la positivité d'une forme bilinéaire symétrique B_{α} sur $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$. Pour k fixé, on montre qu'il existe une base telle que les matrices représentant les formes symétriques B_{α} se décomposent en blocs correspondant aux facteurs irréductibles de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ en tant que $\mathrm{GL}(W)$ -module (proposition 2.3.3.2). La démonstration de la proposition 2.3.3.2 fournira aussi une méthode pour calculer les matrices b_{α} représentant les formes symétriques B_{α} à partir des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(W)$ (remarque 2.3.3.3), ce qui nous permet de déduire que le cône $\mathrm{Semi}^k(A^e)$ ne dépend pas de la dimension de A pour $n \geq k$ (corollaire 2.3.3.4). Enfin, on montre que, pour $1 \leq k \leq n$, on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^k(A \times A) &\simeq \mathrm{Sym}_{k+1}(\mathbb{R}), \\ \mathbf{N}^{2n-k}(A \times A) &\simeq \mathrm{Sym}_{k+1}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

qui associent à une classe semipositive une matrice symétrique semipositive (proposition 2.3.3.9).

On reprend les notations de la section 2.2.3. La base $\{w_1, \dots, w_e\}$ de W est dite *base standard* de W et

$$\{v_{s_1 r_1} \wedge \dots \wedge v_{s_k r_k} \mid 1 \leq s_i \leq n, 1 \leq r_i \leq e, i \in \{1, \dots, k\}\}$$

est dite *base standard* de $\bigwedge^k V$ (resp. de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$) (cf. (2.9)). Le produit intérieur sur $\bigwedge^k V$ (resp. sur $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$) telle que la base standard est une base orthonormée est dit *produit intérieur standard*.

2.3.3.1 Décomposition des formes hermitiennes

Afin d'associer à une classe dans $N^k(A \times A)$ une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel, et pour étudier l'ensemble des formes ainsi obtenues, on a d'abord besoin d'un lemme technique.

Soit $\rho_k : \text{End}(W) \rightarrow \text{End}(\bigwedge^k V)$ la représentation induite par la représentation tautologique W et notons $\rho_k^{\mathcal{B}}(g)$ la matrice représentant $\rho_k(g)$ par rapport aux coordonnées standards sur W resp. sur $\bigwedge^k V$. Rappelons que l'on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \text{End}(W) &\rightarrow \text{End}(A^e) \otimes \mathbb{R} \\ g &\mapsto u_g \end{aligned}$$

et que, par construction, la représentation analytique de u_g est donnée par ρ_1 . Ayant de plus un isomorphisme $\phi : N^1(A^e) \rightarrow \text{End}^s(A^e) \otimes \mathbb{R}$, on peut identifier tout $\alpha \in N^1(A^e)$ avec un $g_\alpha \in \text{End}(W)$. Par [40, Lemme 2.4.5], on a

$$\rho_1^{\mathcal{B}}(g_\alpha) = h_\alpha^{\mathcal{B}}, \quad (2.16)$$

où l'on note $h_\alpha^{\mathcal{B}}$ la matrice représentant la forme hermitienne H_α associée à $\alpha \in N^1(A^e)$ par rapport aux coordonnées standards sur W resp. sur V .

Lemme 2.3.3.1. *Dans les coordonnées standards de W , resp. de $\bigwedge^k V$, on a*

$$\rho_k^{\mathcal{B}}(g_\alpha) = \frac{1}{k!} h_{\alpha^k}^{\mathcal{B}}$$

pour tout $\alpha \in N^1(A^e)$.

Démonstration. Rappelons que le produit extérieur d'une forme hermitienne sur V est défini par

$$\left(\bigwedge^k H \right) (v_1 \wedge \dots \wedge v_k, w_1 \wedge \dots \wedge w_k) = \det(H(v_i, w_j)_{1 \leq i, j \leq k})$$

pour $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ et $w_1 \wedge \dots \wedge w_k$ dans $\bigwedge^k V$. Comme le produit d'intersection de deux classes dans $N^\bullet(A^e)$ correspond au produit extérieur des (k, k) -formes représentant les deux classes, on a $(\bigwedge^k H_\alpha) = \frac{1}{k!} H_{\alpha^k}$ et donc

$$\frac{1}{k!} h_{\alpha^k}^{\mathcal{B}} = \det((h_\alpha^{\mathcal{B}})_{1 \leq i, j \leq k}).$$

En même temps, $\rho_1(g_\alpha)$ induit naturellement un endomorphisme $\bigwedge^k \rho_1(g_\alpha)$ sur $\bigwedge^k V$ en posant $\bigwedge^k \rho_1(g_\alpha)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) := \rho_1(g_\alpha)v_1 \wedge \dots \wedge \rho_1(g_\alpha)v_k$. Dans la base standard de $\bigwedge^k V$, on a

$$\bigwedge^k \rho_1^{\mathcal{B}}(g_\alpha) = \det(\rho_1^{\mathcal{B}}(g_\alpha)_{1 \leq i, j \leq k}).$$

Ayant $\rho_k^{\mathcal{B}}(g_\alpha) = \bigwedge^k \rho_1^{\mathcal{B}}(g_\alpha)$, on obtient le résultat souhaité par (2.16). \square

Remarquons que toutes les matrices h_α^β sont réelles, de sorte que les matrices $h_{\alpha^k}^\beta$ sont également réelles. Comme les α^k engendrent $N^k(A^e)$ [55, Prop. 2.8], on en déduit que, pour tout $\beta \in N^k(A^e)$, la matrice h_β^β est réelle. Cela nous permet d'identifier ces matrices avec une forme bilinéaire symétrique sur $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$. On obtient ainsi une application

$$B : N^k(A^e) \rightarrow \mathbf{S}^2(\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}^*)$$

$$\alpha \mapsto B_\alpha,$$

qui associe à une classe semipositive une forme bilinéaire symétrique semipositive sur $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$. La proposition suivante montre qu'il existe une base de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ telle que, pour tout $\alpha \in N^k(A^e)$, la matrice b_α représentant la forme bilinéaire B_α se décompose en blocs correspondant aux $\mathrm{GL}(W)$ -module irréductibles de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.3.3.2. *Il existe une décomposition*

$$\bigwedge^k V_{\mathbb{R}} = \bigoplus_l M_l$$

en facteurs irréductibles en tant que $\mathrm{GL}(W)$ -modules telle que l'application $B : N^k(A^e) \rightarrow \mathbf{S}^2(\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}^*)$ se factorise par $\bigoplus_l \mathbf{S}^2(M_l^*)$.

Démonstration. Comme la base standard de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ est orthogonale par rapport au produit intérieur standard, il existe par l'astuce unitaire une transformation orthogonale $a : \bigwedge^k V_{\mathbb{R}} \rightarrow \bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ telle que la nouvelle base est adaptée à la décomposition $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}} = \bigoplus_l M_l$. Par la proposition 2.3.3.1, on a donc

$${}^t a \frac{1}{k!} b_{\beta^k} a = {}^t a \rho_k^\beta(g_\beta) a = a^{-1} \rho_k^\beta(g_\beta) a$$

pour tout $\beta \in N^1(A^e)$. Par construction, les matrices $a^{-1} \rho_k^\beta(g_\beta) a$ se décomposent en blocs correspondant aux facteurs irréductibles de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$, et comme les β^k engendrent $N^k(A^e)$, on en déduit le résultat souhaité. \square

Remarque 2.3.3.3. La démonstration de la proposition 2.3.3.2 montre comment on peut calculer les matrices b_α représentant les formes B_α associées aux classes α dans $N^k(A^e)$: soit

$$\bigwedge^k V_{\mathbb{R}} = \bigoplus_l M_l \tag{2.17}$$

une décomposition en facteurs irréductibles orthogonaux deux à deux par rapport au produit intérieur standard sur $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$. Choisissons maintenant une base orthonormée de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ adaptée à cette décomposition. Si l'on note ρ_{M_l} la représentation $\mathrm{End}(W) \rightarrow \mathrm{End}(M_l)$, on a $\rho_k(g) = \bigoplus_l \rho_{M_l}(g)$ et par la proposition 2.3.3.1, on a $\rho_{M_l}(g_\beta) = \frac{1}{k!} b_{\beta^k}|_{M_l}$ pour tout $\beta \in N^1(A^e)$ dans les coordonnées choisies. Cela nous permet de calculer les matrices b_α pour $\alpha \in N^k(A^e)$ comme suit (on l'explique en détail pour $e = 2$, le cas général étant similaire) : on calcule d'abord les représentations $\rho_{M_l} : \mathrm{End}(W) \rightarrow \mathrm{End}(M_l)$ dans une base orthonormée de M_l par rapport au produit intérieur induit sur M_l en tant que sous-module de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$. Supposons que l'on obtient

$$\rho_{M_l} : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Mat}_{\dim(M_l)}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (p_{ij}(a, b, c, d))_{ij},$$

où les p_{ij} sont des polynômes homogènes de degré k . Écrivons de plus

$$p_{ij}(a, b, b, d) = \sum_{|l|=k} t_{ij}^{(l)} a^{l_1} d^{l_2} b^{l_3}$$

avec $l = (l_1, l_2, l_3)$ et $t_{ij}^{(l)} \in \mathbb{R}$. On a d'autre part

$$(a\theta_1 + d\theta_2 + b\lambda)^k = \sum_{|l|=k} \binom{k}{l_1, l_2, l_3} a^{l_1} d^{l_2} b^{l_3} \theta_1^{l_1} \theta_2^{l_2} \lambda^{l_3}.$$

Si $\alpha \in N^k(A^e)$ est une classe représentée par le polynôme

$$\sum_{|l|=k} x_{l_1, l_2, l_3} \theta_1^{l_1} \theta_2^{l_2} \lambda^{l_3},$$

la matrice $b_\alpha|_{M_l}$ représentant $B_\alpha|_{M_l}$, est alors donnée par

$$\frac{1}{k!} b_\alpha|_{M_l} = \left(\sum_{|l|=k} t_{ij}^{(l)} \binom{k}{l_1, l_2, l_3}^{-1} x_{l_1, l_2, l_3} \right)_{ij}. \quad (2.18)$$

Remarquons enfin que si M_l et M'_l sont des modules isomorphes dans la décomposition (2.17), il suffit de calculer $b_\alpha|_{M_l}$ pour étudier la positivité de α . Cela découle du fait que $b_\alpha|_{M'_l}$ est une matrice semblable à $b_\alpha|_{M_l}$, de sorte que les deux matrices ont les mêmes valeurs propres.

Corollaire 2.3.3.4. *Les cônes $\text{Semi}^k(A^e)$ ne dépendent pas de la dimension de A pour $n \geq k$.*

Démonstration. Par la démonstration de la proposition 2.3.3.2 et par la remarque 2.3.3.3, il suffit de montrer qu'un module irréductible apparaît dans la décomposition de $\bigwedge^k W^{\oplus n}$ si et seulement s'il apparaît dans la décomposition de $\bigwedge^k W^{\oplus k}$ pour $n \geq k$: notons l un multi-indice (l_1, \dots, l_k) et posons $|l| = \sum_{i=1}^k l_i$. On a

$$\bigwedge^k W^{\oplus k} = \bigoplus_{|l|=k} \left(\bigwedge^{l_1} W \otimes \dots \otimes \bigwedge^{l_k} W \right)^{\oplus m_l}$$

et

$$\bigwedge^k W^{\oplus n} = \bigoplus_{|l|=k} \left(\bigwedge^{l_1} W \otimes \dots \otimes \bigwedge^{l_k} W \right)^{\oplus \binom{n}{k} m_l},$$

où m_l est un entier positif, d'où le résultat. \square

2.3.3.2 Spectraèdres

Les cônes semipositifs font partie d'une certaine classes de cônes, que l'on étudie en géométrie convexe. Écrivons dans la suite $M \succeq 0$, si M est une matrice $m \times m$ réelle symétrique semipositive.

Définition 2.3.3.5. Soient M_0, M_1, \dots, M_m des matrices $l \times l$ réelles symétriques. L'ensemble

$$\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid M_0 + x_1 M_1 + \dots + x_m M_m \succeq 0\}$$

est appelé un *spectraèdre*. Si $M_0 = 0$, on obtient un cône, et on dit qu'un tel cône est un *cône spectraèdral*.

Si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ est une base de $\mathbf{N}^k(B)$, on a

$$\text{Semi}^k(B) = \left\{ \beta = \sum_{i=1}^m x_i \alpha_i \in \mathbf{N}^k(B) \mid x_1 b_{\alpha_1} + \dots + x_m b_{\alpha_m} \succeq 0 \right\},$$

de sorte que les cônes semipositifs sont des cônes spectraëdreaux.

Définition 2.3.3.6. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^m$ un sous-ensemble fermé convexe. On dit qu'un sous-ensemble $F \subset \mathcal{C}$ est une *face* de \mathcal{C} si

$$\forall x, y \in \mathcal{C} \quad \forall t \in]0, 1[\quad tx + (1-t)y \in F \Rightarrow x, y \in F.$$

Une face F est dite *exposée* si $F = \mathcal{C}$ ou s'il existe un hyperplan $H \subset \mathbb{R}^m$ tel que $\mathcal{C} \setminus H$ est connexe et $F = H \cap \mathcal{C}$.

Par le résultat suivant, on sait que toutes les faces des cônes semipositifs sont exposées.

Théorème 2.3.3.7 (Ramana et Goldman [19]). *Soit \mathcal{C} un spectraëdre. Alors toute face de \mathcal{C} est une face exposée.*

2.3.3.3 Le cas $A \times A$

Regardons maintenant le cas $e = 2$. On montre d'abord que, pour $1 \leq k \leq n$, on a des isomorphismes $\mathbf{N}^k(A \times A) \rightarrow \text{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{N}^{2n-k}(A \times A) \rightarrow \text{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$ qui envoient une classe semipositive sur une matrice symétrique semipositive (proposition 2.3.3.9). Expliquons l'idée pour $n = k$: ayant $V_{\mathbb{R}} = W^{\oplus k}$, le $\text{GL}(W)$ -module $\mathbf{S}^k(W)$ est un facteur irréductible de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$. On choisit alors une base telle que les matrices b_{α} se décomposent en blocs correspondant aux facteurs irréductibles de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$. En prenant la projection sur le bloc correspondant à une copie de $\mathbf{S}^k W$, on obtient l'isomorphisme souhaité.

Ensuite, on applique la méthode décrite dans la remarque 2.3.3.3 afin de calculer l'isomorphisme $\mathbf{N}^k(A \times A) \rightarrow \text{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$ explicitement (lemme 2.3.3.10) et pour obtenir des inéquations définissant les cônes semipositifs $\text{Semi}^k(A \times A)$ pour A de dimension 3 et pour $2 \leq k \leq 4$.

Commençons par un lemme technique.

Lemme 2.3.3.8. *Soit $\rho : \text{End}(W) \rightarrow \text{End}(\mathbf{S}^k W)$ la représentation standard et soit $\rho_B : \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{k+1}(\mathbb{R})$ l'application induite par ρ pour un choix de coordonnées sur W . L'espace vectoriel engendré par $\rho_B(\text{Sym}_2(\mathbb{R}))$ est de dimension $\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \dim \mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W)$.*

Démonstration. On choisit une base $\{w_1, w_2\}$ de W et la base correspondante $\{w_1^i w_2^{k-i} \mid 0 \leq i \leq k\}$ de $\mathbf{S}^k W$. Soit D la matrice diagonale avec $D_{ii} = \binom{n}{i}$ pour $0 \leq i \leq k$. Comme D est inversible, il suffit de montrer que l'espace engendré par les matrices $\rho_B(\text{Sym}_2(\mathbb{R}))D$ est de dimension $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Pour cela, on procède comme suit. D'abord on identifie $\text{Sym}_2(\mathbb{R})$ avec $\mathbf{S}^2 W$ par l'application

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto aw_1^2 + bw_1w_2 + cw_2^2.$$

Alors on a $(aw_1^2 + bw_1w_2 + cw_2^2)^k \in \mathbf{S}^k(\mathbf{S}^2 W)$. Soit $\phi : \mathbf{S}^k(\mathbf{S}^2 W) \simeq \mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W)$ l'isomorphisme donné par la réciprocity d'Hermite (cf. par exemple [60, Lemma 3]). Comme les $(aw_1^2 + bw_1w_2 + cw_2^2)^k$ engendrent $\mathbf{S}^k(\mathbf{S}^2 W)$, les $\phi((aw_1^2 + bw_1w_2 + cw_2^2)^k)$ engendrent $\mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W)$, de sorte qu'il suffit de montrer que l'on a

$$\forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \text{Sym}_2(\mathbb{R}) \quad \phi((aw_1^2 + bw_1w_2 + cw_2^2)^k) = \rho_B(g)D, \quad (2.19)$$

où l'on identifie $\mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W)$ avec $\text{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$ (voir ci-dessous pour les détails).

Pour montrer l'égalité (2.19), on rappelle d'abord que l'isomorphisme ϕ est donné par

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{S}^k(\mathbf{S}^2 W) &\rightarrow \mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W) \hookrightarrow \mathbf{S}^k W \otimes \mathbf{S}^k W, \\ (w_1^2)^{r_1}(w_1 w_2)^{r_2}(w_2^2)^{r_3} &\mapsto (w_1 \otimes w_1)^{*r_1} * (w_1 \otimes w_2 + w_2 \otimes w_1)^{*r_2} * (w_2 \otimes w_2)^{*r_3}, \end{aligned}$$

où $(u_1 \otimes u_2) * (v_1 \otimes v_2) = (u_1 v_1 \otimes u_2 v_2) \in \mathbf{S}^2 W \otimes \mathbf{S}^2 W$ pour $u_1, u_2, v_1, v_2 \in W$. Un calcul montre alors que l'image de $(aw_1^2 + bw_1 w_2 + cw_2^2)^k$ par ϕ est

$$\sum_{r_1+r_2+r_3=k} \binom{k}{r_1, r_2, r_3} a^{r_1} b^{r_2} c^{r_3} \sum_{s=0}^{r_2} \binom{r_2}{s} w_1^{r_1+r_2-s} w_2^{s+r_3} \cdot w_1^{r_1+s} w_2^{r_2-s+r_3}. \quad (2.20)$$

Calculons maintenant $\rho_B(g)D$. Pour $0 \leq j \leq k$, on a

$$\begin{aligned} g \cdot w_1^j w_2^{k-j} &= (aw_1 + bw_2)^j (bw_1 + dw_2)^{k-j} \\ &= \sum_{i=0}^k \left(\sum_{l=0}^i \binom{j}{i-l} \binom{k-j}{l} a^{i-l} b^{j-i+2l} c^{k-j-l} \right) w_1^i w_2^{k-i}, \end{aligned}$$

et ayant $\binom{j}{i-l} \binom{k-j}{l} = \binom{k}{i-l, j-i+2l, k-j-l} \binom{j-i+2l}{l} \binom{k}{j}^{-1}$, on obtient ainsi

$$(\rho_B(g)D)_{ij} = \sum_{l=0}^i \binom{k}{i-l, j-i+2l, k-j-l} \binom{j-i+2l}{l} a^{i-l} b^{j-i+2l} d^{k-j-l}, \quad (2.21)$$

et l'on vérifie facilement que cette matrice est symétrique. Cela nous permet de voir $\eta(g) := \rho_B(g)D$ comme un élément dans $\mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W)$ via l'isomorphisme $\mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W) \simeq \text{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$ qui envoie $\eta(g)$ sur $\sum_{0 \leq i \leq j \leq k} \eta(g)_{ij} w_1^i w_2^{k-i} \cdot w_1^j w_2^{k-j}$. En posant $r_1 = i-l, r_2 = j-i+2l, r_3 = k-j-l$ pour i, j, l fixés, le terme associé de la somme donnant $\eta(g)_{ij}$ s'écrit

$$\binom{k}{r_1, r_2, r_3} \binom{r_2}{l} a^{r_1} b^{r_2} d^{r_3},$$

et l'on a

$$\begin{aligned} i &= r_1 + r_2 - l, & k - i &= l + r_3, \\ j &= r_1 + l, & k - j &= r_2 - l + r_3, \end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat souhaité en comparant avec (2.20). \square

Étudions maintenant la décomposition de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ en $\text{GL}(W)$ -modules irréductibles. Comme on a $V_{\mathbb{R}} \simeq W^{\oplus n}$ en tant que $\text{GL}(W)$ -modules, on remplace $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ par $\bigwedge^k W^{\oplus n}$ dans la suite. Or

$$\begin{aligned} \bigwedge^k W^{\oplus n} &= \bigoplus_{s=\max\{0, k-n\}}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (\det(W)^{\otimes s} \otimes W^{\otimes k-2s}) \binom{n}{k-2s} \binom{2s}{s} \\ &= \bigoplus_{s=\max\{0, k-n\}}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left(\bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{k-2s}{2} \rfloor} \det(W)^{\otimes i+s} \otimes \mathbf{S}^{k-2s-2i} W \right) \binom{n}{k-2s} \binom{2s}{s}. \end{aligned}$$

Posons $M_{k,l} = \det(W)^{\otimes l} \otimes \mathbf{S}^{k-2l} W$ pour $0 \leq l \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ et notons $m_{k,l}$ la multiplicité de $M_{k,l}$ dans la décomposition de $\bigwedge^k W^{\oplus n}$. Soit

$$pl : \bigoplus_l \mathbf{S}^2(M_{k,l}^*)^{\oplus m_{k,l}} \rightarrow \mathbf{S}^2(M_{k,l}^*)$$

une projection sur une des copies de $\mathbf{S}^2(M_{k,l}^*)$.

La proposition suivante fournit alors les isomorphismes $\mathbf{N}^k(A \times A) \simeq \text{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbf{N}^{2n-k}(A \times A) \rightarrow \text{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$) qui envoient les classes semipositives sur des matrices semipositives pour $1 \leq k \leq n$ (après un choix de coordonnées sur $\mathbf{S}^k W^*$ (resp. sur $\mathbf{S}^k W^* \otimes \det(W^*)^{\otimes n-k}$)).

Proposition 2.3.3.9. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n et soit $0 \leq k \leq 2n$. Alors les $\text{GL}(W)$ -morphisms*

$$p_l \circ B : \mathbf{N}^k(A \times A) \rightarrow \mathbf{S}^2(M_{k,l}^*)$$

sont surjectifs pour tout l . En particulier, pour $1 \leq k \leq n$, les applications

$$p_0 \circ B : \mathbf{N}^k(A \times A) \rightarrow \mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W^*)$$

resp.

$$p_{n-k} \circ B : \mathbf{N}^{2n-k}(A \times A) \rightarrow \mathbf{S}^2(\mathbf{S}^k W^* \otimes \det(W^*)^{\otimes n-k})$$

sont des isomorphismes de $\text{GL}(W)$ -modules qui envoient toute classe semipositive sur une forme bilinéaire symétrique semipositive.

Démonstration. Rappelons que l'on a un isomorphisme $\mathbf{N}^1(A^e) \simeq \text{Sym}_2(\mathbb{R})$, et que l'on note g_β la matrice symétrique ainsi associée à $\beta \in \mathbf{N}^1(A^e)$. Soit $\rho_{M_{k,l}} : \text{End}(W) \rightarrow \text{End}(M_{k,l})$ la représentation standard et

$$\rho_{M_{k,l}}^{\mathcal{B}} : \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{\dim(M_{k,l})}(\mathbb{R})$$

l'application induite pour des coordonnées sur W et $M_{k,l}$ fixées. Par la démonstration de la proposition 2.3.3.2, resp. par la remarque 2.3.3.3, on peut supposer que les coordonnées sont choisies de façon que $p_l \circ B_{\beta^k} = \rho_{M_{k,l}}^{\mathcal{B}}(g_\beta)$ pour tout $\beta \in \mathbf{N}^1(A \times A)$. Comme les β^k engendrent $\mathbf{N}^k(A^e)$, l'application $p_l \circ h$ est donc surjective si et seulement si les matrices

$$\rho_{M_{k,l}}^{\mathcal{B}}(g_\beta) = \det(g_\beta)^{2l} \cdot \rho_{M_{k,l}}^{\mathcal{B}}(g_\beta)$$

engendrent un espace vectoriel de dimension $\frac{(k-2l+1)(k-2l)}{2}$. Or les applications $\rho_{M_{k,l}}^{\mathcal{B}}$ sont polynomiales et l'ensemble $U := \{\beta \mid \det(\beta) \neq 0\}$ est un ouvert de Zariski dans $\text{Sym}_2(\mathbb{R})$, de sorte que

$$\langle \rho_{M_{k,l}}^{\mathcal{B}}(U) \rangle = \langle \rho_{M_{k-2l,0}}^{\mathcal{B}}(U) \rangle.$$

Il suffit ainsi de montrer que $\rho_{M_{k,0}}^{\mathcal{B}}(U)$ engendre un espace vectoriel de dimension $\frac{(k+2)(k+1)}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui est la conclusion du lemme 2.3.3.8. \square

Soit $\rho : \text{End}(W) \rightarrow \text{End}(\mathbf{S}^k W)$ la représentation standard et $\rho_{\mathcal{B}} : \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{k+1}(\mathbb{R})$ l'application induite pour des coordonnées associées à une base $\{w_1, w_2\}$ de W et la base correspondante $\{w_1^i w_2^{k-i} \mid 0 \leq i \leq k\}$ de $\mathbf{S}^k W$. Soit $D \in \text{Mat}_{k+1}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale telle que $D_{ii} = \binom{n}{i}$ pour $0 \leq i \leq k$. Par la démonstration du lemme 2.3.3.8, on sait que les matrices $\rho_{\mathcal{B}}(g)D$ sont symétriques, de sorte que l'on obtient un isomorphisme $b' : \mathbf{N}^k(A \times A) \rightarrow \text{Sym}_{k+1}(\mathbb{R})$ induit par la condition $\beta^k \mapsto \rho_{\mathcal{B}}(g_\beta)D$ pour tout $\beta \in \mathbf{N}^1(A \times A)$ (cf. lemme 2.3.3.1).

Lemme 2.3.3.10. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n . Soit $1 \leq k \leq n$ et soit $\alpha \in \mathbf{N}^k(A \times A)$. Avec les notations ci-dessus, b'_α représente $p_0 \circ B_\alpha = B_\alpha|_{\mathbf{S}^k W}$ pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^k(A \times A)$ et l'on a*

$$b'_{\theta_1 \cdot \alpha} = \left(\begin{array}{c|c} b'_\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

pour $1 \leq k \leq n-1$.

Démonstration. On a un plongement canonique

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{S}^k W &\rightarrow W^{\otimes k} \\ v_1 \cdots v_k &\mapsto \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}. \end{aligned}$$

Comme chaque tenseur dans $\varphi(v_1^i v_2^{k-i})$ apparaît $i!(k-i)!$ fois, et comme on a $\binom{k}{i}$ tenseurs, les vecteurs

$$\frac{1}{i!(k-i)! \sqrt{\binom{k}{i}}} \varphi(v_1^i v_2^{k-i}), \quad 0 \leq i \leq k,$$

forment une base orthonormée de $\mathbf{S}^k W$ comme sous-module de $\bigwedge^k V_{\mathbb{R}}$ par rapport au produit intérieur standard. Soit $a : \mathbf{S}^k W \rightarrow \mathbf{S}^k W$ le changement de base donné par la matrice

$$a_{ij} = \begin{cases} c_0 i!(k-i)! \sqrt{\binom{k}{i}} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $c_0 \in \mathbb{R}$. La matrice $\rho_{\mathcal{B}'}(g)$ représentant $\rho(g)$ dans la nouvelle base \mathcal{B}' est alors donnée par $\rho_{\mathcal{B}'}(g) = a \rho_{\mathcal{B}}(g) a^{-1}$. La matrice $\rho_{\mathcal{B}'}(g)$ ne dépend pas de la constante c_0 de sorte que $\rho_{\mathcal{B}'}(g)$ est la matrice représentant $\rho(g)$ dans une base orthonormée de $\mathbf{S}^k W$. En particulier, on a

$$a \rho_{\mathcal{B}}(g_{\beta}) a^{-1} = \rho_{\mathcal{B}'}(g_{\beta}) = b_{\beta^k} |_{\mathbf{S}^k W}$$

pour tout $\beta \in \mathbb{N}^1(A \times A)$ et donc $\rho_{\mathcal{B}}(g_{\beta}) = a^{-1} b_{\beta^k} |_{\mathbf{S}^k W} a$. Si l'on prend $c_0 = \frac{1}{k!}$, on obtient ainsi

$$\rho_{\mathcal{B}}(g_{\beta}) D = {}^t(a^{-1}) b_{\beta^k} |_{\mathbf{S}^k W} a^{-1},$$

ce qui fournit la première partie de l'énoncé. Posons

$$b'_{\alpha} = {}^t(a^{-1}) b_{\alpha} |_{\mathbf{S}^k W} a^{-1}$$

et notons $(b'_{\alpha})_{ij}$ le coefficient correspondant aux coordonnées i, j dans la matrice b'_{α} pour $0 \leq i, j \leq k$. On peut calculer ces matrices en calculant les b'_{β^k} et en appliquant ensuite la méthode décrite dans la remarque 2.3.3.3. De (2.21) on obtient ainsi

$$(b'_{\theta_1 \cdot \alpha})_{ij} = \sum_{\substack{0 \leq l \leq k-i \\ j-i \leq l \leq j}} \binom{i-j+2l}{l} x_{k-i-l, j-l, i-j+2l}(\theta_1 \cdot \alpha)$$

pour $0 \leq i, j \leq k$ et

$$(b'_{\alpha})_{ij} = \sum_{\substack{0 \leq l \leq k-i \\ j-i \leq l \leq j}} \binom{i-j+2l}{l} x_{k-1-i-l, j-l, i-j+2l}(\alpha)$$

pour $0 \leq i, j \leq k-1$. Or, on a

$$x_{k-l-i-1, j-l, i-j+2l}(\alpha) = x_{k-i-l, j-l, i-j+2l}(\theta_1 \cdot \alpha)$$

pour $0 \leq l \leq k-i-1$,

$$x_{0, j-k+i, 2k-i-j}(\theta_1 \cdot \alpha) = 0$$

et

$$(b'_{\theta_1 \cdot \alpha})_{ik} = (b'_{\theta_1 \cdot \alpha})_{ki} = 0,$$

ce qui fournit le résultat souhaité. \square

En suivant la procédure décrite dans la remarque 2.3.3.3, on calcule maintenant des représentations des cônes $\text{Semi}^k(A \times A)$ pour $k = 2, 3, 4$ pour une variété abélienne A principalement polarisée très générale de dimension 3. On l'explique en détail pour $k = 2$.

1. **Le cas $k = 2$.** Remarquons d'abord que l'on a

$$\bigwedge^2 W^{\oplus 3} = (\mathbf{S}^2 W)^{\oplus 3} \oplus \det(W)^{\oplus 6}.$$

Fixons des coordonnées sur W telles que l'action de $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur $\mathbf{S}^2 W$ et $\det(W)$ soit donnée par

$$\rho_{\det(W)}(g) = ad - bc \quad \rho_{\mathbf{S}^2 W}(g) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ac & ad + bc & 2bd \\ c^2 & cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$(a\theta_1 + d\theta_2 + b\lambda)^2 = a^2\theta_1 + d^2\theta_2 + b^2\lambda^2 + 2ad\theta_1\theta_2 + 2ab\theta_1\lambda + 2db\theta_2\lambda$$

et $g_{a\theta_1 + d\theta_2 + b\lambda} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. Par le lemme 2.3.3.1, la matrice représentant la forme bilinéaire symétrique $B_{(a\theta_1 + d\theta_2 + b\lambda)^2}$ est donc semblable à une matrice diagonale par blocs composée de 6 blocs de la forme $ad - b^2$ et 3 blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ab & ad + b^2 & 2bd \\ b^2 & bd & d^2 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, pour

$$\alpha = x_{2,0,0}\theta_1^2 + x_{1,1,0}\theta_1\theta_2 + x_{0,2,0}\theta_2^2 + x_{1,0,1}\theta_1\lambda + x_{0,1,1}\theta_2\lambda + x_{0,0,2}\lambda^2 \in \mathbf{N}^2(A \times A),$$

une matrice représentant B_α est similaire à une matrice diagonale par blocs composée de 6 blocs de la forme

$$\frac{1}{2}x_{1,1,0} - x_{0,0,2} \tag{2.22}$$

et 3 blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} x_{2,0,0} & \frac{1}{2}x_{1,0,1} & x_{0,0,2} \\ x_{1,0,1} & \frac{1}{2}x_{1,1,0} + x_{0,0,2} & x_{0,1,1} \\ x_{0,0,2} & \frac{1}{2}x_{0,1,1} & x_{0,2,0} \end{pmatrix},$$

ce qui permet de déduire des inéquations définissant $\text{Semi}^2(A \times A)$.

Pour obtenir une matrice diagonale par blocs représentant B_α , il suffit par le lemme 2.3.3.10 de remplacer la matrice $\rho_{\mathbf{S}^2 W}(g)$ par la matrice $\rho_{\mathbf{S}^2 W}(g)D$ (où D est la matrice diagonale avec $D_{ii} = \binom{2}{i}$ pour $i = 0, 1, 2$) dans le raisonnement ci-dessus. Une matrice b_α représentant B_α est alors donnée par une matrice diagonale par blocs composée de 6 blocs de la forme (2.22) et 3 blocs de la forme

$$b_\alpha|_{\mathbf{S}^2 W} = \begin{pmatrix} x_{2,0,0} & x_{1,0,1} & x_{0,0,2} \\ x_{1,0,1} & x_{1,1,0} + 2x_{0,0,2} & x_{0,1,1} \\ x_{0,0,2} & x_{0,1,1} & x_{0,2,0} \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

et la classe α est semipositive si et seulement si les matrices (2.22) et (2.23) sont semipositives. On retrouve ainsi la représentation du cône $\text{Semi}^2(A \times A)$ déjà obtenue dans [17] par un calcul explicite.

2. **Le cas $k = 3$.** Ayant

$$\bigwedge^3 W^{\oplus 3} \simeq (\det(W) \otimes W)^{\oplus 8} \oplus \mathbf{S}^3 W,$$

la classe

$$\alpha = \sum_{|l|=3} x_l \theta_1^{l_1} \theta_2^{l_2} \lambda^{l_3} \in \mathbf{N}^3(A \times A) = \mathbf{S}^3 \mathbf{N}^1(A \times A)$$

est semipositive si et seulement si les matrices

$$b_\alpha|_{\det(W) \otimes W} = \begin{pmatrix} 2x_{2,1,0} - 2x_{1,0,2} & x_{1,1,1} - 6x_{0,0,3} \\ x_{1,1,1} - 6x_{0,0,3} & 2x_{1,2,0} - 2x_{0,1,2} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

et

$$b_\alpha|_{\mathbf{S}^3 W} = \begin{pmatrix} x_{3,0,0} & x_{2,0,1} & x_{1,0,2} & x_{0,0,3} \\ x_{2,0,1} & x_{2,1,0} + 2x_{1,0,2} & x_{1,1,1} + 3x_{0,0,3} & x_{0,1,2} \\ x_{1,0,2} & x_{1,1,1} + 3x_{0,0,3} & x_{1,2,0} + 2x_{0,1,2} & x_{0,2,1} \\ x_{0,0,3} & x_{0,1,2} & x_{0,2,1} & x_{0,3,0} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

sont semipositives.

3. **Le cas $k = 4$.**

Comme les seuls facteurs irréductibles de $\bigwedge^4 W^{\oplus 3}$ sont $\det(W)^{\otimes 2}$ et $\det(W) \otimes \mathbf{S}^2 W$, un polynôme

$$P(\theta_1, \theta_2, \lambda) = \sum_{|l|=4} x_l \theta_1^{l_1} \theta_2^{l_2} \lambda^{l_3} \in \mathbf{S}^4 \mathbf{N}^1(A \times A)$$

représente une classe semipositive $\alpha \in \mathbf{N}^4(A \times A)$ si et seulement si les matrices

$$b_\alpha|_{\det(W)^{\otimes 2}} = x_{2,2,0} - x_{1,1,2} + 6x_{0,0,4} \quad (2.26)$$

et

$$b_\alpha|_{\det(W) \otimes \mathbf{S}^2 W} = \begin{pmatrix} 3x_{3,1,0} - 2x_{2,0,2} & 2x_{2,1,1} - 6x_{1,0,3} & x_{1,1,2} - 12x_{0,0,4} \\ 2x_{2,1,1} - 6x_{1,0,3} & 4x_{2,2,0} - 24x_{0,0,4} & 2x_{1,2,1} - 6x_{0,1,3} \\ x_{1,1,2} - 12x_{0,0,4} & 2x_{1,2,1} - 6x_{0,1,3} & 3x_{1,3,0} - 2x_{0,2,2} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

sont semipositives.

Remarque 2.3.3.11. Pour $k = 2$ (resp. pour $k = 3$), on obtient ainsi aussi une représentation du cône $\text{Semi}^2(A \times A)$ (resp. de $\text{Semi}^3(A \times A)$) pour une variété abélienne principalement polarisée très générale A de dimension ≥ 2 (resp. pour A de dimension ≥ 3) par le corollaire 2.3.3.4.

2.3.4 Comparaison des cônes

Pour la suite, on suppose que A est une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension n .

2.3.4.1 Classes pseudoeffectives et classes semipositives

Dans cette section, on étudie les inclusions de cônes

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) \subset \text{Psef}^k(A^e) \subset \text{Strong}^k(A^e) \subset \text{Semi}^k(A^e) \quad (2.28)$$

en se servant des caractérisations explicites des cônes $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ (en fonction de générateurs) et $\text{Semi}^k(A^e)$ (en fonction d'inéquations le définissant). Le résultat principal est, qu'en codimension $3 \leq k \leq n$ et pour $e \geq 2$, on a (théorème 2.3.4.3)

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) \subsetneq \text{Semi}^k(A^e).$$

Par ailleurs, on montre que les inclusions (2.28) sont des égalités pour $n = 3$ et $k = 4$ (proposition 2.3.4.4).

Lemme 2.3.4.1. *Soit $1 \leq l \leq e$ et soit $\alpha \in \mathbf{N}^k(A^l)$. Si $p : A^e \rightarrow A^l$ est une projection,*

1. *pour $1 \leq k \leq ln$, la classe $p^*\alpha$ est semipositive si et seulement si α est semipositive ;*
2. *pour $1 \leq k \leq n$, la classe $p^*\alpha$ est dans le cône $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ si et seulement si $\alpha \in \mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^l)$.*

Démonstration. La projection $p : A^e \rightarrow A^l$ correspond à une projection $\tilde{p} : U^{\oplus e} \rightarrow U^{\oplus l}$ qui induit naturellement une application $\tilde{p}_k : \bigwedge^k U^{\oplus e} \rightarrow \bigwedge^k U^{\oplus l}$. Avec ces notations, on a $H_{\tilde{p}_k^* \alpha} = \tilde{p}_k^* H_\alpha$, et comme \tilde{p}_k est surjectif, $\tilde{p}_k^* H_\alpha$ est semipositive si et seulement si H_α est semipositive, ce qui montre la première partie de l'énoncé.

Montrons la deuxième partie du lemme. On peut supposer que p est la projection sur les l premiers facteurs de A^e . Si $\alpha \in \mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A \times A)$, il est clair que l'on a aussi $p^*\alpha \in \mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$. Supposons donc $p^*\alpha \in \mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$, i.e., on peut écrire

$$p^*\alpha = \sum_{j=1}^l g_1^j \theta_1 \cdots g_k^j \theta_1$$

avec $g_i^j \in \text{GL}(W)$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq l$. Ecrivons $g_i^j \theta_1 = \sum_{r=1}^e (a_r^{i,j})^2 \theta_r + \sum_{1 \leq s < t \leq e} a_s^{i,j} a_t^{i,j} \lambda_{st}$, où $a_r^{i,j} \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq r \leq e$. Comme $p^*\alpha$ est un polynôme en θ_r, λ_{st} , $1 \leq r \leq l$, $1 \leq s < t \leq l$, on a $a_r^{i,j} = 0$ pour $r \geq l$ et tout i, j . Cela entraîne $\alpha \in \mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e)$ et donc le résultat souhaité. \square

Rappelons quelques propriétés élémentaires du cône $\text{Sym}_k^+(\mathbb{R})$ des matrices $k \times k$ réelles symétriques semipositives [5, II.12].

Proposition 2.3.4.2. *Soit $\text{Sym}_k^+(\mathbb{R})$ le cône des matrices $k \times k$ réelles symétriques semipositives. Alors on a*

1. $\text{ext}(\text{Sym}_k^+(\mathbb{R})) = \{M \in \text{Sym}_k^+(\mathbb{R}) \mid \text{rang}(M) = 1\}$.
2. *Pour toute matrice A de rang $r < k$, il existe une (unique) face F de $\text{Sym}_k^+(\mathbb{R})$ telle que A est dans l'intérieur relatif de F . De plus, il existe une isométrie $F \simeq \text{Sym}_r^+(\mathbb{R})$ préservant le rang des matrices dans F .*

Théorème 2.3.4.3. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension $n \geq 3$. Alors on a*

$$\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A^e) \subsetneq \text{Semi}^k(A^e) \tag{2.29}$$

pour $3 \leq k \leq n$ et pour $e \geq 2$. Sous les mêmes restrictions sur k et n , on a de plus

$$\text{ext}(\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A \times A)) \subset \text{ext}(\text{Semi}^k(A \times A)). \tag{2.30}$$

Démonstration. Montrons d'abord (2.29) pour $e = 2$. Soit

$$\alpha = \theta_1^2 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2^2 + \lambda^2.$$

Par la représentation explicite du cône $\text{Semi}^2(A \times A)$ donnée dans (2.22) et (2.23), cette classe n'est pas semipositive, et ayant $\mathbf{S}^2 \text{Psef}^1(A \times A) = \text{Semi}^2(A \times A)$ (cf. [17, Thm. 4.1]), cela veut dire qu'elle n'est pas contenue dans $\mathbf{S}^2 \text{Psef}^1(A \times A)$. Par la proposition 2.3.2.6, on a donc

$$\theta_1^k \cdot \alpha \notin \mathbf{S}^{k+2} \text{Psef}^1(A \times A)$$

pour $k \in \{0, \dots, n-2\}$, alors que l'on a par la représentation explicite du cône $\text{Semi}^3(A \times A)$ donnée dans (2.24) et (2.25), et par le lemme 2.3.1.6,

$$\theta_1^{n-2} \cdot \alpha \in \text{Semi}^n(A \times A),$$

ce qui montre (2.29) pour $e = 2$. On en déduit (2.29) pour $e \geq 3$ en tirant en arrière les cônes par des projections et en appliquant le lemme 2.3.4.1.

Afin de montrer (2.30), on rappelle d'abord que la réunion des rayons extrémaux de $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A \times A)$ est donnée par (proposition 2.3.2.5)

$$E_k = \{g_1 \theta_1 \cdots g_k \theta_1 \mid g_1, \dots, g_k \in \text{GL}(W)\} \subset \mathbf{N}^k(A \times A)$$

pour $k \in \{0, \dots, n\}$. Par l'isomorphisme décrit dans le lemme 2.3.3.10 et par la proposition 2.3.4.2, il suffit de montrer que la matrice b'_α (comme définie dans le lemme 2.3.3.10) est de rang 1 pour tout $\alpha \in E_k$. Pour $k = 1$, c'est la proposition 2.3.2.1 de sorte que l'on peut supposer $k \geq 2$. Comme E_k est invariant sous l'action de $\text{GL}(W)$, on peut supposer $\alpha = \theta_1 \cdot g_2 \theta_1 \cdots g_k \theta_1$. Par récurrence, on a $\text{rang}(b'_{g_2 \theta_1 \cdots g_k \theta_1}) = 1$ et par le lemme 2.3.3.10, cela fournit $\text{rang}(b'_\alpha) = 1$, d'où le résultat. \square

Par [17] (cf. théorème 2.3.1.13), on sait que l'on a

$$\mathbf{S}^{2n-2} \text{Psef}^1(A \times A) = \text{Strong}^{2n-2}(A \times A).$$

La proposition suivante complète ce résultat pour $n = 3$ et elle fournit ainsi des inéquations définissant $\text{Psef}^4(A \times A)$ dans ce cas.

Proposition 2.3.4.4. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension 3. Alors on a*

$$\mathbf{S}^4 \text{Psef}^1 = \text{Psef}^4(A \times A) = \text{Strong}^4(A \times A) = \text{Semi}^4(A \times A).$$

Démonstration. Posons

$$L_{\geq 0} = \{\alpha \in \mathbf{N}^4(A \times A) \mid x_{2,2,0} - x_{1,1,2} + 6x_{0,0,4} \geq 0\}$$

et

$$L = \{\alpha \in \mathbf{N}^4(A \times A) \mid x_{2,2,0} - x_{1,1,2} + 6x_{0,0,4} = 0\}.$$

On montre $\mathbf{S}^4 \text{Psef}^1(A \times A) = \text{Semi}^4(A \times A)$. Par la représentation explicite du cône $\text{Semi}^4(A \times A)$ donnée dans (2.26) et (2.27), ce cône est isomorphe à l'intersection du cône $\text{Sym}_3^+(\mathbb{R})$ avec le demi-espace $L_{\geq 0}$. Il en découle qu'une classe semipositive α dans $\mathbf{N}^4(A \times A)$ est extrémale dans $\text{Semi}^4(A \times A)$ si et seulement si α est semipositive et la matrice $b'_\alpha := b_\alpha|_{\det(W) \otimes \mathbf{S}^2 W}$ est de rang 1 : si b'_α est de rang 1, il est clair que α est une classe extrémale par la proposition 2.3.4.2.

Inversement, supposons maintenant $\text{rang}(b'_\alpha) \neq 1$. Si $\text{rang}(b'_\alpha) = 2$, la matrice b'_α appartient à l'intérieur relatif d'une face F de $\text{Sym}_3^+(\mathbb{R})$ qui est isomorphe à $\text{Sym}_2^+(\mathbb{R})$ (cf. proposition 2.3.4.2). On voit tout de suite que b'_α ne peut pas être extrémale dans $F \cap L_{\geq 0}$ et donc pas dans $\text{Semi}^4(A \times A)$. Si la matrice b'_α est de rang 3, elle est dans l'intérieur du cône $\text{Sym}_3^+(\mathbb{R})$. Il existe donc un voisinage U dans

l'intérieur de $\text{Sym}_3^+(\mathbb{R})$ contenant b'_α . Il s'ensuit que l'on peut écrire $b'_\alpha = M_1 + M_2$ avec $M_1, M_2 \in \text{Sym}_3^+(\mathbb{R}) \cap L_{\geq 0} \cap U$ et $M_1 \neq M_2$, de sorte que b'_α n'est pas extrémale.

Il suffit ainsi de montrer que toute matrice de rang 1 contenue dans $\text{Sym}_3^+(\mathbb{R}) \cap L_{\geq 0}$ représente une classe dans $\mathbf{S}^4 \text{Psef}^1(A \times A)$. On montre qu'une matrice de rang 1 est représentée soit par une classe $g(\theta_1^2 \theta_2^2)$ soit par $g(\theta_1^3 \theta_2)$ pour un $g \in \text{GL}(W)$. Remarquons qu'une matrice symétrique de rang 1 est entièrement déterminée par sa première colonne si celle-ci est non nulle.

Montrons d'abord que toute matrice b'_α de rang 1 dans $\text{Sym}_3^+(\mathbb{R}) \cap L_{>0}$ correspond à une classe $g(\theta_1^2 \theta_2^2)$. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Supposons d'abord $c = d = 1$ et regardons

$$g(\theta_1^2 \theta_2^2) = (\theta_1 + a^2 \theta_2 + a\lambda)^2 (\theta_1 + b^2 \theta_2 + b\lambda)^2.$$

La matrice b'_α représente donc une telle classe $g(\theta_1^2 \theta_2^2)$ si et seulement si les équations suivantes, que l'on obtient comme conditions sur la première colonne, sont satisfaites :

$$\begin{aligned} 3x_{3,1,0} - 2x_{2,0,2} &= 4(a-b)^2, \\ 2x_{2,1,1} - 6x_{1,0,3} &= 4(a-b)^2(a+b), \\ x_{1,1,2} - 12x_{0,0,4} &= 4(a-b)^2 ab. \end{aligned}$$

Comme $a \neq b$, on est ramené aux équations

$$\begin{aligned} 3x_{3,1,0} - 2x_{2,0,2} &= 1, \\ 2x_{2,1,1} - 6x_{1,0,3} &= a+b, \\ x_{1,1,2} - 12x_{0,0,4} &= ab. \end{aligned}$$

Autrement dit, la matrice b'_α représente une classe $g(\theta_1^2 \theta_2^2)$ si et seulement si ce système admet une solution réelle. C'est équivalent à dire que le polynôme

$$P(y) = (x_{1,1,2} - 12x_{0,0,4}) - (2x_{2,1,1} - 6x_{1,0,3})y + y^2 \quad (2.31)$$

admet deux racines réelles distinctes (car $a \neq b$). Comme la matrice est de rang 1, on a

$$(2x_{2,1,1} - 6x_{1,0,3})^2 = 4x_{2,2,0} - 24x_{0,0,4}$$

et le discriminant de P vaut

$$\Delta(P) = x_{2,2,0} - x_{1,1,2} + 6x_{0,0,4}.$$

Ainsi on voit que toute matrice de rang 1 avec $3x_{3,1,0} - 2x_{2,0,2} \neq 0$, qui est dans $L_{>0}$, est aussi dans $\mathbf{S}^4 \text{Psef}^1(A \times A)$. De la même façon, on montre le résultat pour les matrices b'_α de rang 1 telles que $3x_{1,3,0} - 2x_{0,2,2} \neq 0$. Si

$$3x_{1,3,0} - 2x_{0,2,2} = 3x_{3,1,0} - 2x_{2,0,2} = 0,$$

et la matrice est de rang 1, elle représente un multiple de $\theta_1^2 \theta_2^2$.

Il reste donc à montrer que les matrices semipositives de rang 1 dans L correspondent aux classes $g(\theta_1^3 \theta_2)$. Or une matrice de rang 1 correspond à une classe $g(\theta_1^3 \theta_2)$ si et seulement si les équations suivantes, obtenues comme conditions sur la première colonne, sont satisfaites :

$$\begin{aligned} 3x_{3,0,0} - 2x_{2,0,2} &= 1, \\ 2x_{2,1,1} - 6x_{1,0,3} &= 2a, \\ x_{1,1,2} - 12x_{0,0,4} &= a^2, \end{aligned}$$

ce qui est le cas si et seulement si le polynôme $P(y)$ défini dans (2.31) admet une racine double réelle a . Par un raisonnement comme pour $g(\theta_1^2\theta_2^2)$, on trouve que c'est le cas si et seulement si la classe est contenue dans L , ce qui fournit le résultat souhaité. \square

Remarque 2.3.4.5. Comme tous les modules irréductibles dans une décomposition de $\bigwedge^{2n-2} W^{\oplus n}$ sont isomorphes à $\det(W)^{\otimes n-1}$ ou à $\det(W)^{\otimes n-2} \otimes \mathbf{S}^2 W$, le cône $\text{Semi}^{2n-2}(A \times A)$ peut toujours être identifié avec le cône des matrices symétriques réelles semipositives 3×3 intersecté avec un demi-espace (cf. proposition 2.3.3.2). Pour des raisons comme dans la démonstration de la proposition 2.3.4.4, on devrait avoir

$$\mathbf{S}^{2n-2} \text{Psef}^1(A \times A) = \text{Psef}^{2n-2}(A \times A) = \text{Strong}^{2n-2}(A \times A) = \text{Semi}^{2n-2}(A \times A)$$

pour tout $n \geq 3$, et les rayons extrémaux de ce cône devraient correspondre aux classes $\text{GL}(W) \cdot (\theta_1^n \theta_2^{n-2})$ et $\text{GL}(W) \cdot (\theta_1^{n-1} \theta_2^{n-1})$. Mais pour l'instant, je ne vois pas de moyen pour montrer le cas général.

Avec un raisonnement semblable à celui utilisé dans la démonstration de la proposition 2.3.4.4, on peut montrer que le cône $\mathbf{S}^3 \text{Psef}^1(A \times A)$ s'identifie avec le cône engendré par les matrices de rang 1 dans la représentation du cône $\text{Semi}^3(A \times A)$ donnée dans (2.24) et (2.25). Cela implique en particulier que $\mathbf{S}^3 \text{Psef}^1(A \times A)$ engendre « une bonne partie » de $\text{Semi}^3(A \times A)$ au sens suivant. Identifions $\mathbf{N}^3(A \times A)$ avec $\text{Sym}_3(\mathbb{R})$, et soit F une face de $\text{Sym}_3^+(\mathbb{R})$ isomorphe à $\text{Sym}_2^+(\mathbb{R})$. Lorsque $F \cap \text{Semi}^3(A \times A) \neq \emptyset$, on a l'image suivante pour une section affine de F , où $\mathbf{S}^3 \text{Psef}^1(A \times A) \cap F$ correspond à la région en gris foncé et les classes semipositives qui ne sont pas contenues dans $\mathbf{S}^3 \text{Psef}^1(A \times A)$ sont dans la région en gris clair.

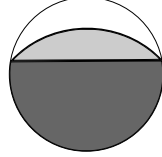


FIGURE 2.1 – Comparaison de $\mathbf{S}^3 \text{Psef}^1(A \times A)$ et $\text{Semi}^3(A \times A)$

Question 2.3.4.6. *Regardons $\text{Semi}^k(A \times A)$ comme un sous-cône de $\text{Sym}_{k+1}^+(\mathbb{R})$. Est-ce que, pour $1 \leq k \leq n$, l'ensemble des rayons extrémaux de $\mathbf{S}^k \text{Psef}^1(A \times A)$ (resp. de $\mathbf{S}^{2n-k} \text{Psef}^1(A \times A)$) s'identifie avec l'ensemble des matrices semipositives de rang 1 dans $\text{Semi}^k(A \times A)$?*

2.3.4.2 Classes numériquement effectives et classes pseudoeffectives

Dans [17], les auteurs montrent que, pour une surface abélienne A , la classe

$$\mu = 4\theta_1\theta_2 - \lambda^2$$

est nef mais pas pseudoeffective, de sorte que l'on a une inclusion stricte $\text{Psef}^2(A \times A) \subsetneq \text{Nef}^2(A \times A)$. Le résultat principal de cette section (proposition 2.3.4.9) est que l'on a, en toute dimension n ,

$$\text{Psef}^k(A^e) \subsetneq \text{Nef}^k(A^e)$$

pour tout entier positif $e \geq 2$ et pour $2 \leq k \leq ne - 2$.

Commençons par le lemme suivant.

Lemme 2.3.4.7. *La classe μ^k est nef pour $k \in \{0, \dots, n\}$. En particulier, on a*

$$\mu^k \cdot \text{Psef}^{n-k}(A \times A) \subset \text{Nef}^{n+k}(A \times A).$$

Démonstration. Par la décomposition (2.13) et la proposition 2.2.4.4, il suffit de montrer que le cône $\text{Psef}^{2n-2k}(A \times A)$ est contenu dans le demi-espace

$$H_{\mu^{n-k}}^+ := \bigoplus_{0 \leq 2i \leq 2n-2k} \mu^i \cdot \mathbf{S}^{4(n-k)-4i} W \oplus \mathbb{R}_+ \mu^{n-k}.$$

Ayant $\text{Psef}^{2n-2k}(A \times A) \subset \text{Semi}^{2n-2k}(A \times A)$, il suffit de montrer que l'on a $\text{Semi}^{2n-2k}(A \times A) \subset H_{\mu^{n-k}}^+$. Pour une classe $\alpha \in \mathbf{N}^{2n-2k}(A \times A)$, la matrice b_α représentant B_α se décompose en blocs correspondant aux modules irréductibles dans une décomposition de $\bigwedge^{2n-2k} V_{\mathbb{R}}$ (cf. proposition 2.3.3.2). Comme $\det(W)^{\otimes n-k}$ est un module irréductible apparaissant dans une telle décomposition de $\bigwedge^{2n-2k} V_{\mathbb{R}}$, on a des blocs 1×1 dans la matrice b_α . Par la remarque 2.3.3.3, on peut supposer que ces blocs 1×1 sont tous décrits par la même forme linéaire L . Comme l'application $\alpha \rightarrow B_\alpha$ est $\text{GL}(W)$ -équivariante, l'équation $L = 0$ doit décrire $(\mu^{n-k})^\perp$, de sorte que soit $\text{Semi}^{2n-2k}(A \times A) \subset H_{\mu^{n-k}}^+$, soit $\text{Semi}^{2n-2k}(A \times A) \subset H_{\mu^{n-k}}^-$. Comme la classe $\theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k}$ est semipositive, il suffit ainsi de montrer

$$\theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k} \in H_{\mu^{n-k}}^+.$$

Ecrivons $\theta_1^{n-k} \theta_2^{n-k} = \sum_{0 \leq 2i \leq 2n-2k} \mu^i P_i$ avec $P_i \in \mathbf{S}^{4(n-k)-4i} W$, selon la décomposition donnée dans la proposition 2.2.3.2. Alors P_{n-k} est une constante et on veut déterminer son signe.

Comme le morphisme surjectif $\mathbf{S}^{2n-2k} N^1(A \times A) \rightarrow \mathbf{N}^{2n-2k}(A \times A)$ correspond à une projection sur des facteurs irréductibles de $\mathbf{S}^{2n-2k} N^1(A \times A)$, et comme μ^{n-k} engendre un module irréductible non nul dans $\mathbf{N}^{2n-2k}(A \times A)$ pour $k \leq n$, on peut supposer que A est de dimension $n-k$. Or on a $\mathbf{N}^{2n-2k}(A_{2n-2k} \times A_{2n-2k}) = \mathbb{R} \mu^{n-k}$, et $\mu^{n-k} P_{n-k}$ est donc juste un nombre d'intersection de $2n-2k$ diviseurs effectifs, de sorte que l'on a $\mu^{n-k} P_{n-k} \geq 0$. Comme $[\mu^{n-k}]_{n-k} > 0$ par la remarque 2.2.4.4, on obtient $P_{n-k} > 0$, ce qui fournit le résultat souhaité. \square

Lemme 2.3.4.8. *Soient X et Y des variétés algébriques complexes projectives et soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre. L'application*

$$f^* : \mathbf{N}^\bullet(Y) \rightarrow \mathbf{N}^\bullet(X)$$

préserve les cônes nef.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbf{N}^\bullet(Y)$ et $\beta \in \mathbf{N}^\bullet(X)$. Soit $Z \subset Y$ un cycle de classe α et $W \subset X$ un cycle de classe β . On a la formule de projection $f_*(f^*Z \cdot W) = Z \cdot f_*W$, où $f_* = \deg(f|_Z)$ si $f|_Z$ est fini $f_* = 0$ sinon. Si α et β sont de codimension complémentaire, l'application f_* envoie les classes de 0-cycles sur des classes de 0-cycles de sorte que $f_*(f^*Z \cdot W) = 0$ si et seulement si $Z \cdot f_*W = 0$. Comme $Z \cdot f_*W = 0$ si $f|_Z$ n'est pas fini, cela donne le résultat souhaité. \square

Théorème 2.3.4.9. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension $n \geq 2$. Les classes $\theta_1^k \mu \in \mathbf{N}^{k+2}(A \times A)$ et $\theta_1^{n-2} \theta_2^k \mu \in \mathbf{N}^{n+k}(A \times A)$ sont nef mais pas semipositives pour $0 \leq k \leq n-2$, et l'on a*

$$\text{Psef}^k(A^e) \subsetneq \text{Nef}^k(A^e) \tag{2.32}$$

pour tout entier positif $e \geq 2$ et $2 \leq k \leq ne - 2$.

Démonstration. Par la proposition 2.3.4.7, il est clair que $\theta_1^k \mu$ et $\theta_1^{n-2} \theta_2^k \mu$ sont des classes nef pour $0 \leq k \leq n-2$. Pour voir que $\theta_1^k \mu$ n'est pas semipositive pour $0 \leq k \leq n$, il suffit de remarquer que la matrice b'_μ (cf. lemme 2.3.3.10) n'est pas semipositive, ce qui entraîne par le lemme 2.3.3.10 que $b'_{\theta_1^k \cdot \mu}$ n'est pas semipositive, et donc $\theta_1^k \cdot \mu \notin \text{Semi}^k(A \times A)$.

Pour voir que $\theta_2^k \theta_1^{n-2} \mu = 4\theta_2^{k+1} \theta_1^{n-1} - \theta_2^k \theta_1^{n-2} \lambda^2$ n'est pas semipositive, on regarde la matrice $h_{\theta_2^k \theta_1^{n-2} \mu}$ représentant $H_{\theta_2^k \theta_1^{n-2} \mu}$ dans la base standard de $\bigwedge^k V$. On montre qu'il y a un 2×2 mineur principal dont le déterminant est négatif. La matrice $h_{\theta_2^{k+1} \theta_1^{n-1}}$ est une matrice avec des coefficients zéros hors de la diagonale et des coefficients non zéros dans la diagonale pour les coordonnées $z_{i_1} \wedge \cdots \wedge z_{i_{n-1}} \wedge z_{j_1} \wedge \cdots \wedge z_{j_{k+1}}$ avec $i_1, \dots, i_{n-1} \in \{1, \dots, n\}$ et $j_1, \dots, j_{k+1} \in \{n+1, \dots, 2n\}$. En même temps la matrice $h_{\theta_2^k \theta_1^{n-2} \lambda^2}$ contient un coefficient non nul pour le produit extérieur de

$$\bigwedge_{1 \leq l \leq k} (\sqrt{-1} dz_{n+l} \wedge d\bar{z}_{n+l}) \wedge \bigwedge_{1 \leq l \leq n-2} (\sqrt{-1} dz_l \wedge d\bar{z}_l)$$

et $\sqrt{-1} dz_{n+(n-1)} \wedge d\bar{z}_{n-1} \wedge \sqrt{-1} dz_{2n} \wedge id\bar{z}_n$. Ce coefficient n'est pas sur la diagonale de $h_{\theta_2^{k+1} \theta_1^{n-1}}$. Comme on n'a pas de coefficients de $\theta_2^k \theta_1^{n-2} \lambda^2$ dans la diagonale pour

$$\bigwedge_{1 \leq l \leq k} (\sqrt{-1} dz_{n+l} \wedge d\bar{z}_{n+l}) \wedge \bigwedge_{1 \leq l \leq n} (\sqrt{-1} dz_l \wedge \bar{z}_l),$$

cela entraîne le résultat.

Montrons maintenant l'inclusion (2.32). Par les arguments précédents, on a

$$\text{Semi}^k(A \times A) \subsetneq \text{Nef}^k(A \times A)$$

pour $2 \leq k \leq 2n-2$. Cela nous permet de raisonner par récurrence sur e pour n fixé, en supposant que l'énoncé est vrai pour $e-1$. De plus, on peut se restreindre à le montrer pour $2 \leq k \leq \lfloor \frac{ne}{2} \rfloor$ par dualité. Soit $\alpha \in \text{Nef}^k(A^{e-1})$ une classe nef non semipositive. Alors $p_{1, \dots, e-1}^* \alpha$ est nef et non semipositive par le lemme 2.3.4.1. Ayant $ne-2 \geq \lfloor \frac{ne}{2} \rfloor$ pour $n \geq 2, e \geq 2$, cela achève la démonstration. \square

Remarque 2.3.4.10. Par le théorème 2.2.4.1, on a des isomorphismes $\cdot \mu^k : \mathbb{N}^{n-k}(A \times A) \rightarrow \mathbb{N}^{n+k}(A \times A)$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$, et on se demande naturellement si les cônes de classes positives respectifs sont préservés, ce qui a été vérifié dans [17] pour $k = n-1$. Par le théorème 2.3.4.9, on voit que, pour $n = 3$, l'isomorphisme $\cdot \mu : \mathbb{N}^2(A \times A) \rightarrow \mathbb{N}^4(A \times A)$ ne préservent pas les classes pseudoeffectives, de sorte qu'en général, on ne peut pas s'attendre à ce que les cônes soient préservés. Pour A de dimension 3 cela se voit aussi à partir de la représentation explicite de $\text{Semi}^4(A \times A)$ donnée dans (2.26) et (2.27) : une classe

$$\alpha = a_1 \mu \theta_1^2 + a_2 \mu \theta_1 \theta_2 + a_3 \mu \theta_2^2 + a_4 \mu \theta_1 \lambda + a_5 \mu \theta_2 \lambda + a_6 \mu \lambda^2$$

donne les deux matrices

$$b_\alpha|_{\det(W)^{\otimes 2}} = 5a_2 - 10a_6$$

et

$$b_\alpha|_{\det(W)^{\otimes 2} W} = \begin{pmatrix} 14a_1 & 14a_4 & 16a_6 - a_2 \\ 14a_4 & 16a_2 + 24a_6 & 14a_5 \\ 16a_6 - a_2 & 14a_5 & 14a_3 \end{pmatrix},$$

d'où l'on déduit tout de suite que la classe $\mu \cdot \theta_1 \theta_2$ n'est pas semipositive et donc pas pseudoeffective (cf. proposition 2.3.4.9).

Rappelons que le cône $\text{Psef}^2(A \times A) = \mathbf{S}^2 \text{Psef}^1(A \times A)$ ne dépend pas de la dimension n de A pour $n \geq 2$ (théorème 2.3.1.13). Par le lemme 2.2.4.8, on a donc

$$\text{Nef}^{n-2}(A_n \times A_n) = \mu^{n-2} \cdot \text{Nef}^2(A_2 \times A_2)$$

pour tout $n \geq 2$. Plus précisément, on obtient (cf. [17, Prop. 4.2]) :

Proposition 2.3.4.11. *Soit A une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension $n \geq 2$. Pour*

$$\alpha = a_1\theta_1^2 + a_2\theta_1\theta_2 + a_3\theta_2^2 + a_4\theta_1\lambda + a_5\theta_2\lambda + a_6\lambda^2,$$

on a $\mu^{n-2}\alpha \in \text{Nef}^{2n-2}(A \times A)$ si et seulement si

$$a_3a^2b^2 - a_5ab(a+b) + (a_2 - a_6)(a^2 + b^2) - (a_2 - 6a_6)ab - a_4(a+b) + a_1 \geq 0 \quad (2.33)$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Comme $\text{Psef}^2(A \times A) = \mathbf{S}^2 \text{Psef}^1(A \times A)$ ne dépend pas de la dimension de A , il suffit de montrer l'énoncé pour A une surface abélienne par le lemme 2.2.4.8 ; mais dans ce cas c'est juste [17, Prop. 4.2]. \square

Remarque 2.3.4.12. La condition (2.33) est équivalente aux inégalités suivantes (cf. [17, p. 17]) :

$$\begin{aligned} a_1, a_3 &\geq 0, \\ a_2 &\geq a_6, \\ 4a_1(a_2 - a_6) &\geq a_4^2 \\ 4a_3(a_2 - a_6) &\geq a_5^2, \end{aligned}$$

et

$$(a_5b^2 + (a_2 - 6a_6)b + a_4)^2 \leq 4(a_3b^2 - a_5b + a_2 - a_6)((a_2 - a_6)b^2 - a_4b + a_1)$$

pour tout $b \in \mathbb{R}$.

Corollaire 2.3.4.13. *On a*

$$\mu^{n-2} \cdot \text{Psef}^2(A \times A) \not\subseteq \text{Nef}^{2n-2}(A \times A).$$

Démonstration. Il suffit de comparer les équations définissant les deux cônes respectivement données par (2.22), (2.23) et la proposition 2.3.4.11. \square

Remarque 2.3.4.14. Le cône $\text{Nef}^2(A_n \times A_n)$ dépend de n : pour $n = 2$, c'est justement le cône décrit par l'équation (2.33). Plus généralement, le cône décrit par l'équation (2.33) est le cône dual de $\mu^{n-2} \cdot \text{Psef}^2(A \times A)$. Or, par exemple pour $n = 3$, le cône $\mu^{n-2} \cdot \text{Psef}^2(A \times A)$ contient des éléments non pseudoeffectifs, de sorte que son dual, c'est-à-dire le cône défini par l'équation (2.33), ne peut pas coïncider avec le cône $\text{Nef}^2(A \times A)$.

Remarque 2.3.4.15. Tous les résultats obtenus concernant la structure algébrique de $\mathbf{N}^\bullet(A^e)$ et les cônes dans $\mathbf{N}^k(A^e)$ sont également vrais pour une variété abélienne A principalement polarisée quelconque si l'on se restreint à la \mathbb{R} -algèbre $\mathbf{N}_{\text{can}}^\bullet(A^e) \subset \mathbf{N}^\bullet(A^e)$ engendrée par les θ_i et les $\lambda_{i,j}$, $0 \leq i < j \leq e$.

Remarquons de plus qu'une isogénie $f : B \rightarrow B'$ entre deux variétés abéliennes induit un isomorphisme $f^* : \mathbf{N}^\bullet(B') \rightarrow \mathbf{N}^\bullet(B)$ qui préserve les cônes en question [17, Prop. 1.6]. Les résultats obtenus pour $\mathbf{N}^\bullet(A^e)$ pour A principalement polarisée très générale sont donc également vrais pour $\mathbf{N}^\bullet(B)$ si B est isogène à A^e .

3. La variété de Fano d'une cubique

3.1 Introduction

Une variété hyperkählérienne est une variété kählérienne compacte simplement connexe Y telle que $H^0(Y, \Omega_Y^2)$ soit engendré par une 2-forme σ non dégénérée en tout point de Y . Un cas particulier d'une variété hyperkählérienne est le schéma de Hilbert $S^{[n]}$ paramétrant les sous-schémas de longueur n d'une surface $K3$ S . Dans [27], Hassett et Tschinkel donnent une description conjecturale du cône engendré par les classes de courbes et du cône engendré par les classes de diviseurs effectifs pour une variété hyperkählérienne équivalente par déformation à un schéma de Hilbert $S^{[2]}$ (cf §3.2.2).

Par un résultat de Beauville et Donagi [11], la variété de Fano F paramétrant les droites sur une cubique lisse X dans \mathbb{P}^5 est une variété hyperkählérienne équivalente par déformation à un schéma de Hilbert $S^{[2]}$ (cf. §3.3.1), de sorte que les conjectures de Hassett et Tschinkel s'appliquent dans ce cas. Un but de ce chapitre est de vérifier ces conjectures pour la variété de Fano d'une cubique générale contenant un plan P (cf. §3.4.2) et pour une cubique pfaffienne générale (cf. §3.4.4).

Le théorème suivant donne un résumé des résultats obtenus pour une cubique générale contenant un plan (propositions 3.4.2.7, 3.4.2.10 et 3.4.2.15).

Théorème 3.1.0.16. *Soit $X \subset \mathbb{P}^5$ une cubique générale contenant un plan P et soit F la variété de Fano paramétrant les droites sur X . Alors il existe deux diviseurs premiers D_P et D_Q sur X tels que l'on ait*

$$\begin{aligned} \text{Psef}^1(F) &= \mathbb{R}^+[D_P] + \mathbb{R}^+[D_Q], \\ \text{Nef}^1(F) &= \mathbb{R}^+(2[D_P] + 3[D_Q]) + \mathbb{R}^+(2[D_P] + [D_Q]). \end{aligned}$$

Le diviseur D_P est fibré en coniques au-dessus d'une surface $K3$ et si l'on note c la classe d'une telle conique et l la classe d'une droite dans P , on a

$$\text{Psef}_1(F) = \mathbb{R}^+ l + \mathbb{R}^+ c.$$

Ce résultat nous permet de montrer (proposition 3.4.2.21) :

Proposition 3.1.0.17. *Soit X une cubique générale contenant un plan et soit F la variété de Fano paramétrant les droites sur X . Alors on a*

$$\text{Aut}(F) = \text{Bir}(F) = \{\text{id}\}.$$

En utilisant que la variété de Fano d'une cubique pfaffienne générale est isomorphe au schéma de Hilbert $S^{[2]}$ d'une surface $K3$, on obtient le résultat suivant (proposition 3.4.4.5, proposition 3.4.4.8 et corollaire 3.4.4.9).

Théorème 3.1.0.18. *Soit X une cubique pfaffienne générale et soit F la variété de Fano de X . Alors il existe deux diviseurs premiers E_4 et E_5 dans F tels que tous les deux soient fibrés en courbes rationnelles lisses au-dessus d'une surface K3 générale de degré 14. Soit R_4 la classe d'une fibre dans E_4 et R_5 la classe d'une fibre dans E_5 . Alors on a*

$$\begin{aligned} \text{Psef}_1(F) &= \mathbb{R}^+ R_4 + \mathbb{R}^+ R_5, \\ \text{Psef}^1(F) &= \mathbb{R}^+[E_4] + \mathbb{R}^+[E_5], \\ \text{Nef}^1(F) &= \mathbb{R}^+([E_4] + 8[E_5]) + \mathbb{R}^+(8[E_4] + 2[E_5]). \end{aligned}$$

Dans [29], Hassett et Tschinkel vérifient leurs conjectures pour une cubique générale contenant un scroll cubique. On donne un aperçu de ces résultats dans §3.4.3. Ils montrent entre autres que l'on a $\text{Aut}(F) = \{\text{id}\}$. Nous précisons ce résultat par la proposition suivante (proposition 3.4.3.4) :

Proposition 3.1.0.19. *Soit X une cubique générale contenant un scroll cubique et soit F la variété de Fano de X . Alors on a*

$$\text{Aut}(F) = \{\text{id}\} \quad , \quad \text{Bir}(F) = \langle \iota \rangle * \langle \iota^\vee \rangle,$$

où $\langle \iota \rangle * \langle \iota^\vee \rangle$ est le groupe diédral infini engendré par deux involutions birationnelles ι et ι^\vee de F .

L'autre but de ce chapitre est d'étudier les classes (pseudo)effectives (resp. nef) de codimension 2 dans la variété de Fano F d'une cubique X dans \mathbb{P}^5 . Le point de départ est un argument de Voisin [67, Prop. 2.4], qui montre que le cône fermé engendré par les classes des sous-variétés lagrangiennes de F (cf. définition 3.2.1.1) est une face dans $\text{Psef}^2(F)$ (cf. définition 3.2.3.2). Pour une cubique X générale, le cône $\text{Psef}^2(F)$ est engendré par deux rayons extrémaux et la face lagrangienne correspond à un des deux rayons extrémaux.

Proposition 3.1.0.20. *Soit X une cubique générale contenant un plan, ou une cubique générale contenant un scroll cubique, ou une cubique pfaffienne générale. Soit F la variété de Fano de X . Alors la face isotrope de $\text{Psef}^2(F)$ est de dimension 3, c'est-à-dire de dimension maximale.*

Alors que toute classe de diviseur nef est pseudoeffective, cette inclusion n'est plus forcément vraie en codimension supérieure comme le montrent des exemples de Debarre, Ein, Lazarsfeld et Voisin [17] et de l'auteur (chapitre 2). Le résultat suivant montre donc que l'on pourrait espérer que la variété de Fano d'une cubique générale fournit un autre tel exemple.

Proposition 3.1.0.21. *Soit X une cubique générale et soit F la variété de Fano de X . Alors on a*

$$\text{Psef}^2(F) \subset \text{Nef}^2(F)$$

et

$$\text{Eff}^2(F) \subsetneq \text{Nef}^2(F).$$

Je ne sais pas si la première inclusion est également stricte.

Le plan de ce chapitre est le suivant : dans la section 3.2, on rappelle d'abord quelques aspects de la théorie des variétés hyperkähleriennes (§3.2.1) et ensuite on explique en détail les conjectures de Hassett et Tschinkel (§3.2.2) ; on finit la section en définissant la face isotrope de $\text{Psef}^2(F)$ (§3.2.3). Dans la section 3.3, on rappelle des résultats de Beaville et Donagi (§3.3.1) et l'on discute la structure des \mathbb{R} -espaces vectoriels $N^k(F)$ pour certaines cubiques (§3.3.2). La section 3.4 est le cœur de ce chapitre ; on y étudie la variété de Fano

1. d'une cubique générale (§3.4.1),
2. d'une cubique générale contenant un plan (§3.4.2),
3. d'une cubique générale contenant un scroll cubique (§3.4.3),
4. d'une cubique pfaffienne générale (§3.4.4).

3.2 Généralités

3.2.1 Variétés hyperkähleriennes

Dans cette section, on rappelle quelques propriétés élémentaires des variétés hyperkähleriennes.

Définition 3.2.1.1. Une variété complexe Y est dite *symplectique* si elle admet une 2-forme $\sigma \in H^0(Y, \Omega_Y^2)$ qui est non dégénérée en tout point de Y . On dit qu'une variété symplectique Y est *hyperkählérienne* si

- (i) $\dim H^0(Y, \Omega_Y^2) = 1$,
- (ii) Y est compacte et kählérienne,
- (iii) Y est simplement connexe.

Une sous-variété Z d'une variété symplectique Y est dite *lagrangienne* si $\sigma|_{Z_{\text{reg}}}$ s'annule dans $H^0(Z_{\text{reg}}, \Omega_{Z_{\text{reg}}}^2)$.

Il découle de la définition qu'une variété complexe symplectique Y est de dimension paire et que le fibré canonique K_Y est trivial.

Soit S une surface K3. Alors le schéma de Hilbert $S^{[n]}$, paramétrant les sous-schémas de longueur n sur S , est une variété hyperkählérienne de dimension $2n$ [10, §6], ce qui donne des exemples en toute dimension possible.

Si l'on parle désormais d'un schéma de Hilbert $S^{[2]}$, on sous-entend toujours que c'est le schéma de Hilbert paramétrant les sous-schémas de longueur 2 sur une surface K3 S .

Définition 3.2.1.2. Un *réseau* est un \mathbb{Z} -module libre L muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée q à valeurs dans \mathbb{Z} . Si $q(x, x) \in 2\mathbb{Z}$ pour tout $x \in L$, on dit que le réseau L est *pair*. Lorsque L est un \mathbb{Z} -module libre (pas forcément un réseau), on dit que $\rho \in L$ est *primitif*, si l'on ne peut pas écrire $\rho = n\rho'$ pour un entier $n \geq 2$ et $\rho' \in L$.

La cohomologie $H^2(Y, \mathbb{C})$ d'une variété hyperkählérienne Y est munie d'une forme bilinéaire symétrique q_Y de signature $(3, \dim H^2(Y, \mathbb{C}) - 3)$, dite *forme de Beauville* ou *forme de Beauville-Bogomolov* [10, Thm. 5]. Elle provient d'une forme entière sur $H^2(Y, \mathbb{Z})$, ce qui munit $H^2(Y, \mathbb{Z})$ d'une structure de réseau. Il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que (cf. [32, §1.9] pour un aperçu détaillé des propriétés de la forme de Beauville)

$$\forall \alpha, \beta \in H^{1,1}(Y, \mathbb{C}) \quad q_Y(\alpha, \beta) = c \int_Y \alpha \beta (\sigma \bar{\sigma})^{\frac{\dim(Y)}{2} - 1}. \quad (3.1)$$

Exemple 3.2.1.3. Soit S une surface K3. C'est une surface hyperkählérienne et q_S est juste la forme bilinéaire correspondant au produit d'intersection. En tant que réseau, on a [43, Prop. 1.2]

$$H^2(S, \mathbb{Z}) = U^{\oplus 3} \oplus (-E_8)^{\oplus 2},$$

où U est le plan hyperbolique et E_8 est le réseau associé au système de racines E_8 .

Exemple 3.2.1.4. Soit S toujours une surface $K3$. Alors on a [10, Prop. 6, Lemme 1] (cf. aussi §3.4.4)

$$(H^2(S^{[2]}, \mathbb{Z}), q_{S^{[2]}}) \simeq (H^2(S, \mathbb{Z}), q_S) \oplus^\perp \mathbb{Z} \delta \simeq U^{\oplus 3} \oplus^\perp (-E_8)^{\oplus 2} \oplus^\perp (-2).$$

Pour $v \in H^2(S^{[2]}, \mathbb{Z})$ primitif, on a

$$\text{soit } q_{S^{[2]}}(v, H^2(S^{[2]}, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}, \text{ soit } q_{S^{[2]}}(v, H^2(S^{[2]}, \mathbb{Z})) = 2\mathbb{Z}.$$

Remarque 3.2.1.5. Comme la décomposition $H^2(Y, \mathbb{C}) = H^{2,0}(Y) \oplus^\perp H^{1,1}(Y) \oplus^\perp H^{0,2}(Y)$ est orthogonale par rapport à la forme de Beauville, on a

$$N_{\mathbb{Z}}^1(Y) = \{\rho \in H^2(Y, \mathbb{Z}) \mid q_Y(\rho, \sigma) = 0\}.$$

On finit en rappelant un résultat de Beauville sur la théorie des déformations des variétés hyperkähleriennes.

Définition 3.2.1.6. Une *déformation* d'une variété compacte complexe lisse Z est une application propre et lisse $\mathcal{Z} \rightarrow B$, où B est un espace analytique connexe et la fibre au-dessus d'un point distingué $0 \in B$ est isomorphe à Z . On dit que Z' est *équivalente par déformation* à Z s'il existe une déformation $\mathcal{Z} \rightarrow B$ de Z et $t \in B$ tels que la fibre Z_t au-dessus de $t \in B$ est isomorphe à Z' .

Proposition 3.2.1.7 (Beauville). *Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow B$ une déformation kählienne d'une variété hyperkählienne X . Alors toute fibre X_t au-dessus d'un point $t \in B$ est hyperkählienne.*

Démonstration. [10, Prop. 9]. □

On s'intéressera dans la suite aux variétés hyperkähleriennes équivalentes par déformation à un schéma de Hilbert $S^{[2]}$.

3.2.2 Les conjectures de Hassett et Tschinkel

Dans [27], Hassett et Tschinkel donnent une description conjecturale du cône engendré par les classes des courbes et du cône engendré par les classes des diviseurs effectifs pour une variété hyperkählienne équivalente par déformation à un schéma de Hilbert $S^{[2]}$ (conjecture 3.2.2.7 et conjecture 3.2.2.2). Par dualité, on obtient également une description du cône engendré par les classes des diviseurs amples (conjecture 3.2.2.10). La description (conjecturale) de ces cônes ne dépend que de la forme de Beauville et peut être vue comme une généralisation en dimension supérieure des résultats connus pour des surfaces $K3$.

Notation 3.2.2.1. Soit Z une variété complexe et soit M un sous-ensemble de $N_{\mathbb{Z}}^k(Z)$. On note $\text{cone } M$ le cône *fermé* engendré par $M \otimes \mathbb{R}$ dans $N^k(Z)$.

3.2.2.1 Le cône des diviseurs pseudoeffectifs

Soit S une surface $K3$ munie d'une polarisation g . Alors on a [43, Lemma 1.6]

$$\text{Psef}_1(S) = \text{cone}\{c \in N_{\mathbb{Z}}^1(S) \mid c^2 \geq -2, c \cdot g \geq 0\} \quad (3.2)$$

$$= \text{cone}\{c \in N_{\mathbb{Z}}^1(S) \mid c \cdot g \geq 0, c^2 \geq 0\} \quad (3.3)$$

$$+ \text{cone}\{c \in N_{\mathbb{Z}}^1(S) \mid c \cdot g \geq 0, c^2 = -2\},$$

où les classes extrémales d'autointersection -2 sont représentées par une courbe rationnelle C . Une telle courbe est dite *nodale*, car il existe une contraction extrémale $S \rightarrow S'$ qui contracte C sur un point double (ou nodal) [43, §1.4]. Comme une courbe est la même chose qu'un diviseur effectif sur une surface, la généralisation suivante de (3.2) s'impose naturellement (cf. [27, Conj. 3.4]).

Conjecture 3.2.2.2 (Hassett-Tschinkel). *Soit Y une variété hyperkählérienne équivalente par déformation à un schéma de Hilbert $S^{[2]}$ et soit g une polarisation de Y . Alors on a*

$$\begin{aligned} \text{Psef}^1(Y) &= \text{cone}\{\alpha \in \mathbb{N}_{\mathbb{Z}}^1(Y) \mid q_Y(\alpha, g) \geq 0, q_Y(\alpha, \alpha) \geq -2\} \\ &= \text{cone}\{\alpha \in \mathbb{N}_{\mathbb{Z}}^1(Y) \mid q_Y(\alpha, g) \geq 0, q_Y(\alpha, \alpha) \geq 0\} \\ &\quad + \text{cone}\{\alpha \in \mathbb{N}_{\mathbb{Z}}^1(Y) \mid q_Y(\alpha, g) \geq 0, q_Y(\alpha, \alpha) = -2\}. \end{aligned}$$

Remarque 3.2.2.3. Soit $D \subset Y$ un diviseur effectif. Alors on a (avec les notations de la conjecture 3.2.2.2) $q_Y([D], g) > 0$ (cf. par exemple [32, §1.11]). Si D est un diviseur premier avec $q_Y([D], [D]) < 0$, on sait par un résultat de Markman [44, Thm. 1.2] que $[D]$ est un multiple d'une classe primitive $\rho \in \mathbb{N}_{\mathbb{Z}}^1(Y)$ de carré -2 sous la forme de Beauville. Cela implique que l'on a l'inclusion

$$\text{Psef}^1(Y) \subset \text{cone}\{\alpha \in \mathbb{N}_{\mathbb{Z}}^{n-1}(Y) \mid q_Y(\alpha, g) \geq 0, q_Y(\alpha, \alpha) \geq -2\}.$$

L'autre sens de l'inclusion reste ouvert.

3.2.2.2 Le cône des 1-cycles

Pour généraliser la description de $\text{Psef}_1(S)$, on munit d'abord $H^{2n-2}(Y, \mathbb{Z})$ d'une forme bilinéaire symétrique à valeurs rationnelles.

Définition 3.2.2.4. Soit L un réseau. Le *réseau dual* est défini par

$$L^\vee := \{x \in L \otimes \mathbb{Q} \mid q(x, L) \subset \mathbb{Z}\} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z}).$$

L'extension naturelle de q à $L \otimes \mathbb{Q}$ donne une forme bilinéaire à valeurs rationnelles sur L^\vee que l'on note \tilde{q} .

Par dualité de Poincaré, on a $H^{2n-2}(Y, \mathbb{Z}) \simeq H^2(Y, \mathbb{Z})^\vee$, de sorte que \tilde{q}_Y est une forme bilinéaire symétrique à valeurs rationnelles sur $H^{2n-2}(Y, \mathbb{Z})$. Si l'on veut généraliser la situation des surfaces $K3$, on s'attend à qu'il existe $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \mathbb{Q}_{<0}$ tels que

$$\begin{aligned} \text{Psef}_1(Y) &= \text{cone}\{c \in \mathbb{N}_{\mathbb{Z}}^{n-1}(Y) \mid c \cdot g \geq 0, \tilde{q}_Y(c, c) \geq 0\} \\ &\quad + \text{cone}\{c \in \mathbb{N}_{\mathbb{Z}}^{n-1}(Y) \mid c \cdot g \geq 0, \tilde{q}_Y(c, c) \in \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pour une surface $K3$, on a vu que les courbes de carré négatif (dont la classe engendre donc forcément un rayon extrémal de $\text{Psef}_1(S)$) correspondent à des contractions. Également, on s'attend à que les classes extrémales de carré négatif dans $\text{Psef}_1(Y)$ correspondent à des contractions dans un sens que l'on va préciser maintenant.

Définition 3.2.2.5. Un morphisme $\text{contr}_{\mathcal{F}} : Y \rightarrow Y'$ est une *contraction* si l'on a $\text{contr}_* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y'}$.

Soit \mathcal{F} une face de $\text{Psef}_1(Y)$ (cf. définition 2.3.3.6) et soit D un diviseur effectif dans Y tel que $D \cdot c < 0$ pour toute classe c dans \mathcal{F} . Alors il existe par le théorème de contraction [37, 3.7] une unique contraction birationnelle $\text{contr}_{\mathcal{F}} : Y \rightarrow Y'$ telle que

- Y' est projective ;
- une courbe irréductible dans Y est contractée par $\text{contr}_{\mathcal{F}}$ si et seulement si sa classe est dans \mathcal{F} .

Définition 3.2.2.6. Avec les notations ci-dessus, on dit que le morphisme $\text{contr}_{\mathcal{F}}$ est la *contraction extrémale* de \mathcal{F} .

On s'attend à que toute classe primitive extrémale de carré négatif dans $\text{Psef}^1(Y)$ soit représentée par une famille de courbes irréductibles $C \subset Y$ qui sont contractées par une contraction extrémale dont la géométrie est déterminée par la valeur de $\gamma = q_Y(c, c)$. Comme Y est hyperkählérienne, une contraction extrémale $\text{contr} : Y \rightarrow Y'$ doit prendre une des formes suivantes :

1. si la contraction est divisorielle, le diviseur exceptionnel E dans Y est irréductible [37, Prop. 2.5], de sorte que [70, §2.4.1 - §2.4.3, en particulier, Thm. 2.16, Cor. 2.17, Thm. 2.19, Cor. 2.20]
 - (a) soit contr est de type A_1 , i.e., le diviseur E est contracté sur une surface K3 et toute fibre exceptionnelle est un \mathbb{P}^1 ,
 - (b) soit contr est de type A_2 , i.e., le diviseur E est contracté sur une surface dont la normalisation est symplectique et la fibre générale (sauf pour un nombre fini de points de $\text{contr}(E)$) est isomorphe à la réunion de deux \mathbb{P}^1 qui se coupent dans un point ;
2. si la contraction est petite, elle est localement la contraction d'un plan lagrangien $\mathbb{P}^2 \subset Y$ sur un point [71, Thm. 1.1].

Hassett et Tschinkel montrent que la classe c d'une courbe $C \subset Y$, qui est contractée par une contraction extrémale, satisfait $\tilde{q}_Y(c, c) \in \{-\frac{1}{2}, -2, -\frac{5}{2}\}$ et qu'elle est divisorielle si $\tilde{q}_Y(c, c) \in \{-\frac{1}{2}, -2\}$ et petite si $\tilde{q}_Y(c, c) = -\frac{5}{2}$ [28, Thm. 22]. Cela explique la caractérisation suivante de $\text{Psef}_1(Y)$ proposée par Hassett et Tschinkel (cf. (3.3)) [27, Conj. 3.1, Conj. 3.6] :

Conjecture 3.2.2.7 (Hassett-Tschinkel). *Soit Y une variété hyperkählérienne équivalente par déformation à un schéma de Hilbert $S^{[2]}$ et soit g une polarisation de Y . Le cône $\text{Psef}_1(Y)$ est le cône fermé engendré par les classes entières $c \in N_1(Y)$ telles que $c \cdot g \geq 0$ et une des conditions suivantes soit satisfaite :*

1. $\tilde{q}_Y(c, c) \geq 0$,
2. $\tilde{q}_Y(c, c) = -\frac{1}{2}$,
3. $\tilde{q}_Y(c, c) = -2$,
4. $\tilde{q}_Y(c, c) = -\frac{5}{2}$.

Définition 3.2.2.8. Soit $\text{Psef}_1^{\text{conj}}$ le cône décrit par la conjecture 3.2.2.7. Une classe entière $c \in N_1(Y)$ avec $\tilde{q}_Y(c, c) < 0$ qui engendre un rayon extrémal de $\text{Psef}_1^{\text{conj}}(Y)$ est dite *nodale*. On note $E_{\text{nod}}(Y)$ l'ensemble des classes nodales et $E_{\text{nod}}^\gamma(Y)$ l'ensemble des classes nodales telles que $\tilde{q}_Y(c, c) = \gamma$.

Conjecture 3.2.2.9 (Hassett-Tschinkel). *Toute classe nodale $c \in E_{\text{nod}}(Y)$ représente une courbe rationnelle contractée par un morphisme donné par les sections de $\mathcal{O}_Y(m\lambda)$, où λ est une classe sur le bord de $\text{Nef}^1(Y)$ satisfaisant $\lambda \cdot c = 0$.*

1. Lorsque $\tilde{q}_Y(c, c) = -\frac{1}{2}, -2$, alors la classe c est représentée par une famille de courbes rationnelles paramétrée par une surface K3.
2. Lorsque $\tilde{q}_Y(c, c) = -\frac{5}{2}$, alors la classe c est représentée par une famille de droites contenues dans un \mathbb{P}^2 que l'on peut contracter sur un point.

3.2.2.3 Le cône des classes de diviseurs nef

Soit c une classe primitive dans $H^{2n-2}(Y, \mathbb{Z}) = H^2(Y, \mathbb{Z})^\vee$ et notons ρ_c l'unique classe primitive dans $H^2(Y, \mathbb{Z})$ telle que

$$\forall \eta \in H^2(Y, \mathbb{Z}) \quad d c \cdot \eta = q_Y(\rho_c, \eta), \quad (3.5)$$

où d est un entier positif fixé. Comme l'identification

$$H^{2n-2}(Y, \mathbb{Z}) \simeq H^2(Y, \mathbb{Z})^\vee \subset H^2(Y, \mathbb{Q}),$$

obtenue par dualité de Poincaré, identifie une classe $(n-1, n-1)$ avec une classe $(1, 1)$, on a $\rho_c \in N_{\mathbb{Z}}^1(X)$ pour toute classe entière $c \in N_1(X)$. Par dualité, on obtient ainsi la conjecture suivante pour le cône des classes nef (cf. [27, Conj. 3.3]).

Conjecture 3.2.2.10 (Hassett-Tschinkel). *Soit Y une variété hyperkählérienne équivalente par déformation à un schéma de Hilbert $S^{[2]}$ et soit g une polarisation de Y . Le cône $\text{Nef}^1(Y)$ est l'adhérence du cône engendré par les classes $\alpha \in N_{\mathbb{Z}}^1(Y)$ telles que $q_Y(\alpha, g) \geq 0$ et $q_Y(\alpha, \rho) \geq 0$ pour toute classe $\rho \in N_{\mathbb{Z}}^1(Y)$ satisfaisant $q_Y(g, \rho) \geq 0$ et une des conditions suivantes :*

1. $q_Y(\rho, \rho) \geq 0$,
2. $q_Y(\rho, \rho) = -2$ et $(\rho, H^2(F, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}$,
3. $q_Y(\rho, \rho) = -2$ et $(\rho, H^2(F, \mathbb{Z})) = 2\mathbb{Z}$,
4. $q_Y(\rho, \rho) = -10$ et $(\rho, H^2(F, \mathbb{Z})) = 2\mathbb{Z}$.

Remarque 3.2.2.11. Notons $\text{Nef}_{\text{conj}}^1(Y)$ le cône décrit par la conjecture 3.2.2.10. Hassett et Tschinkel montrent que l'on a [28, Thm. 23]

$$\text{Nef}_{\text{conj}}^1(Y) \subset \text{Nef}^1(Y).$$

On ne sait pas s'il y a égalité.

3.2.3 La face isotrope

Soit Y une variété hyperkählérienne de dimension 4 (pas forcément équivalente par déformation à un schéma de Hilbert $S^{[2]}$). En codimension 2, il est plus difficile de déterminer des classes (pseudo)effectives ou nef. Un point de départ serait de déterminer les classes représentées par une surface lagrangienne dans Y . Un argument de Voisin [67, Prop. 2.4] montre que ces classes engendrent une face de $\text{Psef}^2(Y)$ (lemme 3.2.3.1). Définissons d'abord une application

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{iso}} : N^2(F) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto c\alpha \cdot \sigma \wedge \bar{\sigma}, \end{aligned}$$

où l'on choisit $c \in \mathbb{R}^+$ de façon que

$$\varphi_{\text{iso}}(xy) = q_Y(x, y)$$

pour tout $x, y \in N^1(Y)$ (cf. (3.1)). Posons

$$\text{Psef}_{\text{iso}}^2(Y) := \text{Psef}^2(Y) \cap \ker(\varphi_{\text{iso}}).$$

Lemme 3.2.3.1. *Soit Y une variété hyperkählérienne de dimension 4. Alors le cône $\text{Psef}_{\text{iso}}^2(Y)$ est une face de $\text{Psef}^2(Y)$. Si T est une surface dans Y , on a $[T] \in \text{Psef}_{\text{iso}}^2(Y)$ si et seulement si T est lagrangienne.*

Démonstration. Soit T une surface dans Y . Si T est lagrangienne, il est clair que l'on a $\varphi_{\text{iso}}([T]) = 0$, et si T n'est pas lagrangienne, $\sigma|_T \wedge \bar{\sigma}|_T$ définit une forme volume sur T , de sorte que l'on a $\varphi_{\text{iso}}([T]) > 0$. Autrement dit, on a

$$\text{Psef}^2(Y) \subset \{\alpha \in N^2(Y) \mid \varphi_{\text{iso}}(\alpha) \geq 0\}$$

et $\text{Psef}_{\text{iso}}^2(Y)$ est donc une face de $\text{Psef}^2(Y)$. \square

Définition 3.2.3.2. Soit Y une variété hyperkählérienne de dimension 4. La face $\text{Psef}_{\text{iso}}^2(Y)$ de $\text{Psef}^2(Y)$ est dite *face isotrope*.

Remarque 3.2.3.3. On peut plus généralement définir une face isotrope $\text{Psef}_{\text{iso}}^n(Y)$ dans $\text{Psef}^n(Y)$ pour Y une variété hyperkählérienne de dimension $2n$.

Remarque 3.2.3.4. Si F est la variété des droites d'une cubique lisse dans \mathbb{P}^5 (cf. §3.3.1), alors F est hyperkählérienne (cf. théorème 3.3.1.2) de dimension 4 contenant des sous-variétés lagrangiennes par un résultat de Voisin [64, §3, ex. 7]. On verra dans des cas particuliers que la face isotrope est de dimension maximale, c'est-à-dire de codimension 1.

3.3 La variété des droites d'une cubique

Par un résultat classique de Beauville et Donagi, la variété de Fano d'une cubique lisse dans \mathbb{P}^5 est une variété hyperkählérienne équivalente par déformation à un schéma de Hilbert $S^{[2]}$ (cf. théorème 3.3.1.2). La géométrie d'une telle variété de Fano est étroitement liée à la géométrie de la cubique associée, ce qui en fait une bonne candidate pour tester les conjectures de Hassett et Tschinkel et étudier la face isotrope. Pour la suite, une cubique sera toujours une cubique lisse dans \mathbb{P}^5 .

3.3.1 Les résultats de Beauville et Donagi

Soit X une cubique lisse dans \mathbb{P}^5 . On note $G(1, \mathbb{P}^5)$ la Grassmannienne paramétrant les droites dans \mathbb{P}^5 et l'on pose

$$F := \{[l] \in G(1, \mathbb{P}^5) \mid l \subset X\}.$$

La variété F est dite *variété de Fano* de X ; elle est lisse de dimension 4 [4, Prop. 5]. Soit $f : G(1, \mathbb{P}^5) \rightarrow \mathbb{P}^{14}$ le plongement de Plücker et posons

$$s_1 := c_1(f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{14}}(1)|_F).$$

3.3.1.1 La variété de Fano comme déformation d'un schéma de Hilbert

Dans [11], Beauville et Donagi construisent une cubique X telle que $F \simeq S^{[2]}$, où S est une surface $K3$ de degré 14 dans \mathbb{P}^8 (cf. aussi §3.4.4 pour la construction de l'isomorphisme $F \simeq S^{[2]}$). Toutes les cubiques lisses sont équivalentes par déformation, de sorte que les variétés de Fanos le sont également. La proposition 3.2.1.7 entraîne donc que la variété de Fano d'une cubique lisse est une variété hyperkählérienne équivalente par déformation à un schéma de Hilbert $S^{[2]}$. Pour donner un énoncé plus précis, qui nous permettra de déterminer des générateurs du \mathbb{R} -espace vectoriel $N^2(F)$ (cf. proposition 3.3.2.4) pour certaines cubiques, on rappelle d'abord quelques notions de la théorie des déformations. Soit Z une variété complexe compacte et notons

$$p : \mathcal{Z} \rightarrow \text{Def}(Z)$$

la *déformation semi-universelle* (ou famille de Kuranishi) de Z , i.e., $\text{Def}(Z)$ est un germe d'espace analytique paramétrant toutes les déformations locales de Z .

Supposons maintenant que Z est soit une variété hyperkählérienne, soit une cubique lisse. Alors \mathcal{Z} est lisse et la famille $p : \mathcal{Z} \rightarrow \text{Def}(Z)$ est donc universelle. Si l'on note Z_t la fibre de p au-dessus de $t \in \text{Def}(Z)$, on a des isomorphismes canoniques $H^2(Z_t, \mathbb{Z}) \simeq H^2(Z, \mathbb{Z})$. Pour $\alpha \in N_{\mathbb{Z}}^k(Z)$, cela nous permet de définir

$$B_{\alpha}^Z := \{t \in \text{Def}(Z) \mid \alpha \in N_{\mathbb{Z}}^k(Z_t)\}.$$

Proposition 3.3.1.1 (Beauville). *Soit Y une variété hyperkählérienne et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des classes linéairement indépendantes dans $N_{\mathbb{Z}}^1(Y)$. Alors $B_{\alpha_1}^Y, \dots, B_{\alpha_r}^Y$ sont des hypersurfaces lisses dans $\text{Def}(Y)$ et se coupent transversalement.*

Démonstration. [10, Cor. 1]. \square

Théorème 3.3.1.2 (Beauville, Donagi). *Soit X une cubique lisse. Alors F est une variété hyperkählérienne équivalente par déformation à un schéma de Hilbert $S^{[2]}$. L'application naturelle*

$$\mathcal{F} : \text{Def}(X) \rightarrow \text{Def}(F)$$

identifie $\text{Def}(X)$ avec l'hypersurface (lisse) $B_{s_1}^F$. Autrement dit, toute déformation projective locale de F resp. de $S^{[2]}$ préservant s_1 provient d'une déformation locale de la cubique X .

Démonstration. [11, Prop. 2]. \square

Remarque 3.3.1.3. Soit X une cubique dont la variété de Fano F associée est isomorphe à $S^{[2]}$. Toute déformation projective assez *générale* de $S^{[2]}$ provient alors d'une déformation de X ; il existe des déformations projectives de $S^{[2]}$ (préservant une polarisation différente de s_1) qui ne proviennent pas d'une déformation de X [10, Cor. 2].

Remarque 3.3.1.4. Dans [33, §1], Manivel et Iliev calculent la forme symplectique sur F explicitement en fonction d'une équation définissant la cubique X .

3.3.1.2 L'application d'Abel-Jacobi

L'application d'Abel-Jacobi établit un lien entre les cohomologies de X et F . Soit

$$Z := \{(x, [l]) \in X \times F \mid x \in l\}$$

la variété d'incidence, de sorte que l'on a le diagramme suivant, où pr_1 et pr_2 sont les deux projections :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\text{pr}_2} & F \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \\ X & & \end{array} \quad (3.6)$$

L'application d'Abel-Jacobi est définie par

$$\alpha := \text{pr}_{2*} \text{pr}_1^* : H^4(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(F, \mathbb{Z}). \quad (3.7)$$

Notons $h \in H^2(X, \mathbb{Z})$ la classe d'une section hyperplane et posons

$$\begin{aligned} H_0^4(X, \mathbb{Z}) &:= \{x \in H^4(X, \mathbb{Z}) \mid x \cdot h^2 = 0\}, \\ H_0^2(F, \mathbb{Z}) &:= \{x \in H^2(F, \mathbb{Z}) \mid q_F(x, s_1) = 0\}. \end{aligned}$$

Proposition 3.3.1.5 (Beauville, Donagi). *Soit X une cubique et soit F la variété de Fano de X . L'application α envoie $H_0^4(X, \mathbb{Z})$ isomorphiquement sur $H_0^2(F, \mathbb{Z})$ et l'on a*

$$\alpha(h^2) = s_1 \quad , \quad \forall x, y \in H_0^4(X, \mathbb{Z}) \quad q_F(\alpha(x), \alpha(y)) = -x \cdot y. \quad (3.8)$$

L'application $\alpha|_{H_0^4(X, \mathbb{Z})}$ s'étend à un isomorphisme de structures de Hodge polarisées

$$\alpha_{\mathbb{C}} : H_0^4(X, \mathbb{C}) \rightarrow H_0^2(F, \mathbb{C})(-1),$$

où la polarisation de $H_0^2(F, \mathbb{C})(-1)$ est obtenue en renversant le signe du produit d'intersection.

Démonstration. [11, Prop. 6]. \square

Remarque 3.3.1.6. On a également une application

$${}^t\alpha := \text{pr}_{1*} \text{pr}_2^* : H^6(F, \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z}),$$

et

$$\forall c \in H^6(F, \mathbb{Z}) \quad \forall T \in H^4(X, \mathbb{Z}) \quad c \cdot \alpha(T) = {}^t\alpha(c) \cdot T. \quad (3.9)$$

3.3.2 Classes algébriques sur la variété de Fano

Soit X une cubique lisse dans \mathbb{P}^5 et soit h la classe d'une section hyperplane de X . Pour X générale, on a $N^2(X) = \mathbb{R}h$ et donc $N^1(F) = \mathbb{R}\alpha(h^2)$, de sorte que les conjectures de Hassett et Tschinkel sont triviales et l'étude des classes positives sur F se restreint à l'étude de $N^2(F)$ (cf. §3.4.1). Concernant les conjectures de Hassett et Tschinkel, on s'intéressera donc aux cubiques contenant une surface dont la classe n'est pas un multiple de h^2 .

3.3.2.1 Cubiques spéciales

Soit \mathcal{C} l'espace de modules des cubiques lisses dans \mathbb{P}^5 comme construit dans [49, §4.2].

Définition 3.3.2.1. On dit que la cubique $X \in \mathcal{C}$ est *spéciale* si elle contient une surface dont la classe n'est pas un multiple de h^2 .

Comme la conjecture de Hodge entière est vraie pour une cubique lisse [66, Thm. 18], c'est équivalent à dire qu'il existe un réseau K de rang 2 dans $N_{\mathbb{Z}}^2(X)$. On note $\mathcal{C}_d \subset \mathcal{C}$ l'espace des cubiques admettant un tel réseau de discriminant d (par rapport au produit d'intersection). Rappelons le résultat principal de la thèse de Hassett [25] concernant les cubiques spéciales.

Théorème 3.3.2.2 (Hassett). *L'espace $\mathcal{C}_d \subset \mathcal{C}$ est non vide si et seulement si*

$$d \equiv 0, 2 \pmod{6}, \quad d > 6.$$

Dans ce cas, \mathcal{C}_d est un diviseur irréductible dans \mathcal{C} .

Soit $n \geq 2$ et soit $d = 2(n^2 + n + 1)$. Alors, pour X générale dans \mathcal{C}_d , il existe une surface K3 polarisée générale S de degré d telle que $F \simeq S^{[2]}$.

Démonstration. [25, Thm. 3.2.3, Thm. 4.3.1, Thm. 6.1.5]. □

Définition 3.3.2.3. On dit qu'une surface $T \subset \mathbb{P}^n$ est un *scroll* si T est réglée par des droites et si ce réglage est paramétré par une courbe rationnelle lisse. Si T est un scroll de degré 3 (resp. 4 ou 5), on dit que T est un scroll cubique (resp. quartique ou quintique).

Donnons quelques exemples de cubiques spéciales pour d petit :

- $d = 8$ (cf. §3.4.2) : le diviseur \mathcal{C}_8 paramètre les cubiques contenant un 2-plan [25, §4.1.1] ;
- $d = 12$ (cf. §3.4.3) : le diviseur \mathcal{C}_{12} paramètre les cubiques contenant un scroll cubique [25, §4.1.2] ;
- $d = 14$ (cf. §3.4.4) : Comme $14 = 2(2^2 + 2 + 1)$, la variété de Fano F d'une cubique générale dans \mathcal{C}_{14} est isomorphe à $S^{[2]}$ pour une surface K3 S de degré 14 par le théorème 3.3.2.2. Ce sont les variétés de Fano des cubiques pfaffiennes construites par Beauville et Donagi dans [11] (cf. aussi §3.3.1 et §3.4.4). Une cubique générale dans \mathcal{C}_{14} contient également un scroll quartique et un scroll quintique [25, §4.1.3].

Dans les sections §3.4.2 - §3.4.4, on va étudier la variété de Fano d'une cubique générale dans \mathcal{C}_8 , \mathcal{C}_{12} et \mathcal{C}_{14} respectivement.

3.3.2.2 Classes algébriques sur la variété de Fano

La proposition suivante donne une description des espaces $N^1(F)$ et $N^2(F)$ pour X générale (resp. générale dans \mathcal{C}_d) ; c'est surtout l'énoncé qui caractérise $N^2(F)$ pour X générale dans \mathcal{C}_d qui est d'intérêt pour nous ; les autres énoncés sont bien connus.

Proposition 3.3.2.4. *Soit X une cubique et soit F la variété de Fano de X . Si X est générale, on a*

$$N^1(F) = \mathbb{R} s_1 \quad , \quad N^2(F) = \langle s_1^2, c_2(F) \rangle.$$

Soit d un entier positif tel que \mathcal{C}_d soit non vide et soit X générale dans \mathcal{C}_d . Alors il existe $\tau \in N^1(F)$ tel que

$$N^1(F) = \langle s_1, \tau \rangle \quad , \quad N^2(F) = \langle \mathbf{S}^2 N^1(F), c_2(F) \rangle.$$

Démonstration. Par la proposition 3.3.1.5, on a un isomorphisme de \mathbb{R} -espaces vectoriels $N^2(X) \simeq N^1(F)$, ce qui entraîne $N^1(F) = \mathbb{R} s_1$ pour X générale. Soit maintenant $X \in \mathcal{C}_d$ générale et soit $T \in N_{\mathbb{Z}}^2(X)$ tel que le réseau engendré par T et h^2 dans $H^2(X, \mathbb{Z})$ soit de discriminant d . Posons $\tau := \alpha(T) \in N^1(F)$ et $B_{s_1, \tau} := B_{s_1} \cap B_{\tau}$. Par le théorème 3.3.1.2 et par la proposition 3.3.1.5, on a alors

$$\mathcal{F}(B_T^X) = B_{s_1, \tau}^F, \tag{3.10}$$

ce qui est une hypersurface dans $\mathcal{F}(\text{Def}(X)) = B_{s_1}^F$ par la proposition 3.3.1.1. Comme \mathcal{C}_d est un diviseur irréductible dans \mathcal{C} et comme \mathcal{F} est injective, on a

$$\{t \in \text{Def}(X) \mid X_t \in \mathcal{C}_d\} = B_T^X \tag{3.11}$$

et donc $\langle s_1, \tau \rangle \subset N_{\mathbb{Z}}^1(F)$ par (3.10). Si $\tau' \in N^1(F)$ n'appartient pas à l'espace engendré par s_1 et τ , alors $B_{\tau'}^F \cap B_{s_1, \tau}^F$ est une hypersurface (lisse) dans $B_{s_1, \tau}^F$, de sorte que, pour t générale dans $B_{s_1, \tau}^F$ (i.e., pour t en dehors d'une réunion dénombrable de hypersurfaces), on a $N^1(F_t) = \langle s_1, \tau \rangle$. Par (3.10) et (3.11), cela veut dire que l'on a $N^1(F) = \langle s_1, \tau \rangle$ pour X générale dans \mathcal{C}_d .

Regardons maintenant l'espace $N^2(F)$. Comme on a un isomorphisme

$$\mathbf{S}^2 H^2(F, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(F, \mathbb{Q})$$

qui est compatible avec les structures de Hodge (cf. [11, Prop. 3]), on a une injection

$$\mathbf{S}^2 N^1(F) \rightarrow N^2(F).$$

Par ailleurs, on sait que l'on a $c_2(F) \in N^2(F)$, et par un résultat de Guan [23, Main Theorem], on a $c_2(F) \notin \mathbf{S}^2 N^1(F)$.

Soit maintenant α dans $N^2(F)$, pour X générale dans \mathcal{C}_d . Comme X est générale dans \mathcal{C}_d , ses déformations locales dans \mathcal{C}_d sont encore générales, de sorte que l'on a par (3.10) et (3.11)

$$B_{s_1, \tau}^F = \mathcal{F}(\{t \in \text{Def}(X) \mid X_t \in \mathcal{C}_d\}) \subset B_{\alpha}^F,$$

ce qui entraîne par une proposition de Schlickewei [59, Prop. 3.4.2]

$$\alpha \in \langle \mathbf{S}^2 N^1(F), c_2(F) \rangle,$$

ce qu'il fallait montrer.

Avec un argument similaire on montre $N^2(F) = \langle s_1^2, c_2(F) \rangle$ pour X générale. \square

Exemple 3.3.2.5. Soit X générale dans \mathcal{C}_8 et notons P la classe du plan unique contenu dans X . Si l'on pose $p := \alpha(P)$, on a

$$N^1(F) = \langle s_1, p \rangle \quad , \quad N^2(F) = \langle p^2, s_1 p, s_1^2, c_2(F) \rangle.$$

Remarque 3.3.2.6. Soit X générale dans \mathcal{C}_d . Dans une base de $N^2(F)$ composée d'une base de $\mathbf{S}^2 N^1(F)$ et de $c_2(F)$ (comme dans la proposition 3.3.2.4), les calculs d'intersection dans $N^2(F)$ se réduisent à des calculs de la forme de Beauville : par [53, (3.01.14), (3.0.32)], on a d'un côté

$$c_2(F)^2 = 36 \cdot 23 \quad , \quad c_2(F) \cdot xy = 30q_F(x, y)$$

pour $x, y \in N^1(F)$; d'autre part, on a [53, §2.2]

$$x_1 x_2 \cdot x_3 x_4 = q_F(x_1, x_2)q_F(x_3, x_4) + q_F(x_1, x_3)q_F(x_2, x_4) + q_F(x_1, x_4)q_F(x_2, x_3)$$

pour $x_1, \dots, x_4 \in N^1(F)$.

3.3.3 Classification des droites et un endomorphisme rationnel

Dans cette section, on rappelle d'abord un résultat de Clemens et Griffiths [15, §6] qui montre qu'il y a deux types de droites sur une cubique lisse. Dans [65], Voisin construit un endomorphisme rationnel de F , qui est régulier sur l'ouvert paramétrant les droites dites du premier type, si X est générale. On rappelle la construction et quelques propriétés élémentaires de cet endomorphisme qui nous sera utile dans l'étude de $\text{Psef}^2(X)$ pour X une cubique générale.

3.3.3.1 Classification des droites

Soit X une cubique et l une droite dans X . Il découle de la suite exacte

$$0 \rightarrow N_{l/X} \rightarrow N_{l/\mathbb{P}^5} \simeq \mathcal{O}_l(1)^4 \rightarrow N_{X/\mathbb{P}^5}|_l \simeq \mathcal{O}_l(3) \rightarrow 0$$

et du fait que tout fibré vectoriel sur l est scindé que l'on a, soit $N_{l/X} \simeq \mathcal{O}_l(1) \oplus \mathcal{O}_l^2$, soit $N_{l/X} \simeq \mathcal{O}_l(1)^2 \oplus \mathcal{O}_l(-1)$.

Définition 3.3.3.1. Soit X une cubique lisse et soit l une droite dans X . On dit que l est du *premier type* si $N_{l/X} \simeq \mathcal{O}_l(1) \oplus \mathcal{O}_l^2$ et que l est du *deuxième type* si $N_{l/X} \simeq \mathcal{O}_l(1)^2 \oplus \mathcal{O}_l(-1)$.

Si G est une équation définissant la cubique lisse X , l'application de Gauss est définie par

$$\begin{aligned} \gamma : X &\longrightarrow (\mathbb{P}^5)^\vee & (3.12) \\ x = (x_0, \dots, x_5) &\longmapsto \left(\frac{\partial G}{\partial x_0}(x), \dots, \frac{\partial G}{\partial x_5}(x) \right). \end{aligned}$$

Elle associe à un point $x \in X$ son espace tangent projectif $\mathbb{T}_{X,x} \subset \mathbb{P}^5$.

Proposition 3.3.3.2 (Clemens-Griffiths). *Soit X une cubique lisse et soit l une droite dans X . Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1. la droite l est du premier (resp. du deuxième) type ;
2. $\gamma(l)$ est une conique lisse (resp. une droite) ;
3. on a $\dim \bigcap_{x \in l} \mathbb{T}_{X,x} = 2$ (resp. $\dim \bigcap_{x \in l} \mathbb{T}_{X,x} = 3$).

Démonstration. [15, Lemme 6.7, Prop. 6.19]. □

3.3.3.2 L'endomorphisme rationnel de Voisin

Une droite générale dans X est du premier type [16, Prop. 2.13]. Pour $[l] \in F$ générale, $\bigcap_{x \in l} \mathbb{T}_{X,x}$ est donc un 2-plan, de sorte que soit

$$\bigcap_{x \in l} \mathbb{T}_{X,x} \cap X \simeq \mathbb{P}^2,$$

soit

$$\bigcap_{x \in l} \mathbb{T}_{X,x} \cap X = 2l + l',$$

où l' est une droite dite résiduelle (qui peut être égale à l). Comme X ne contient qu'un nombre fini de plans, on obtient ainsi une application rationnelle [65, Lemma 7]

$$\begin{aligned} f : F &\dashrightarrow F \\ [l] &\longmapsto [l']. \end{aligned}$$

Posons

$$Y := \{([l], [l'], [P]) \in \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^5)^2 \times \mathbb{G}(2, \mathbb{P}^5) \mid 2l \cup l' \subset P \cap X\}$$

et notons p_i la projection de Y sur le i -ième facteur de $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^5)^2 \times \mathbb{G}(2, \mathbb{P}^5)$. Alors on a $f = p_2 \circ p_1^{-1}$. Notons \mathcal{V}_2 et \mathcal{V}_3 les fibrés tautologiques respectifs sur $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^5)$ et $\mathbb{G}(2, \mathbb{P}^5)$, ou encore leurs tirés en arrière sur Y ; il sera clair par le contexte dans quel cas on se trouve.

Supposons désormais que X est une cubique lisse ne contenant aucun plan. Alors on a $Y \simeq \Gamma_f$ et le lieu exceptionnel de f correspond au schéma $\Sigma \subset X$ paramétrant les droites du deuxième type. Pour étudier Σ , on aura besoin des notations suivantes : pour un morphisme $f : M \rightarrow N$ entre deux fibrés vectoriels sur une variété projective Z , on note

$$D_r(f) := \{z \in Z \mid \text{rang}(f_z) \leq r\}$$

les lieux de dégénérescence correspondants. De plus, on note $\mathcal{M}_{m \times n}$ l'espace des matrices complexes $m \times n$ et

$$\mathcal{M}_r := \{M \in \mathcal{M}_{m \times n} \mid \text{rang}(M) \leq r\}.$$

On définit un morphisme de fibrés vectoriels sur F par

$$\begin{aligned} \varphi : V_6 \otimes \mathcal{O}_F &\longrightarrow \mathbf{S}^2 \mathcal{V}_2^\vee \\ (y_0, \dots, y_5) &\longmapsto \sum_{i=0}^5 y_i \frac{\partial G}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

où G est une équation définissant X dans $\mathbb{P}^5 := \mathbb{P}(V_6)$. On a $\ker(\varphi_{[l]}) = \bigcap_{x \in l} \mathbb{T}_{X,x}$ et φ se factorise par un morphisme

$$\phi : (V_6 \otimes \mathcal{O}_F) / \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathbf{S}^2 \mathcal{V}_2^\vee. \quad (3.13)$$

Avec ces notations, on a $D_2(\phi) = \Sigma$ (cf. proposition 3.3.3.2), où l'on note Σ le sous-schéma de F paramétrant les droites du deuxième type.

Lemme 3.3.3.3. *Soit X une cubique ne contenant aucun plan et soit F la variété de Fano de F . Alors le schéma $\Sigma \subset F$ paramétrant les droites du deuxième type sur X est une surface localement intersection complète, et l'on a*

$$N_{\Sigma/F} \simeq \ker(\phi)|_\Sigma^\vee \otimes \text{coker}(\phi)|_\Sigma.$$

Démonstration. Comme Σ s'identifie avec le lieu de dégénérescence $D_2(\phi)$, on a $\dim(\Sigma) \geq 2$ et par un résultat de Clemens et Griffiths [15, Cor. 7.6], on a $\dim(\Sigma) \leq 2$, de sorte que Σ est une surface et le lieu de dégénérescence est de la dimension attendue. Sur un ouvert suffisamment petit U de F , le morphisme ϕ est donné par une application

$$\phi_U : U \rightarrow \mathcal{M}_{4 \times 3}.$$

Comme $D_1(\phi) = \emptyset$, on a $\Sigma \cap U = \phi_U^{-1}(\mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1)$. Or $\mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1$ est lisse de codimension $2 = \text{codim}_F(\Sigma)$, de sorte que l'on en déduit que Σ est localement intersection complète. La caractérisation du fibré normal $N_{\Sigma/F}$ découle par exemple de [22, pp. 54-55]. \square

Notons $\pi_\Sigma : F_\Sigma \rightarrow F$ l'éclatement de F au-dessus de Σ .

Proposition 3.3.3.4. *Soit X une cubique ne contenant aucun plan et soit F la variété de Fano de X . Si la surface $\Sigma \subset F$ est génériquement réduite, alors on a $F_\Sigma \simeq \Gamma_f$.*

Démonstration. Soit G une équation définissant X dans \mathbb{P}^5 . On a un morphisme de fibrés vectoriels sur $\Gamma_f = Y$

$$\begin{aligned} \psi : (V_6 \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_f})/\mathcal{V}_3 &\rightarrow \mathbf{S}^2 \mathcal{V}_2^\vee \\ (y_0, \dots, y_5) &\mapsto \sum_{i=0}^5 y_i \frac{\partial G}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

où le lieu de dégénérescence $D_2(\psi)$ est un diviseur de Cartier (défini par l'annulation de $\det(\psi)$), de sorte que la projection $Y \simeq \Gamma_f \rightarrow F$ se factorise par F_Σ . Par le lemme 3.3.3.3, Σ est localement une intersection complète, de sorte que F_Σ l'est aussi. Comme Σ est réduite, F_Σ est lisse en codimension 1 et donc normale, d'où l'on déduit $\Gamma_f \simeq F_\Sigma$ par le théorème principal de Zariski. \square

Remarque 3.3.3.5. Je ne connais pas d'exemple de cubique lisse X pour laquelle Σ n'est pas réduite (pour la cubique de Fermat, Σ est réductible (cf. [16, §2.14])).

3.4 Classes positives de codimension 1 et 2

Après les résultats préliminaires des sections précédentes, on étudie dans cette section les cônes des classes (pseudo)effectives ou nef. On commence en regardant la positivité des classes dans $N^2(F)$ pour X générale (§3.4.1). Ensuite, on étudie la positivité des classes sur F en toute codimension pour X générale dans \mathcal{C}_d pour $d \in \{8, 12, 14\}$ (§3.4.2 - 3.4.4). En particulier, on vérifie les conjectures de Hassett et Tschinkel pour une cubique générale contenant un plan et pour une cubique pfaffienne générale.

3.4.1 Cubiques générales

Soit X une cubique générale. Le résultat principal de cette section est que l'on a une inclusion

$$\text{Psef}^2(F) \subset \text{Nef}^2(F).$$

On conjecture que cette inclusion est stricte (cf. proposition 3.4.1.10 et conjecture 3.4.1.14).

3.4.1.1 Classes induites par la Grassmannienne et la face isotrope

Notons \mathcal{V}_2 le fibré tautologique de rang 2 sur la Grassmannienne $G(1, \mathbb{P}^5)$ et posons

$$\tilde{s}_1 := c_1(\mathcal{V}_2^\vee) \quad , \quad \tilde{s}_2 := c_2(\mathcal{V}_2^\vee)$$

dans $H^\bullet(G(1, \mathbb{P}^5), \mathbb{Z})$ ainsi que¹

$$s_1 := c_1(\mathcal{V}_2^\vee|_F) \quad , \quad s_2 := c_2(\mathcal{V}_2^\vee|_F)$$

dans $H^\bullet(F, \mathbb{Z})$.

Lemme 3.4.1.1. *Soit X une cubique lisse et soit F la variété de Fano de X . Alors on a*

$$c_2(F) = 5s_1^2 - 8s_2.$$

Démonstration. Soit V_6 un espace vectoriel complexe de dimension 6 tel que $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(V_6)$. Soit \mathcal{Q} le fibré quotient sur $G(1, \mathbb{P}^5)$ et posons

$$\sigma_1 := c_1(\mathcal{Q}|_F) \quad , \quad \sigma_2 := c_2(\mathcal{Q}|_F).$$

La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{V}_2|_F \rightarrow (V_6 \otimes \mathcal{O}_{G(1, \mathbb{P}^5)})|_F \rightarrow \mathcal{Q}|_F \rightarrow 0$$

fournit les relations

$$s_1 = -\sigma_1 \quad , \quad s_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2. \quad (3.14)$$

Exprimons $c_2(F)$ en fonction de s_1^2 et s_2 . Comme F est le lieu des zéros d'une section globale de $\mathbf{S}^3 \mathcal{V}_2^\vee$, la suite exacte

$$0 \rightarrow T_F \rightarrow T_G|_F \rightarrow N_{F/G} \rightarrow 0,$$

donne

$$c_2(F) + c_2(\mathbf{S}^3 \mathcal{V}_2^\vee)|_F = c_2(T_G)|_F.$$

Or $c_2(\mathbf{S}^3 \mathcal{V}_2^\vee) = 11s_1^2 + 10s_2$ et les relations (3.14) donnent $s_1^2 - 2s_2 = -(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)$, de sorte que $T_{G(1, \mathbb{P}^5)} = \mathcal{V}_2^\vee \otimes \mathcal{Q}$ fournit

$$\begin{aligned} \text{ch}(G(1, \mathbb{P}^5)) &= \text{ch}(\mathcal{V}_2^\vee) \text{ch}(\mathcal{Q}) \\ &= (2 + s_1 + \frac{1}{2}(s_1^2 - 2s_2) + (\text{classes de degré } \geq 3)) \\ &\quad \cdot (4 + \sigma_1 + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + (\text{classes de degré } \geq 3)) \\ &= 8 + 6s_1 + s_1^2 + (s_1^2 - 2s_2) + (\text{classes de degré } \geq 3) \end{aligned}$$

et l'on obtient

$$c_2(F) = 5s_1^2 - 8s_2.$$

□

Par la proposition 3.3.2.4, on a donc

$$N^2(F) = \langle s_1^2, c_2(F) \rangle = \langle s_1^2, s_2 \rangle$$

pour une cubique générale X .

1. Remarquons que cette notation est conforme avec la notation introduite dans §3.3.1.

Lemme 3.4.1.2 (Voisin). *Soit X une cubique et soit F la variété de Fano de X . Alors on a*

$$\mathbb{R}^+ s_2 + \mathbb{R}^+(s_1^2 - s_2) \subset \text{Psef}^2(F)$$

et $\mathbb{R}^+ s_2 \subset \text{Psef}_{\text{iso}}^2(F)$. *Si X est générale, s_2 engendre donc un rayon extrémal de $\text{Psef}^2(F)$ et une surface dans F est lagrangienne si et seulement si sa classe est un multiple de s_2 .*

Démonstration. On a (cf. par exemple la démonstration de [67, Lemma 2.8])

$$\text{Psef}^2(\mathbf{G}(1, \mathbb{P}^5)) = \mathbb{R}^+ \tilde{s}_2 + \mathbb{R}^+(\tilde{s}_1^2 - \tilde{s}_2),$$

et par restriction à $F \subset \mathbf{G}(1, \mathbb{P}^5)$, l'inclusion est claire. Or on peut intersecter X avec un hyperplan (général) $H \subset \mathbb{P}^5$ pour obtenir une cubique lisse $Y := X \cap H$ dans \mathbb{P}^4 . La variété $F(Y)$ paramétrant les droites sur Y est alors une surface lagrangienne dans F de classe s_2 (cf. [64, §3, Ex. 7], [33, Prop. 2]), ce qui fournit le résultat souhaité. \square

Donnons un autre exemple d'une sous-variété lagrangienne d'une variété de Fano d'une cubique X (générale).

Exemple 3.4.1.3. Pour X générale, on peut supposer que X est la section hyperplane d'une cubique Y dans \mathbb{P}^6 . Par généralité, la variété $F_2(Y)$ paramétrant les 2-plans dans Y est une surface lisse et l'on a une injection

$$\begin{aligned} i : F_2(Y) &\rightarrow F \\ P &\mapsto P \cap X. \end{aligned}$$

On a $[i(F_2(Y))] = 63s_2$ (cf. [33]).

D'autre part, on a deux exemples de classes représentées par un multiple de $s_1^2 - s_2$:

Exemple 3.4.1.4. Soit l une droite dans X . La surface

$$S_l := \{[l'] \in F \mid l \cap l' \neq \emptyset\}$$

est de classe $\frac{1}{3}(s_1^2 - s_2)$ [63, §0].

Exemple 3.4.1.5. La surface Σ paramétrant les droites du deuxième type sur X est de classe $5(s_1^2 - s_2)$ [2, p. 488].

3.4.1.2 L'endomorphisme rationnel de Voisin

Pour obtenir une restriction sur l'autre rayon extrémal de $\text{Psef}^2(F)$, on peut utiliser l'endomorphisme rationnel $f : F \dashrightarrow F$ construit dans §3.3.3.

Proposition 3.4.1.6 (Amerik). *Si X est une cubique générale, la surface Σ est lisse.*

Démonstration. Soit V_6 un espace vectoriel complexe de dimension 6 tel que $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(V_6)$. Notons X_G la cubique associée à un polynôme $G \in \mathbf{S}^3 V_6^\vee$ et soit $\Sigma_G \subset X_G$ le schéma paramétrant les droites qui sont de deuxième type. Soit

$$Z := \{([l], G) \in \mathbf{G}(1, \mathbb{P}^5) \times \mathbf{S}^3 V_6^\vee \mid l \subset X_G\}$$

et soit

$$\phi : (V_6 \otimes \mathcal{O}_Z)/\mathcal{V}_2 \rightarrow \mathbf{S}^2 \mathcal{V}_2^\vee$$

le morphisme défini par (3.13). Notons \mathcal{V}_2 le tiré en arrière sur Z du fibré tautologique sur $G(1, \mathbb{P}^5)$. On note $s_\phi : Z \rightarrow \text{Hom}((V_6 \otimes \mathcal{O}_Z)/\mathcal{V}_2, \mathbf{S}^2 \mathcal{V}_2^\vee)$ la section globale associée et l'on pose

$$I := D_2(\phi) = \{(l, G) \in Z \mid l \text{ est du deuxième type}\}.$$

On montre que I est irréductible et lisse en codimension 3. Comme $p_2^{-1}(G) = \Sigma_G$ est de dimension 2 pour G générale, cela entraîne que la projection $I_{\text{sing}} \rightarrow \mathbf{S}^3 V_6^\vee$ n'est pas surjective, d'où l'on déduit le résultat souhaité par lissité générique.

Comme $G(1, \mathbb{P}^5)$ est homogène, il suffit de montrer qu'une fibre $I_l := p_1^{-1}(l)$ est lisse en codimension 3. Remarquons que $I_l = D_2(\phi|_{Z_l})$, où Z_l est la fibre au-dessus de $[l]$ de la projection de Z sur $G(1, \mathbb{P}^5)$. Supposons que l est définie par $x_0 = x_1 = 0$, de sorte que

$$\phi_{(l,G)}(x_2, \dots, x_5) = \sum_{j=2}^5 x_j \frac{\partial G}{\partial y_j}.$$

La matrice 4×3 représentant $\phi_{(l,G)}$ a comme coefficients dans la j -ième colonne les coefficients des monômes $x_1^2, x_0 x_1, x_1^2$ de $\frac{\partial G}{\partial y_j}$. La section $s_\phi|_{Z_l}$ s'écrit alors explicitement comme une application de Z_l dans $\mathcal{M}_{4 \times 3}$ et l'on a $I_l = s_\phi|_{Z_l}^{-1}(\mathcal{M}_2)$. Comme $s_\phi|_{Z_l}$ est linéaire et donc lisse, cela entraîne que I_l est irréductible et I l'est donc aussi. De plus, on a

$$\text{codim}(\text{Sing}(I_l)) = \text{codim}(\text{Sing}(\mathcal{M}_2)) = 4,$$

ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 3.4.1.7. Dans [2], Amerik suggère que l'on devrait avoir $\omega_\Sigma = \mathcal{O}_\Sigma(3)$. L'argument suivant vérifie cette hypothèse : avec les notations de la démonstration du lemme 3.3.3.3, on a $\ker(\phi)|_\Sigma = (\ker(\varphi)/\mathcal{V}_2)|_\Sigma$ et

$$T_F|_\Sigma = \text{Hom}(\mathcal{V}_2, \ker(\varphi)/\mathcal{V}_2)|_\Sigma = (\mathcal{V}_2^\vee \otimes \ker(\phi))|_\Sigma.$$

En prenant le déterminant, on obtient $\det \ker(\phi)|_\Sigma = \mathcal{O}_\Sigma(-2)$. La suite exacte

$$0 \rightarrow \ker(\varphi)/\mathcal{V}_2 \rightarrow V_6 \otimes \mathcal{O}_F/\mathcal{V}_2 \rightarrow \mathbf{S}^2 \mathcal{V}_2^\vee \rightarrow \text{coker}(\phi) \rightarrow 0,$$

restreinte à Σ , fournit alors $\text{coker}(\phi)|_\Sigma = \mathcal{O}_\Sigma(1)$. Comme $N_{\Sigma/F} = \ker(\phi)|_\Sigma^\vee \otimes \text{coker}(\phi)|_\Sigma$, on obtient, en appliquant la formule d'adjonction et par les remarques précédentes,

$$\omega_\Sigma = \det(\ker(\phi)^\vee \otimes \text{coker}(\phi)) = \mathcal{O}_\Sigma(3).$$

Par la proposition 3.3.3.4 et la proposition 3.4.1.6, on a, pour X générale, le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_f \simeq F_\Sigma & & \\ \pi \downarrow & \searrow g & \\ F & \xrightarrow{f} & F, \end{array} \quad (3.15)$$

où $\pi : F_\Sigma \rightarrow F$ est l'éclatement de Σ .

Lemme 3.4.1.8 (Amerik). *Soit X une cubique générale. Alors g ne contracte pas de diviseur, et toute surface T dans F_Σ contractée par g est aussi contractée par π .*

Démonstration. Par [65, §4.1], $g^*\sigma$ est proportionnelle à $\pi^*\sigma$, donc

$$E := \text{Ram}(\pi) = \text{Ram}(g),$$

de sorte que toute sous-variété de F_Σ contractée par g est contenue dans E . En particulier, g ne contracte pas le diviseur exceptionnel E car sinon f serait un morphisme régulier. Soit maintenant Z une surface irréductible contractée par g , de sorte que la 2-forme $g^*\sigma$ est nulle sur Z . Si Z n'est pas contractée par π , on a $\pi(Z) = \Sigma$ et donc $\pi^*\sigma|_Z \neq 0$ (car Σ n'est pas lagrangienne par l'exemple 3.4.1.5), ce qui est une contradiction. \square

3.4.1.3 Restrictions sur $\text{Psef}^2(F)$

Les nombres d'intersection parmi les classes s_1 et s_2 sont bien connus.

Lemme 3.4.1.9. *On a*

$$s_1^4 = 108 \quad , \quad s_1^2 \cdot s_2 = 45 \quad , \quad s_2^2 = 27.$$

Démonstration. Cf. par exemple [2, Lemma 4]. \square

Proposition 3.4.1.10. *Soit X une cubique générale et soit F la variété de Fano de X . On a*

$$\text{Psef}^2(F) = \mathbb{R}^+ s_2 + \mathbb{R}^+(s_1^2 - as_2)$$

pour un réel positif $a \leq \frac{5}{3}$. En particulier, on a

$$\text{Psef}^2(F) \subset \text{Nef}^2(F). \quad (3.16)$$

Démonstration. Par le lemme 3.4.1.8, g ne contracte aucun diviseur donc g^* envoie $\text{Psef}^2(F)$ dans $\text{Psef}^2(F_\Sigma)$ et le cône des classes pseudoeffectives $\text{Psef}^2(F)$ est donc invariant par l'application induite $f^* : \text{N}^2(F) \rightarrow \text{N}^2(F)$, où l'on utilise les notations du diagramme 3.15. On a $(f^n)^* = (f^*)^n$ [2, Thm. 3] et [2, Thm. 8]

$$f^*s_2 = 31s_2 \quad , \quad f^*s_1^2 = 4s_1^2 + 45s_2,$$

d'où

$$f^*(s_1^2 - \frac{5}{3}s_2) = 4(s_1^2 - \frac{5}{3}s_2).$$

Pour $a > \frac{5}{3}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f^*)^n(s_1^2 - as_2) = -bs_2$$

pour un entier positif b . La classe $-s_2$ n'est pas pseudoeffective, ce qui entraîne

$$\text{Psef}^2(F) = \mathbb{R}^+ s_2 + \mathbb{R}^+(s_1^2 - as_2)$$

pour un $a \leq \frac{5}{3}$. Comme $(s_1^2 - \frac{5}{3}s_2) \cdot s_2 = 0$, on a en particulier

$$\text{Psef}^2(F) \subset \text{Nef}^2(F). \quad (3.17)$$

\square

Remarque 3.4.1.11. On peut aussi retrouver ce résultat par un argument direct. Comme on a (cf. par exemple la démonstration du Lemme 2.8 dans [67])

$$\text{Psef}^2(\text{G}(1, \mathbb{P}^5)) = \text{Nef}^2(\text{G}(1, \mathbb{P}^5)) = \mathbb{R}^+ \tilde{s}_2 + \mathbb{R}^+(\tilde{s}_1^2 - \tilde{s}_2),$$

la classe $s_2 = \tilde{s}_2|_F$ est nef par le lemme 2.3.4.8.

La proposition 3.4.1.10 découle également de la proposition 3.4.1.13 ci-dessous. Mais comme la technique en utilisant l'action de f^* pourrait être utile dans l'étude des cônes dans $\text{N}^1(F)$ et $\text{N}^2(F)$ pour d'autres classes de cubiques, on a choisi de l'inclure ici.

Lemme 3.4.1.12. *Soit X une cubique et soit F_x la variété paramétrant les droites dans X passant par $x \in X$. Si F_x contient une composante S_1 de dimension ≥ 2 , alors S_1 est une surface lisse, contenue dans la surface (peut-être réductible) Σ paramétrant les droites du deuxième type dans X . En particulier, il y a juste un nombre fini de points $x \in X$ tels que $\dim(F_x) = 2$.*

Démonstration. Soit l une droite dans X passant par x . Comme (cf. [16, p. 48])

$$T_{F_x, [l]} = H^0(l, N_{l/X}(-1)),$$

la proposition 3.3.3.2 implique que l'on a $\dim T_{F_x, [l]} \leq 2$ avec égalité si et seulement si $[l] \in \Sigma$. Si F_x contient donc une composante S_1 de dimension 2, on doit avoir $\dim T_{F_x, [l]} = \dim S_1 = 2$ en tout point $[l] \in S_1$, ce qui entraîne que S_1 est une surface lisse dans Σ . \square

Proposition 3.4.1.13. *Soit X une cubique générale et soit F la variété de Fano de X . La classe $s_1^2 - \frac{5}{3}s_2$ n'est pas effective.*

Démonstration. Supposons qu'un multiple de la classe $s_1^2 - \frac{5}{3}s_2$ est représenté par une surface $T \subset F$. Notons l_t la droite correspondant à $t \in T$ et $\mathbb{P}_{t^\vee}^3$ le \mathbb{P}^3 correspondant à $t^\vee \in T^\vee \subset G(3, (\mathbb{P}^5)^\vee)$ tel que

$$l_t = \bigcap_{[H] \in \mathbb{P}_{t^\vee}^3} H.$$

On a $T \cdot s_2 = 0$ et donc $T \cdot [G(1, \mathbb{P}^4)] = 0$ dans $G(1, \mathbb{P}^5)$. Autrement dit, aucune droite paramétrée par T n'est contenue dans un \mathbb{P}^4 général dans \mathbb{P}^5 . La surface duale T^\vee est donc contenue dans

$$\{[L] \in G(3, (\mathbb{P}^5)^\vee) \mid$$

aucun hyperplan correspondant à un point de L ne passe par $x \in \mathbb{P}^5$ général}.

Par la propriété universelle de la Grassmannienne, T^\vee correspond à un diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{q} & (\mathbb{P}^5)^\vee \\ \downarrow p & & \\ T^\vee & & \end{array}$$

où $Z \subset T^\vee \times (\mathbb{P}^5)^\vee$, p et q sont les projections naturelles et $p^{-1}(t^\vee) = \mathbb{P}_{t^\vee}^3$. Notre hypothèse est que $V := q(Z) = \bigcup_{t^\vee \in T^\vee} \mathbb{P}_{t^\vee}^3$ est une sous-variété stricte de $(\mathbb{P}^5)^\vee$; c'est donc une hypersurface. La fibre d'un point général $v \in V$ est de dimension 1, ce qui signifie que v est dans une famille de dimension 1 de $\mathbb{P}_{t^\vee}^3$. Ces 3-plans sont contenus dans l'hyperplan $\mathbb{T}_{V, v}$, donc le remplisse. Ils sont aussi contenus dans V , de sorte que $\mathbb{T}_{V, v} \subset V$. On en déduit que V est une réunion d'hyperplans $H_1^\vee, \dots, H_r^\vee$ de $(\mathbb{P}^5)^\vee$. Soit maintenant T_i la composante de T telle que $q(p^{-1}(T_i^\vee)) = H_i^\vee$. Alors on a

$$\bigcap_{t \in T_i} l_t = \bigcap_{[H] \in H_i^\vee} H = \{x\},$$

de sorte que T_i est une surface contenue dans la variété F_x paramétrant les droites dans X passant par x . Comme X est générale, on a donc $T_i = \Sigma$ pour $i = 1, \dots, r$ (cf. proposition 3.4.1.6 et lemme 3.4.1.12); en particulier, la classe de T est un multiple de $[\Sigma] = 5(s_1^2 - s_2)$ (cf. exemple 3.4.1.5), ce qui est une contradiction à l'hypothèse que la classe de T est un multiple de $s_1^2 - \frac{5}{3}s_2$. On en déduit que $s_1^2 - \frac{5}{3}s_2$ n'est pas effective. \square

La conjecture suivante semble naturelle :

Conjecture 3.4.1.14. *Soit X une cubique générale et soit F la variété de Fano de X . Alors on a*

$$\text{Psef}^2(F) = \mathbb{R}^+ s_2 + \mathbb{R}^+(s_1^2 - s_2)$$

et

$$\text{Nef}^2(F) = \mathbb{R}^+ s_2 + \mathbb{R}^+(s_1^2 - \frac{5}{3}s_2).$$

Autrement dit, on conjecture que toute classe pseudoeffective s'obtient comme restriction d'une classe effective dans la Grassmannienne $G(1, \mathbb{P}^5)$, ce qui impliquerait que l'inclusion (3.16) est stricte.

3.4.2 Cubiques contenant un plan

Soit X une cubique générale contenant un plan, i.e., X est générale dans \mathcal{C}_8 . Comme résultat principal de cette section, on vérifie les conjectures de Hassett et Tschinkel (propositions 3.4.2.7, 3.4.2.10 et 3.4.2.15) pour la variété de Fano F de X . De plus, on montre que F n'admet pas d'automorphisme birationnel non trivial (proposition 3.4.2.21) et l'on montre que la face isotrope de $\text{Psef}^2(F)$ est de codimension 1 (proposition 3.4.2.22).

3.4.2.1 Les diviseurs D_P et D_Q

Comme la cubique X est générale dans \mathcal{C}_8 , elle contient un unique plan P . On note P^\vee le plan dual dans F . Soit Π le plan projectif paramétrant les espaces linéaires de dimension 3 dans \mathbb{P}^5 contenant P . Pour $[\mathbb{P}^3] \in \Pi$, on a

$$\mathbb{P}^3 \cap X = P \cup Q_{\mathbb{P}^3},$$

où $Q_{\mathbb{P}^3}$ est une quadrique dont la classe dans $H^4(X, \mathbb{Z})$ ne dépend pas du $\mathbb{P}^3 \in \Pi$ choisi.

Remarque 3.4.2.1. Soit $x \in X \setminus P$. Comme il y a un unique \mathbb{P}^3 contenant P et x , il y a une unique quadrique $Q_{\mathbb{P}^3} \subset X$ contenant x .

Remarque 3.4.2.2. Pour le système linéaire des coniques $Q_{\mathbb{P}^3} \cap P$ paramétré par Π , on a l'interprétation alternative suivante (cf. [63, Lemme 6]) : soit $\gamma : X \rightarrow (\mathbb{P}^5)^\vee$ l'application de Gauss (cf. (3.12)) et notons Π' le plan dans $(\mathbb{P}^5)^\vee$ paramétrant les hyperplans dans \mathbb{P}^5 contenant P . Alors on a une bijection

$$\begin{aligned} (\Pi')^\vee &\longrightarrow \Pi \\ [l] &\longmapsto \mathbb{P}_l^3 := \bigcap_{x \in \gamma^{-1}(l)} \mathbb{T}_{X,x} \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}_l^3 \cap Q_{\mathbb{P}^3} = \gamma^{-1}(l). \quad (3.18)$$

Si l'on parle dans la suite d'une quadrique Q , il est sous-entendu qu'elle est de la forme $Q_{\mathbb{P}^3}$, où il n'importe pas quel \mathbb{P}^3 on choisit. Avec cette notation, on a par la proposition 3.3.2.4,

$$N^2(X) = \mathbb{R}[P] \oplus \mathbb{R}[Q]$$

et la forme d'intersection est donnée par [63, §0]

$$[P] \cdot [Q] = -2 \quad , \quad [P]^2 = 3 \quad , \quad [Q]^2 = 4. \quad (3.19)$$

De plus, on a

$$[P] + [Q] = h^2,$$

où l'on note h la classe d'une section hyperplane dans X . Si l'on pose

$$p := \alpha([P]) \quad , \quad q := \alpha([Q]),$$

où $\alpha = \text{pr}_{2,*} \text{pr}_1^* : H^4(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(F, \mathbb{Z})$ est l'isomorphisme d'Abel-Jacobi définie dans (3.7), on a

$$N^1(F) = \mathbb{R}p \oplus \mathbb{R}q$$

et

$$p + q = s_1$$

par la proposition 3.3.1.5.

Construisons d'abord un diviseur premier D_Q de classe q . Soit $Q \subset X$ une quadrique générale (i.e. générale dans le système de quadriques paramétré par Π) et notons F_x la variété paramétrant les droites passant par $x \in X$. Comme F_x est une courbe pour x en dehors un ensemble fini de points de X (cf. lemme 3.4.1.12) et une courbe irréductible pour $x \in Q$ général, $\text{pr}_1^{-1}(Q)$ a une seule composante irréductible D_1 de dimension 3. Le diviseur $D_Q := \text{pr}_2(D_1)$ est donc irréductible de classe q .

Pour construire le diviseur D_P , on pose d'abord

$$D := \{([l], [\mathbb{P}^3]) \in F \times \Pi \mid l \subset Q_{\mathbb{P}^3}\}$$

et l'on note p_1 et p_2 les deux projections associées, de sorte qu'une fibre de p_2 paramètre les droites contenues dans $Q_{\mathbb{P}^3}$.

Lemme 3.4.2.3. *La variété D est une fibration en coniques au-dessus d'une surface K3 lisse S de degré 2 et est donc lisse elle-même.*

Démonstration. Rappelons d'abord la construction géométrique suivante (cf. [63, p.582], [39, §4]) : soit $\pi_P : X \dashrightarrow \Pi$ la projection depuis P dans \mathbb{P}^5 . L'éclatement $\tilde{X} \rightarrow X$ de X au-dessus de P résout alors les indéterminations de π , de sorte que l'on obtient une application régulière $\tilde{\pi}_P : \tilde{X} \rightarrow \Pi$ de fibres $\tilde{\pi}_P^{-1}(\mathbb{P}^3) = Q_{\mathbb{P}^3}$. Le lieu discriminant dans Π de ce fibré en quadriques est une sextique C . Comme X contient un unique plan, les quadriques $Q_{\mathbb{P}^3}$ sont toutes non dégénérées, de sorte que C est lisse par un résultat de Beauville [8, Prop. I.1.2]. La factorisation de Stein de p_2 donne un morphisme

$$D \longrightarrow S \xrightarrow{s} \Pi,$$

où la fibre $s^{-1}(\mathbb{P}^3)$ paramètre les deux réglages de $Q_{\mathbb{P}^3}$, de sorte que s est un revêtement double. Comme la variété paramétrant les droites dans une quadrique $Q_{\mathbb{P}^3}$ est la réunion de deux coniques distinctes si et seulement si $Q_{\mathbb{P}^3}$ est lisse, le lieu de ramification de s s'identifie à la courbe discriminante lisse C . Il s'ensuit que S est une surface K3 lisse de degré 2 et que D est une fibration en coniques au-dessus de S , d'où l'on déduit que D est lisse. \square

Posons

$$D_P := \overline{\{[l] \in F \mid l \cap P \neq \emptyset, l \not\subset P\}}.$$

Proposition 3.4.2.4. *La projection p_1 fournit un isomorphisme entre D et D_P , de sorte que D_P est un diviseur lisse, fibré en coniques au-dessus d'une surface K3 lisse S de degré 2. De plus, on a $[D_P] = p$.*

Démonstration. Soit $([l], [\mathbb{P}^3]) \in D$. Comme l et P sont contenus dans \mathbb{P}^3 , on a $l \cap P \neq \emptyset$. Si $l \not\subset P$, il est clair que l'on a $[l] \in D_P$. Si l est dans P , c'est la limite d'une famille de droites dans $Q_{\mathbb{P}^3}$ et donc la limite d'une famille de droites dans D_P , de sorte que l'on a également $[l] \in D_P$. Comme toute droite correspondant à

un point dans $\{[l] \in F \mid l \cap P \neq \emptyset, l \not\subset P\}$ est contenue dans une unique quadrique $Q_{\mathbb{P}^3}$ (cf. remarque 3.4.2.1), on a donc

$$p_1(D) = D_P$$

et $p_1|_D$ est bijective au-dessus de $p_1(D) \setminus P^\vee$. Il nous reste à étudier les fibres au-dessus de $p_1(D) \cap P^\vee$. Soit donc $l \in p_1(D) \cap P^\vee$ et choisissons des points $x, y \in l$. Alors il existe une unique droite $l' \subset \Pi'$ passant par $[\mathbb{T}_{X,x}]$ et $[\mathbb{T}_{X,y}] \in (\mathbb{P}^5)^\vee$, de sorte que $\gamma^{-1}(l')$ est l'unique conique contenant l (cf. (3.18)). L'application $p_1 : D \rightarrow D_P$ est donc une bijection. On a une section $l \mapsto (l, \langle l, P \rangle)$ au-dessus de $p_1(D) \setminus P^\vee$, de sorte que D_P est lisse en codimension 1 et donc normale. Comme D est lisse par le lemme (3.4.2.3), le théorème principal de Zariski entraîne que p_1 est un isomorphisme.

Il reste à montrer que $[D_P] = p$. L'image réciproque de P sous la projection pr_2 est la réunion des variétés

$$D_2 := \{(x, [l]) \in P \times P^\vee \mid x \in l\},$$

et

$$D_3 := \overline{\{(x, [l]) \in P \times F \mid x \in l, [l] \notin P^\vee\}}.$$

Comme D_2 est contractée sur une surface par pr_2 et comme $\text{pr}_2(D_3) = D_P$, on a donc $p = \alpha(P) = [D_P]$. \square

Le lemme suivant nous permettra ensuite de déterminer le cône $\text{Psef}^1(F)$.

Lemme 3.4.2.5. *La forme de Beauville sur $N^1(F)$ est déterminée par*

$$q_F(p, p) = -2 \quad , \quad q_F(q, q) = 0 \quad , \quad q_F(p, q) = 4.$$

Démonstration. Par (3.19), la classe $[Q] - 2[P]$ est orthogonale à h^2 dans $H^4(X, \mathbb{Z})$, d'où l'on déduit $q_F(q - 2p, q + p) = 0$. En appliquant (3.8), on obtient de plus $q_F(q - 2p, q - 2p) = -24$ et par [11], on a $q_F(q + p, q + p) = 6$. En écrivant p et q comme combinaison linéaire de $q - 2p$ et $q + p$, on obtient le résultat souhaité. \square

Remarque 3.4.2.6. Dans la base $\{p, s_1 + p\}$ de $N^1(F)$, la forme de Beauville est donnée par

$$q_F(p, p) = -2 \quad , \quad q_F(p, s_1 + p) = 0 \quad , \quad q_F(s_1 + p, s_1 + p) = 8.$$

Soient (a, b) des coordonnées sur $N_{\mathbb{Z}}^1(F)$ par rapport à cette base. Alors on a $q_F(a, b) = -2a^2 + 8b^2$ et donc

$$\begin{aligned} q_F(a, b) = -10 & \Leftrightarrow a = \pm 3, b = \pm 1, \\ q_F(a, b) = -2 & \Leftrightarrow a = \pm 1, b = 0. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \{\rho \in N_{\mathbb{Z}}^1(X) \mid q_F(s_1, \rho) \geq 0, q_F(\rho, \rho) = -2\} &= \{p\}, \\ \{\rho \in N_{\mathbb{Z}}^1(X) \mid q_F(s_1, \rho) \geq 0, q_F(\rho, \rho) = -10\} &= \{q - p, 5p + q\}. \end{aligned}$$

Proposition 3.4.2.7. *Soit X une cubique générale contenant un plan et soit F la variété de Fano de X . Alors on a*

$$\begin{aligned} \text{Psef}^1(F) = \text{Eff}^1(F) &= \mathbb{R}^+ p + \mathbb{R}^+ q \\ &= \text{cone}\{\rho \in N_{\mathbb{Z}}^1(X) \mid q_F(s_1, \rho) \geq 0, q_F(\rho, \rho) \geq -2\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

et la classe de tout diviseur premier autre que D_P est dans $\mathbb{R}^+(2p + q) + \mathbb{R}^+ q$.

Démonstration. Par [13, Prop. 4.2], on a $q_F([D], [D']) \geq 0$ pour deux diviseurs premiers distincts D et D' sur F . Comme on a $q_F(p, p - aq) < 0$ et $q_F(q, q - ap) < 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, on obtient

$$\text{Psef}^1(F) = \text{Eff}^1(F) = \mathbb{R}^+ p + \mathbb{R}^+ q.$$

La caractérisation (3.20) de $\text{Psef}^1(F)$ découle alors tout de suite de la remarque 3.4.2.6 : toute classe d'un diviseur premier D avec $q_F([D], [D]) < 0$ est de classe un multiple d'une classe primitive $\rho \in N_{\mathbb{Z}}^1(F)$ de carré -2 sous la forme de Beauville et donc un multiple de p . On en déduit que tout diviseur premier autre que D_P est dans $\mathbb{R}^+(2p + q) + \mathbb{R}^+ q$. \square

3.4.2.2 Classes nefes et classes de courbes

Notons c la classe d'une fibre de $D_P \simeq D \rightarrow S$ (qui est une conique) et l la classe d'une droite dans P . Alors on a

$$N_1(F) = \langle c, l \rangle$$

et l'on verra que ces deux classes engendrent le cône des courbes $\text{Eff}_1(F) = \text{Psef}_1(F)$ (proposition 3.4.2.7). On commence en déterminant l'accouplement d'intersection entre classes de courbes et classes de diviseurs.

Lemme 3.4.2.8. *L'accouplement d'intersection*

$$N^1(F) \times N_1(F) \rightarrow \mathbb{R}$$

est donné par

$$p \cdot c = -2 \quad , \quad q \cdot c = 4 \quad , \quad p \cdot l = 3 \quad , \quad q \cdot l = -2.$$

Démonstration. Comme ${}^t\alpha(c) = Q$ et ${}^t\alpha(l) = P$ on déduit l'énoncé souhaité de (3.9) et (3.19). \square

Remarque 3.4.2.9. Comme

$$2x \cdot l = q_F(x, q - p) \quad , \quad x \cdot c = q_F(x, p)$$

pour tout $x \in H^2(F, \mathbb{Z})$, on a $\rho_l = q - p$ et $\rho_c = p$ avec les notations de (3.5).

Proposition 3.4.2.10. *Soit X une cubique générale contenant un plan et soit F la variété de Fano de X . Alors on a*

$$\text{Psef}_1(F) = \text{Eff}_1(F) = \mathbb{R}^+ l + \mathbb{R}^+ c$$

et

$$\text{Nef}^1(F) = \mathbb{R}^+(2p + 3q) + \mathbb{R}^+(2p + 2).$$

Démonstration. Comme $D_Q \cdot l < 0$ et $D_P \cdot c < 0$, l'énoncé découle tout de suite du théorème de contraction (cf. [37, Thm 3.7]) : il existe des contractions extrémales $\text{contr}_l : F \rightarrow F'$ et $\text{contr}_c : F \rightarrow F''$ telles qu'une courbe est contractée par contr_l (resp. par contr_c) si et seulement si elle est de classe dans $\mathbb{R}^+ l$ (resp. de classe dans $\mathbb{R}^+ c$). Comme $2p + 3q$ et $2p + q$ sont des classes effectives avec

$$(2p + 3q) \cdot l = (2p + q) \cdot c = 0,$$

la contraction contr_l (resp. contr_c) est définie par les sections globales du fibré en droites $\mathcal{O}_F(m(2D_P + 3D_Q))$ (resp. par les sections globales de $\mathcal{O}_F(m(2D_P + D_Q))$) pour un m suffisamment grand. Comme $m(2p + 3q)$ (resp. $m(2p + q)$) est le tiré en arrière d'une classe ample par contr_l (resp. contr_c), on voit que ces deux classes engendrent les deux rayons extrémaux de $\text{Nef}^1(F)$; par dualité, l et c engendrent les deux rayons extrémaux de $\text{Psef}_1(F)$. \square

Remarque 3.4.2.11. Il découle de la remarque 3.4.2.6 que la proposition 3.4.2.10 vérifie les conjectures 3.2.2.7 et 3.2.2.10 de Hassett et Tschinkel.

3.4.2.3 Géométrie birationnelle

Soit Y une variété hyperkählérienne *projective* et soit $f : Y \dashrightarrow Y'$ une application birationnelle, où Y' est une autre variété symplectique projective. Alors f est un isomorphisme en codimension 1, de sorte que $f^* : N^1(Y') \rightarrow N^1(Y)$ est un isomorphisme.

Définition 3.4.2.12. Le *cône nef birationnel* $\text{Nef}_{\text{bir}}^1(Y)$ est un cône dans $N^1(Y)$, défini comme la réunion des cônes $f^* \text{Nef}^1(Y')$, où $f : Y \dashrightarrow Y'$ est une application birationnelle et Y' est une autre variété symplectique projective. Un sous-cône de $\text{Nef}_{\text{bir}}^1(Y)$ de la forme $f^* \text{Amp}(Y')$ est dit une *chambre ample* et l'adhérence $\overline{f^* \text{Amp}(Y')}$ d'une chambre ample est dite une *chambre nef*.

Remarque 3.4.2.13. Si $f : Y \dashrightarrow Y'$ est une application birationnelle entre variétés symplectiques projectives, $f^* \text{Amp}(Y') \cap \text{Amp}(Y) \neq \emptyset$ entraîne $Y \simeq Y'$, de sorte que les chambres amples de $\text{Nef}_{\text{bir}}^1(Y)$ sont disjointes.

Un *flop de Mukai* est un morphisme birationnel canoniquement associé à une variété hyperkählérienne Y contenant un plan $P \simeq \mathbb{P}^2$. Rappelons sa construction en suivant [48, §3] : soit $\pi : Z \rightarrow Y$ l'éclatement de Y au-dessus de P et soit $E := \pi^{-1}(P^\vee)$ le diviseur exceptionnel de π . Comme Y est hyperkählérienne, on a $N_{P/Y} \simeq \Omega_P$ (cf. [48, Prop. 3.1]) et donc

$$E \simeq \mathbb{P}(\Omega_P) \simeq \{(p, l) \in P \times P^\vee \mid p \in l\},$$

de sorte que les deux projections $p_1 : E \rightarrow P$ et $p_2 : E \rightarrow P^\vee$ fournissent deux structures de \mathbb{P}^1 -fibré sur E . Pour $p' \in P$, on a par la formule d'adjonction $\mathcal{O}_Z(E)|_{p_2^{-1}(p')} = \mathcal{O}_{P^\vee}(-1)$, de sorte qu'il existe une variété *analytique* lisse Y^+ et un morphisme $\pi^+ : Z \rightarrow Y^+$ tel que π^+ est un isomorphisme sur $Z \setminus E$ et $\pi^+|_E = p_2|_E$ (cf. [51] [20]). L'application birationnelle $f_P := \pi^+ \circ \pi^{-1}$ est alors appelée le flop de Mukai de Y le long de P . On résume cette construction dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \pi \swarrow & & \searrow \pi^+ \\ Y & \overset{f_P}{\dashrightarrow} & Y^+ \\ \beta \searrow & & \swarrow \beta^\vee \\ & W & \end{array} \quad (3.21)$$

où β (resp. β^\vee) est un morphisme birationnel qui contracte P (resp. P^\vee) sur un point. La variété Y^+ est complexe et $H^0(Y^+, \Omega_{Y^+}^2)$ est engendré par une 2-forme σ^+ induite par $\sigma \in H^0(Y, \Omega_Y^2)$. A priori, il n'est pas clair si Y^+ est kählérienne (et donc hyperkählérienne) ou même projective.

Si X est une cubique contenant un plan, la variété de Fano F contient le plan dual P^\vee , de sorte qu'il existe un flop de Mukai

$$f_{P^\vee} : F \dashrightarrow F^+.$$

Pour vérifier que F^+ est projective dans ce cas, on aura besoin du lemme 3.4.2.14 ci-dessous.

Notons

$$\text{Bl}(L) := \bigcap_{D \in L} D$$

le lieu de base d'un système linéaire L de diviseurs sur une variété complexe.

Lemme 3.4.2.14. *On a*

$$\mathrm{Bl}|D_Q| = P^\vee.$$

Démonstration. Comme $D_Q \cdot l < 0$, on a $P^\vee \subset \mathrm{Bl}|D_Q|$. Supposons maintenant qu'il existe $[l] \in \mathrm{Bl}|D_Q|$ telle que $[l] \notin P^\vee$. Comme

$$\mathrm{Bl}|D_Q| \subset \bigcap_{[\mathbb{P}^3] \in \Pi} D_{Q_{\mathbb{P}^3}},$$

la droite l intersecte par définition de $D_{Q_{\mathbb{P}^3}}$ toute quadrique $Q_{\mathbb{P}^3}$. Supposons d'abord que l et P se coupent dans un point p_l . Alors il existe un unique $[\mathbb{P}^3] \in \Pi$ tel que $l \subset \mathbb{P}^3$ et l'on a $l \subset Q_{\mathbb{P}^3}$. Si $Q_{\mathbb{P}^{3'}}$ est la quadrique associée à un $\mathbb{P}^{3'} \neq \mathbb{P}^3$, on a $\mathbb{P}^{3'} \cap \mathbb{P}^3 = P$, de sorte que l doit intersecter $Q_{\mathbb{P}^{3'}}$ dans p_l . Autrement dit, le système linéaire de coniques $P \cap Q_{\mathbb{P}^3}$ doit admettre un point de base, ce qui est une contradiction : soit $p \in P$ et soit $l' \subset \Pi'$ une droite qui ne passe pas par $[\mathbb{T}_{X,p}]$. Alors on a $p \notin \gamma^{-1}(l')$ (cf. (3.18)).

Il reste à regarder le cas $l \cap P = \emptyset$. Comme l n'intersecte pas P , aucun \mathbb{P}^3 contenant P ne contient l . Mais comme l intersecte toute quadrique $Q_{\mathbb{P}^3}$, on doit avoir $l \cap \mathbb{P}^3 = l \cap Q_{\mathbb{P}^3} \neq \emptyset$. On obtient donc une application (ensembliste)

$$\begin{aligned} \Pi &\rightarrow l \\ [\mathbb{P}^3] &\mapsto l \cap Q_{\mathbb{P}^3}. \end{aligned}$$

La fibre au-dessus d'un point $x \in l$ correspond alors à un nombre infini de quadriques passant par $x \in X \setminus P$, ce qui est une contradiction avec la remarque 3.4.2.1. On en déduit que l'on doit avoir $[l] \in P^\vee$ et donc $\mathrm{Bl}|D_Q| = P^\vee$. \square

Proposition 3.4.2.15. *Soit X une cubique générale contenant un plan P et soit F la variété de Fano de X .*

1. *Le système linéaire $|m(2D_P + 3D_Q)|$ est sans point de base pour $m \gg 0$ et définit la contraction contr_l du rayon extrémal $\mathbb{R}^+ l$. Le lieu exceptionnel de contr_l est le plan dual P^\vee qui est contracté sur un point, et le flop de Mukai $f_{P^\vee} : F \dashrightarrow F^+$ est le flip associé à contr_l .*
2. *Le système linéaire $|m(2D_P + D_Q)|$ est sans point de base pour $m \gg 0$ et définit la contraction contr_c du rayon extrémal $\mathbb{R}^+ c$. Il s'agit d'une contraction divisorielle de lieu exceptionnel D_P et la restriction de contr_c à D_P fournit la fibration de $D_P \rightarrow S$ en coniques de la proposition 3.4.2.4.*

Démonstration. Par les propositions 3.4.2.7 et 3.4.2.10, les diviseurs $2D_P + 3D_Q$ et $2D_P + D_Q$ sont nef et big, de sorte que les systèmes linéaires $|m(2D_P + 3D_Q)|$ et $|m(2D_P + D_Q)|$ sont sans point base pour $m \gg 0$ par le « basepoint-free theorem » ; il est clair qu'ils définissent les contractions extrémales des rayons $\mathbb{R}^+ l$ et $\mathbb{R}^+ c$ (cf. la démonstration de la proposition 3.4.2.10). Par le lemme 3.4.2.14, toute courbe d'intersection négative avec D_Q est contenue dans P^\vee , de sorte que l'on a $\mathrm{contr}_l = \beta$ avec les notations du diagramme (3.21). Comme β est une contraction extrémale, un résultat de Wierzba dit que F^+ est projective [69, Prop. 2.1] et $f_{P^\vee} : F \dashrightarrow F^+$ est donc le flip associé à la contraction $\mathrm{contr}_l = \beta$.

D'autre part, parce que la fibration $D_P \rightarrow S$ contracte c , c'est la contraction du rayon extrémal $\mathbb{R}^+ c$. \square

Comme le flop de Mukai $f_{P^\vee} : F \dashrightarrow F^+$ est projectif, $f_{P^\vee}^* \mathrm{Nef}^1(F^+)$ définit une chambre de $\mathrm{Nef}_{\mathrm{bir}}^1(F)$.

Proposition 3.4.2.16. *Soit X une cubique générale contenant un plan et soit F la variété de Fano de X . Alors on a*

$$\text{Nef}_{\text{bir}}^1(F) = \mathbb{R}^+ q + \mathbb{R}^+(2p + q)$$

et ce cône est la réunion de

$$f_{P^\vee}^* \text{Nef}^1(F^+) = \mathbb{R}^+ q + \mathbb{R}^+(2p + 3q)$$

et

$$\text{Nef}^1(F) = \mathbb{R}^+(2p + 3q) + \mathbb{R}^+(2p + q).$$

Démonstration. Par [13, Prop. 4.4], on sait que $\text{Nef}_{\text{bir}}^1(F)$ est le dual de $\text{Psef}^1(F)$ par rapport à la forme de Beauville q_F , ce qui entraîne la première partie de l'énoncé.

Par [69, Prop. 2.1], on a $q \in f_{P^\vee}^* \text{Nef}^1(F^+)$. De l'autre côté, on a $N_{\mathbb{Z}}^1(W) \simeq \mathbb{Z}$ et (cf. [37, 3.17])

$$\mathbb{Z}(2p + 3q) = \text{contr}_t^* N_{\mathbb{Z}}^1(W),$$

de sorte que $2p + 3q$ est le tiré en arrière d'une classe nef sur W . Par la commutativité du diagramme (3.21), cette classe engendre donc l'autre rayon extrémal de $f_{P^\vee}^* \text{Nef}(F^+)$, ce qui achève la démonstration de la proposition. \square

3.4.2.4 Automorphismes de F

Soit Y une variété hyperkählérienne *projective*. Rappelons que l'on a des morphismes

$$\begin{aligned} \psi_{\text{aut}} : \text{Aut}(Y) &\rightarrow \text{Aut}(H^2(Y, \mathbb{Z}), q_Y) \\ u &\mapsto u^*, \\ \psi_{\text{bir}} : \text{Bir}(Y) &\rightarrow \text{Aut}(H^2(Y, \mathbb{Z}), q_Y) \\ u &\mapsto u^*. \end{aligned}$$

Supposons pour la suite que u est un automorphisme de Y . Notons $T(Y) := N_{\mathbb{Z}}^1(Y)^\perp \subset H^2(Y, \mathbb{Z})$ le *réseau transcendant*. Remarquons qu'il est primitif et que l'on a $\sigma \in T(Y) \otimes \mathbb{C}$ (cf. remarque 3.2.1.5). La forme $q_Y|_{N_{\mathbb{Z}}^1(Y)}$ est non dégénérée de signature $(1, 0, \text{rang}(N_{\mathbb{Z}}^1(Y)) - 1)$. En particulier, on a

$$N_{\mathbb{Z}}^1(Y) \cap T(Y) = \{0\}. \quad (3.22)$$

Les valeurs propres de l'action de u^* sur $T(Y) \otimes \mathbb{C}$ sont des racines s -ièmes de l'unité $\mu_s \in \mathbb{C}^*$ et l'on a $u^* \sigma = \mu_s \sigma$ (cf. [9, Prop. 7]).

Définition 3.4.2.17. On dit que u est *symplectique* si $u^* \sigma = \sigma$ et *non symplectique* sinon.

Regardons l'action de u^* sur $T(Y)$. Si u est symplectique, on a, pour $t \in T(Y)$,

$$q_Y(\sigma, t) = q_Y(\sigma, u^* t)$$

et donc $u^* t - t \in \sigma^\perp \cap H^2(Y, \mathbb{Z}) = N_{\mathbb{Z}}^1(Y)$. Comme $T(Y)$ est invariant sous l'action de u^* , on obtient $u^* t - t \in T(Y) \cap N_{\mathbb{Z}}^1(Y)$ et donc $u^* t = t$ par (3.22). Autrement dit, on a

$$u^*|_{T(Y)} = \text{id}. \quad (3.23)$$

Supposons maintenant que u est non symplectique et écrivons $u^* \sigma = \mu_s \sigma$. S'il existe un vecteur propre $t \in T(Y)$ de valeur propre 1, on a

$$q_Y(\sigma, t) = q_Y(u^* \sigma, u^* t) = \mu_s q_Y(\sigma, t)$$

et donc $q_Y(\sigma, t) = 0$. On en déduit $t \in N_{\mathbb{Z}}^1(Y) \cap T(Y) = \{0\}$, i.e.,

$$\forall t \in T(Y) \quad u^* t = t \iff t = 0. \quad (3.24)$$

Remarque 3.4.2.18. On pourrait aussi remarquer que $T(Y) \otimes \mathbb{Q}$ est une structure de Hodge rationnelle irréductible [73, Thm. 1.4.1], de sorte que l'on a

$$u^*|_{T(Y)} = \mu_s \text{id}. \quad (3.25)$$

Théorème 3.4.2.19 (Beauville, Hassett, Tschinkel). *Soit F la variété de Fano d'une cubique lisse. Alors l'application ψ_{aut} est injective.*

Démonstration. Par un résultat de Beauville, l'application ψ_{aut} est injective si Y est un schéma de Hilbert $S^{[2]}$ [9, Prop. 10]. Hassett et Tschinkel montrent que le noyau de ψ_{aut} reste invariant sous une déformation de Y [26, Thm. 2.1], de sorte que le théorème 3.3.1.2 implique le résultat souhaité. \square

Définition 3.4.2.20. Soit (M, q) un réseau et M^\vee le réseau dual. Alors $A_M := M^\vee/M$ est le *groupe discriminant* de M . Si (M, q) est un réseau pair, on obtient une forme quadratique bien définie à valeurs dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} sur A_M en posant

$$q_{A_M}(x) = \frac{1}{2}q(x, x) \pmod{\mathbb{Z}}$$

pour $x \in M^\vee$. Cette forme est dite la *forme discriminante*.

Proposition 3.4.2.21. *Soit X une cubique générale contenant un plan et soit F la variété de Fano de X . Alors on a*

$$\text{Bir}(F) = \text{Aut}(F) = \{\text{id}\}.$$

Démonstration. Pour faciliter les notations, on pose pour la suite

$$N := N_{\mathbb{Z}}^1(F) \quad , \quad L := H^2(F, \mathbb{Z}) \quad , \quad T := T(F).$$

Soit $u \in \text{Aut}(F)$. Par l'injectivité de ψ_{aut} , il suffit de montrer que l'on a $u^* = \text{id}$. Supposons d'abord que u^* agit non trivialement sur N . Alors u^* doit préserver la forme de Beauville q_F et le cône $\text{Nef}^1(F)$ et envoyer le générateur primitif $2p + q$ d'un rayon extrémal sur le générateur primitif $2p + 3q$ de l'autre rayon extrémal (cf. proposition 3.4.2.10). Ceci n'est pas possible, car $q_F(2p + q, 2p + q) = 0$ et $q_F(2p + 3q, 2p + 3q) = 40$. On a donc

$$u^*|_N = \text{id}.$$

Si u est symplectique, cela entraîne $u^* = \text{id}$ (cf. (3.23)), ce qu'il fallait montrer.

Il nous reste à montrer que F n'admet pas d'automorphisme non symplectique. On raisonne par l'absurde en utilisant un argument de la théorie des réseaux. Posons

$$H := L/(N \oplus T) \subset A_N \oplus A_T.$$

Par un résultat de Nikulin [52, Prop. 1.5.1], on sait que les deux projections $p_N : H \rightarrow A_N$ et $p_T : H \rightarrow A_T$ sont injectives. On montre que l'existence d'un automorphisme non symplectique impose des conditions sur H telles que p_T ne puisse pas être injectif, ce qui fournit la contradiction souhaitée.

Supposons donc que u est un automorphisme non symplectique. Soit μ_s une racine s -ième de l'unité telle que $u^*\sigma = \mu_s\sigma$. Alors on a $(u^*)^s\sigma = \sigma$, de sorte que u^s est symplectique et donc l'identité par les remarques précédentes. Par un résultat de Beauville [9, Prop. 7], $s - 1$ divise $\text{rang}(H^2(F, \mathbb{Z})) - \text{rang}(N) = 21$, d'où l'on déduit $s \in \{2, 4, 8, 22\}$. En passant à une puissance de u , on peut donc supposer $s = 2$. Par (3.24), on a donc $\mu^*|_T = -\text{id}$, de sorte que N est le réseau invariant sous

l'action de μ_s . Un résultat de Boissière, Nieper-Wisskirchen et Sarti [12, Lemma 5.3] dit alors qu'il existe un entier positif α tel que

$$H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\alpha.$$

Comme $A_N \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (cf. remarque 3.4.2.6) et comme la projection $p_N : H \rightarrow A_N$ est injective, on a $\alpha \in \{1, 2\}$. D'autre part, la formule

$$|H|^2 = |A_N||A_T||A_L|^{-1}$$

donne $2|H|^2 = 16|A_T|$ et donc

$$2^\alpha = 2^{3-\alpha}|A_T|.$$

Cela implique $\alpha = 2$ et $|A_T| = 2$. Mais c'est une contradiction au fait que la projection $p_T : H \rightarrow A_T$ est injective (cf. [52, Prop. 1.5.1]), d'où l'on déduit que F n'admet pas d'automorphisme non symplectique.

On a donc

$$\text{Aut}(F) = \text{id}$$

par l'injectivité de ψ_{aut} .

Soit maintenant $u : F \dashrightarrow F$ un automorphisme birationnel. Si u^* envoie une classe ample sur une classe ample, u est un automorphisme et donc l'identité. Sinon, comme une chambre nef est envoyée sur une chambre nef par u^* , on a donc, si $u \neq \text{id}$,

$$u^* \text{Nef}^1(F) = f_{P^\vee}^* \text{Nef}^1(F^+) \quad , \quad u^* f_{P^\vee}^* \text{Nef}^1(F^+) = \text{Nef}^1(F).$$

Autrement dit, u^* doit agir par

$$2p + q \mapsto q, \tag{3.26}$$

$$2p + 3q \mapsto 2p + 3q, \tag{3.27}$$

$$q \mapsto 2p + q, \tag{3.28}$$

ce qui entraînerait $2q \mapsto 2p + 2q$ ((3.27) - (3.26)) et donc une contradiction avec (3.28). On en déduit

$$\text{Bir}(F) = \text{Aut}(F) = \{\text{id}\}.$$

□

3.4.2.5 La face isotrope

Pour finir, on montre que la face isotrope (cf. définition 3.2.3.2) $\text{Psef}_{\text{iso}}^2(F)$ de $\text{Psef}^2(F)$ est de dimension 3 pour une cubique générale contenant un plan.

Proposition 3.4.2.22. *Soit X une cubique générale contenant un plan P et soit P^\vee le plan dual dans la variété de Fano F de X . On a*

$$\mathbb{R}^+[P^\vee] + \mathbb{R}^+s_2 + \mathbb{R}^+(q^2 - [P^\vee]) + \mathbb{R}^+p(2p+q) \subset \text{Psef}_{\text{iso}}^2(F),$$

où les classes $[P^\vee], s_2, q^2 - [P^\vee]$ et $p(2p+q)$ sont effectives et engendrent un cône de dimension 3. La face isotrope est donc de dimension maximale.

Démonstration. Par le lemme 3.4.1.2, on sait que s_2 est une classe effective dans $\text{Psef}_{\text{iso}}^2(F)$. De plus, il est clair que P^\vee est lagrangienne et que l'on a donc $[P^\vee] \in \text{Psef}_{\text{iso}}^2(F)$. Montrons que les classes $p(2p+q)$ et $(q^2 - [P^\vee])$ appartiennent également à $\text{Psef}_{\text{iso}}^2(F)$ et qu'ils sont effectives.

Rappelons que $\rho_l = q - p$ est la classe duale de l dans $N_{\mathbb{Z}}^1(F)$ (cf. remarque 3.4.2.9). Par des arguments de Hassett et Tschinkel [28, p. 1077], on a

$$[P^\vee] = \frac{1}{8}\rho_l^2 + \frac{1}{24}c_2(F),$$

et comme $c_2(F) = 5s_1^2 - 8s_2$ (cf. lemme 3.4.1.1), on obtient

$$[P^\vee] = \frac{1}{8}(q-p)^2 + \frac{1}{24}c_2(F) = \frac{1}{3}(p^2 + q^2 + \frac{1}{2}pq - s_2). \quad (3.29)$$

Rappelons que l'on a (cf. §3.2.3)

$$\varphi_{\text{iso}}(p^2) = q_F(p) = -2, \quad \varphi_{\text{iso}}(q^2) = q_F(q) = 0, \quad \varphi_{\text{iso}}(pq) = q_F(p, q) = 4. \quad (3.30)$$

Comme $\text{Bl } |D_Q| = P^\vee$ (cf. lemme 3.4.2.14), la classe

$$3(q^2 - [P^\vee]) = 2q^2 - p^2 - \frac{1}{2}pq + s_2$$

est effective et grâce à (3.29) et (3.30), on vérifie qu'elle est dans la face isotrope de $\text{Psef}^2(F)$. Comme $2p + q$ est un multiple du tiré en arrière d'une section hyperplane par la contraction $\text{contr}_c : F \rightarrow F'$, la classe de $\text{contr}_c^{-1}(C)$ est un multiple de $p(2p + q)$ (car $N_{\mathbb{Z}}^1(S) = \mathbb{Z}$), ce qui montre que $p(2p + q)$ est effective. On a $\varphi_{\text{iso}}(p(2p + q)) = q_F(p, 2p + q) = 0$ et donc $p(2p + q) \in \text{Psef}_{\text{iso}}^2(F)$. Les trois classes $s_2, [P^\vee]$ et $q^2 - [P^\vee]$ sont évidemment linéairement indépendantes, ce qui achève la démonstration. \square

Proposition 3.4.2.23. *Soit X une cubique générale contenant un plan et soit F la variété de Fano de X .*

1. *Le rayon $\mathbb{R}^+[P^\vee]$ est extrémal dans $\text{Eff}^2(F)$ et $[P^\vee]$ est la seule surface dont la classe est dans ce rayon.*
2. *Le rayon $\mathbb{R}^+p(2p + q)$ est extrémal dans $\text{Eff}^2(F)$ et les surfaces de classe dans ce rayon sont les surfaces dans D_P obtenues comme tirées en arrière des courbes sur $C \subset S$ sous la contraction $\text{contr}_c|_{D_P} : D_P \rightarrow S$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $[P^\vee]$ est extrémal dans $\text{Eff}^2(F)$. Soit $\text{contr}_l : F \rightarrow W$ la contraction extrémale qui contracte \mathbb{P}^\vee sur un point. Soient T et S des surfaces dans F et $a, b \in \mathbb{R}^+$ tels que $[P^\vee] = a[T] + b[S]$. Soit h une classe ample dans $N^1(W)$. Alors on a $\text{contr}_l^*(h^2) \cdot [P^\vee] = 0$ et donc aussi $\text{contr}_l^*(h^2) \cdot [T] = \text{contr}_l^*(h^2) \cdot [S] = 0$, ce qui entraîne $S = T = P^\vee$. Avec un raisonnement analogue utilisant que l'on a $N_{\mathbb{Z}}^1(S) = \mathbb{Z}$, on montre que $p(2p + q)$ est extrémal dans $\text{Eff}^2(F)$ et que toute surface de classe dans $\mathbb{R}^+p(2p + q)$ s'obtient comme tirée en arrière d'une courbe $C \subset S$ par contr_c . \square

Remarque 3.4.2.24. Je ne sais pas répondre à la question (plus naturelle) de savoir si ces rayons sont extrémaux dans $\text{Psef}^2(F)$.

3.4.3 Cubiques contenant un scroll cubique

Dans [29], Hassett et Tschinkel vérifient leurs conjectures pour une cubique générale contenant un scroll cubique, i.e., pour une cubique générale dans \mathcal{C}_{12} (cf. §3.3.2.1). On rappelle d'abord les résultats principaux de [29] (proposition 3.4.3.1, théorèmes 3.4.3.2 et 3.4.3.3) et l'on complète ces résultats en montrant que l'on a (proposition 3.4.3.4 et corollaire 3.4.3.5)²

$$\text{Aut}(F) = \{\text{id}\} \quad , \quad \text{Bir}(F) = \langle \iota \rangle * \langle \iota^\vee \rangle,$$

² L'égalité $\text{Aut}(F) = \{\text{id}\}$ est mentionnée par Hassett et Tschinkel dans [29] sans démonstration. Je remercie Hassett pour nous avoir expliqué l'idée de la démonstration.

où $\langle \iota \rangle * \langle \iota^\vee \rangle$ est le groupe diédral infini engendré par deux involutions birationnelles ι et ι^\vee de F . On finit en montrant que la face isotrope de $\text{Psef}^2(F)$ est de dimension 3, c'est-à-dire de codimension 1 (proposition 3.4.3.6).

3.4.3.1 Les résultats de Hassett et Tschinkel

Une caractérisation alternative d'une cubique générale dans \mathcal{C}_{12} . Hassett et Tschinkel commencent en donnant une caractérisation alternative d'une cubique générale dans \mathcal{C}_{12} comme une cubique admettant une section hyperplane Y à six points doubles en position générale. Plus précisément, ils construisent un scroll cubique sur une telle cubique comme suit : soit X une cubique admettant une section hyperplane Y à six points doubles en position générale. Alors Y ne contient aucun 2-plan et la variété $F(Y)$ paramétrant les droites dans Y est de dimension attendue 2 [29, Lemme 1]. Il existe un espace vectoriel V_3 de dimension 3 et un espace vectoriel $W_5 \subset \text{End}(V_3)$ de dimension 5 tels que (cf. [29, pp. 9-10, prop. 10])

$$Y = \mathbb{P}(W_5) \cap \mathcal{M}_2,$$

où $\mathcal{M}_2 \subset \text{End}(V_3)$ est la variété déterminante paramétrant les endomorphismes de rang ≤ 2 . Si l'on note W_5^\perp le complément orthogonal de W_5 dans $\text{End}(V_3)$ par rapport à l'accouplement de trace, la variété

$$S := \mathbb{P}(W_5^\perp) \cap \mathcal{M}_2$$

est une surface cubique lisse. La variété $F(Y)$ est alors obtenue en recollant les deux plans $\mathbb{P}(V_3), \mathbb{P}(V_3^\vee)$ et S convenablement par un morphisme de recollement (cf. [29, Prop. 16])

$$\nu : \mathbb{P}(V_3) \sqcup S \sqcup \mathbb{P}(V_3^\vee) \rightarrow F(Y)$$

qui donne un plongement fermé de chaque composante. Notons dans la suite

$$P := \nu(\mathbb{P}(V_3)) \quad S' := \nu(S) \quad P^\vee := \nu(\mathbb{P}(V_3^\vee)),$$

de sorte que l'on a

$$F(Y) = P \cup S' \cup P^\vee.$$

Proposition 3.4.3.1 (Hassett-Tschinkel). *Soit X une cubique admettant une section hyperplane Y à six points doubles en position générale. Alors on a deux familles de scrolls cubiques dans $Y \subset X$, paramétrées par $\mathbb{P}(V_3)$ et $\mathbb{P}(V_3^\vee)$, en posant*

$$T_v := \{y \in Y \subset \mathbb{P}(\text{End}(V_3)) \mid v \in \text{im}(y)\}$$

pour $v \in \mathbb{P}(V_3)$, resp.

$$T_{v^\vee} := \{y \in Y \subset \mathbb{P}(\text{End}(V_3)) \mid v^\vee(\ker(y)) = 0\}$$

pour $v^\vee \in \mathbb{P}(V_3^\vee)$. Si l'on note $[T]$ (resp. $[T^\vee]$) la classe de T_v (resp. T_{v^\vee}) dans $N^2(X)$, on a

$$[T] + [T^\vee] = 2h^2.$$

Démonstration. [29, prop. 17]. □

La proposition 3.4.3.1 montre que les cubiques admettant une section hyperplane à six points doubles en position générale forment également un ouvert de Zariski dans \mathcal{C}_{12} .

Deux flops de Mukai et le réseau $N_{\mathbb{Z}}^1(F)$. Le point clé pour vérifier les conjectures pour la variété de Fano d'une cubique générale contenant un scroll cubique est le théorème suivant.

Théorème 3.4.3.2 (Hassett, Tschinkel). *Soit X une cubique générale admettant une section hyperplane à six points doubles en position générale (ou, de façon équivalente, une cubique générale contenant un scroll cubique) et soit F la variété de Fano de X . Alors on a deux involutions birationnelles*

$$\iota, \iota^\vee : F \dashrightarrow F$$

qui sont définies comme suit :

1. on floppe P (resp. P^\vee), ce qui donne une nouvelle variété symplectique F_1 (resp. F_1^\vee);
2. la transformée stricte S_1 (resp. S_1^\vee) de S' dans F_1 (resp. F_1^\vee) est un plan, et en floppant S_1 (resp. S_1^\vee), on obtient une variété symplectique F_2 (resp. F_2^\vee);
3. on construit un isomorphisme entre F_2 (resp. F_2^\vee) et F .

On peut résumer la construction de ι dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \iota = f_{S_1} \circ f_P & & \\
 & \dashrightarrow & & \dashrightarrow & \\
 F & \xrightarrow{f_P} & F_1 & \xrightarrow{f_{S_1}} & F_2 \simeq F \\
 \searrow \beta_{01} & & \swarrow \beta_{12} & & \swarrow \\
 & & F_{01} & & F_{12}
 \end{array}$$

où f_P et f_{S_1} sont les flops et β_{01} et β_{12} les contractions de P et S_1 , respectivement.

Démonstration. [29, Thm. 24]. \square

Soit X une cubique générale admettant une section hyperplane Y à six points doubles en position générale (ou, de façon équivalente, une cubique générale contenant un scroll cubique). Notons

$$\tau := \alpha([T]) \quad , \quad \tau^\vee := \alpha([T^\vee])$$

les images des classes des deux scrolls cubiques dans $N^1(F)$ sous l'application d'Abel-Jacobi (cf. (3.7)). Alors on a $N_{\mathbb{Z}}^1(F) = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}s_1$ par la proposition 3.3.2.4 et donc

$$N^1(F) = \mathbb{R}\tau + \mathbb{R}s_1 = \mathbb{R}\tau + \mathbb{R}\tau^\vee$$

par la proposition 3.4.3.1. Dans la base (s_1, τ) de $N_{\mathbb{Z}}^1(F)$, la forme de Beauville est de matrice

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

de sorte que $N_{\mathbb{Z}}^1(F)$ est un réseau de discriminant 24. Le réseau $N_{\mathbb{Z}}^1(F)$ ne représente pas -2 , et les classes de carré -10 sont décrites comme suit : on a

$$\text{Aut}(N_{\mathbb{Z}}^1(F), q_F) = \{\pm 1\} \times (\langle R_1 \rangle * \langle R_2 \rangle)$$

où les réflexions orthogonales R_1 et R_2 agissent par

$$\begin{array}{ll}
 R_1(s_1) = s_1 & R_1(\tau) = 2s_1 - \tau = \tau^\vee \\
 R_2(s_1) = -s_1 + \tau & R_2(\tau) = \tau.
 \end{array} \quad (3.32)$$

On obtient toutes les classes -10 en posant

$$\begin{aligned} \rho_1 &:= 3s_1 - 2\tau & \rho_1^\vee &:= 2\tau - s_1 \\ \rho_2 &:= 7s_1 - 4\tau & \rho_2^\vee &:= 4\tau - s_1 \end{aligned}$$

et, pour $j \geq 3$,

$$\rho_j := R_1 R_2(\rho_{j-2}) \quad , \quad \rho_j^\vee := R_2 R_1(\rho_{j-2})^\vee.$$

Notons α_i et α_i^\vee les classes orthogonales à ρ_i et ρ_i^\vee respectivement pour la forme de Beauville. Alors on a

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= 7s_1 - 3\tau & \alpha_1^\vee &:= R_1(\alpha_1) = s_1 + 3\tau \\ \alpha_2 &:= R_1 R_2(\alpha_1^\vee) = 17s_1 - 9\tau & \alpha_2^\vee &:= R_2 R_1(\alpha_1) = 9\tau - s_1 \end{aligned}$$

et, pour $j \geq 3$,

$$\alpha_j := R_1 R_2(\alpha_{j-2}) \quad , \quad \alpha_j^\vee := R_2 R_1(\alpha_{j-2}^\vee).$$

Description des cônes de classes positives. Le théorème suivant vérifie les conjectures de Hassett et Tschinkel (cf. §3.2.2).

Théorème 3.4.3.3 (Hassett, Tschinkel). *Soit X une cubique générale admettant une section hyperplane à six points doubles en position générale (ou, de façon équivalente, une cubique générale contenant un scroll cubique) et soit F la variété de Fano de X . Alors on a avec les notations du théorème 3.4.3.2 une suite de flops de Mukai*

$$\dots F_2^\vee \dashrightarrow F_1^\vee \dashrightarrow F_0 = F \dashrightarrow F_1 \dashrightarrow F_2 \dots,$$

et des isomorphismes

$$\dots F_2^\vee \simeq F_0 \simeq F_2 \dots \quad \text{et} \quad \dots F_1^\vee \simeq F_1 \dots$$

Les flops permettent des identifications

$$\dots \simeq N^1(F_2^\vee) \simeq N^1(F_1^\vee) \simeq N^1(F_0) \simeq N^1(F_1) \simeq N^1(F_2) \simeq \dots$$

Avec ces identifications, on a, pour $i \geq 1$,

$$\text{Nef}^1(F_i^\vee) = \mathbb{R}^+ \alpha_{i+1}^\vee + \mathbb{R}^+ \alpha_i^\vee \quad , \quad \text{Nef}^1(F_i) = \mathbb{R}^+ \alpha_i + \mathbb{R}^+ \alpha_{i+1}$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{Psef}^1(F) &= \text{Nef}_{\text{bir}}^1(F) = \text{Nef}^1(F) \cup \bigcup_{i \geq 1} \text{Nef}^1(F_i) \cup \bigcup_{i \geq 1} \text{Nef}^1(F_i^\vee) \\ &= \mathbb{R}^+(s_1 - (3 - \sqrt{6})\tau) + \mathbb{R}^+((3 + \sqrt{6})\tau - s_1). \end{aligned}$$

La contraction associée au flop f_P (resp. au flop f_{P^\vee}) qui contracte le plan P (resp. le plan P^\vee) est extrémale et l'on a

$$\text{Psef}_1(F) = \mathbb{R}^+ \lambda_1 + \mathbb{R}^+ \lambda_1^\vee$$

où λ_1 (resp. λ_1^\vee) est une droite dans P (resp. dans P^\vee).

Démonstration. [29, Prop. 29, Prop. 30, Thm. 31]. □

3.4.3.2 Automorphismes de F

On détermine le groupe d'automorphismes (birationnels) de F . On remercie Hassett de nous avoir communiqué l'idée de la démonstration de la proposition suivante, énoncée dans [29] sans démonstration.

Proposition 3.4.3.4. *Soit X une cubique générale contenant un scroll cubique lisse et soit F la variété de Fano de X . Alors on a*

$$\text{Aut}(F) = \{\text{id}\}.$$

Démonstration. Soit $u \in \text{Aut}(F)$. On montre (comme dans la démonstration de la proposition 3.4.2.21) que l'on doit avoir $u^* = \text{id}$, ce qui entraîne $u = \text{id}$ par l'injectivité de ψ_{aut} (cf. théorème 3.4.2.19). Pour faciliter les notations, on pose pour la suite

$$N := N_{\mathbb{Z}}^1(F) \quad , \quad L := H^2(F, \mathbb{Z}) \quad , \quad T := T(F)$$

et

$$H := L/(N \oplus T) \subset A_N \oplus A_T.$$

Rappelons que les projections $p_N : H \rightarrow A_N$ et $p_T : H \rightarrow A_T$ sont injectives [52, Prop. 1.5.1]. Par des résultats classiques de Nikulin [52], on obtient des restrictions sur u^* en étudiant l'action induite sur H . Déterminons donc d'abord la structure de H . Comme la projection $p_N : H \rightarrow A_N$ est injective, on obtient une première restriction sur la structure de H si l'on connaît A_N . Dans la base $(s_1, s_1 - \tau)$ de N , la forme bilinéaire q_F restreinte à N est donnée par (cf. (3.31))

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Notons (s_1^\vee, h^\vee) la base duale de N^\vee telle que, sous le plongement canonique $N \rightarrow N^\vee$, on a

$$s_1 \mapsto 6s_1^\vee \quad h \mapsto -4h^\vee$$

et

$$A_N \simeq \langle \bar{s}_1^\vee \rangle \times \langle \bar{h}^\vee \rangle \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

où l'on note \bar{s}_1^\vee et \bar{h}^\vee les classes de s_1^\vee et h^\vee dans A_N . La relation

$$|H|^2 = |A_N||A_T||A_L|^{-1}$$

donne $2|H|^2 = 24|A_T|$; comme $|A_T| \in 2\mathbb{Z}$ et comme la projection $p_N : H \rightarrow A_N$ est injective, cela entraîne que l'on a un des deux cas suivants :

1. $|H| = 24$ et $|A_T| = 48$,
2. $|H| = 12$ et $|A_T| = 12$.

Dans le premier cas, il est clair que l'on a

$$p_N(H) = A_N.$$

Dans le deuxième cas, on montre que l'on a

$$p_N(H) = \langle 2\bar{s}_1^\vee \rangle \times \langle \bar{h}^\vee \rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

ce qui revient à montrer que la projection

$$H \xrightarrow{p_N} A_N \longrightarrow \langle \bar{h}^\vee \rangle \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

est surjective. On raisonne par l'absurde. Supposons donc que l'on a $p_N(H) = \langle \bar{s}_1^\vee \rangle \times \langle \bar{h}^\vee \rangle$. Par rapport aux générateurs \bar{s}_1^\vee et \bar{h}^\vee , la forme discriminante q_{A_N} (cf. définition 3.4.2.20) est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Comme $p_N(H)$ est engendré par \bar{s}_1^\vee et $2\bar{h}^\vee$ et comme H est un sous-groupe isotrope de $A_N \oplus A_T$ sous $q_{A_T} \oplus q_{A_N}$ [52, Prop. 1.4.1], on a

$$q_{A_N}|_{p_N(H)} = -q_{A_T} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Comme T est de signature $(2, 19)$, on vérifie avec la formule de Milgram (cf. [47, Appendix 4]) qu'un tel réseau n'existe pas. On a donc montré que l'on a soit

$$p_N(H) = \langle 2\bar{s}_1^\vee \rangle \times \langle \bar{h}^\vee \rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad (3.33)$$

soit

$$p_N(H) = \langle \bar{s}_1^\vee \rangle \times \langle \bar{h}^\vee \rangle \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (3.34)$$

Ce résultat préliminaire nous permet maintenant d'étudier l'action de u^* sur L . Supposons d'abord que u est symplectique, de sorte que l'on a (cf. (3.23))

$$u^*|_T = \text{id}.$$

Comme $u^*|_N$ doit préserver le cône $\text{Nef}^1(F)$ et envoyer un rayon extrémal sur un rayon extrémal, $u^* \neq \text{id}$ implique $u^*|_N = R_1$ (cf. §3.4.3.1). Par un résultat de Nikulin [52, Corol. 1.5.2], l'automorphisme (R_1, id) de $N \oplus T$ s'étend à un automorphisme de L si et seulement si

$$\bar{R}_1|_{p_N(H)} = \text{id}, \quad (3.35)$$

où l'on note \bar{R}_1 l'automorphisme de A_N induit par R_1 . On vérifie que R_1 agit par (cf. (3.32))

$$as_1 + b(s_1 - \tau) \mapsto as_1 - b(s_1 - \tau). \quad (3.36)$$

Par (3.33) et (3.34) on a donc $\bar{R}_1|_{p_N(H)} \neq \text{id}$, de sorte que l'automorphisme (R_1, id_T) de $N \oplus T$ ne s'obtient pas comme restriction d'un automorphisme $u^* \in \text{Aut}(L)$; on en déduit $u^* = \text{id}$.

Soit maintenant u un automorphisme non symplectique et supposons que l'on a $u^*\sigma = \mu_s\sigma$, où μ_s est une racine s -ième de l'unité. Alors u^s est symplectique et donc l'identité par les remarques précédentes. On peut supposer que u est d'ordre s , où s est un nombre premier. Comme $s-1$ divise $\text{rang}(H^2(F, \mathbb{Z})) - \text{rang}(N) = 21$ (cf. [9, Prop. 7]), on a $s \in \{2, 4, 8, 22\}$. En passant à une puissance de u , on peut donc supposer $s = 2$, de sorte que

$$u^*|_T = -\text{id}$$

par (3.24). Comme l'automorphisme $(-\text{id}_N, \text{id})$ (resp. $(-\text{id}_N, R_1)$) de $N \oplus T$ s'étend à un automorphisme de L si et seulement si [52, Cor. 1.5.2]

$$-\text{id}_{p_N(H)} = \text{id} \quad (\text{resp. } \bar{R}_1|_{p_N(H)} = -\text{id}),$$

on obtient une contradiction par (3.33), (3.34) et (3.36). On a donc montré que l'unique automorphisme de F est l'identité. \square

Corollaire 3.4.3.5. *Soit X une cubique générale contenant un scroll cubique et soit F la variété de Fano de X . Avec les notations du théorème 3.4.3.3, on a*

$$\mathrm{Bir}(F) = \langle \iota \rangle * \langle \iota^\vee \rangle.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que l'application

$$\psi_{\mathrm{bir}} : \mathrm{Bir}(F) \rightarrow \mathrm{Aut}(H^2(F, \mathbb{Z}), q_F)$$

est injective, car $u^* = \mathrm{id}$ entraîne que u est un isomorphisme et donc l'identité par la proposition 3.4.3.4. Il suffit ainsi de montrer que l'on a

$$\psi_{\mathrm{bir}}(\mathrm{Bir}(F)) = \langle \iota^* \rangle * \langle \iota^{\vee*} \rangle.$$

Notons $B \subset \mathrm{Bir}(F)$ le groupe engendré par ι et ι^\vee . Comme ι^* agit par $R_1 R_2 R_1$ et $\iota^{\vee*}$ par R_2 , on a

$$\psi_{\mathrm{bir}}(B) = \langle \iota^* \rangle * \langle \iota^{\vee*} \rangle.$$

Il reste à montrer que l'on a $f^* \in \langle \iota^* \rangle * \langle \iota^{\vee*} \rangle$ pour tout $f \in \mathrm{Bir}(F)$. On détermine d'abord des conditions nécessaires pour l'action de f^* sur $N_{\mathbb{Z}}^1(F)$ et ensuite, on montre que tout automorphisme de $N_{\mathbb{Z}}^1(F)$ satisfaisant à ces conditions appartient à $\langle \iota^* \rangle * \langle \iota^{\vee*} \rangle$.

Soit $f \in \mathrm{Bir}(F)$. Par [45, Lemma 5.11], $f^* \mathrm{Nef}^1(F)$ correspond à une chambre $\mathrm{Nef}(F_i)$ (ou $\mathrm{Nef}(F_i^\vee)$) avec $F_i \simeq F$ (ou $F_i^\vee \simeq F$). Montrons que l'on doit avoir $i = 2k$: comme toutes les F_i (resp. F_i^\vee) sont isomorphes pour i impair, il suffit de montrer que F n'est pas isomorphe à F_1 . S'il existe un tel isomorphisme $\varphi : F_1 \rightarrow F$, on obtient un automorphisme birationnel $\varphi \circ f_P : F \dashrightarrow F$ et l'on a $(\varphi \circ f_P)^* \mathrm{Nef}(F) = f_P^* \mathrm{Nef}(F_1)$. L'action de $(\varphi \circ f_P)^*$ doit donc satisfaire

$$\alpha_2 \mapsto \alpha_1 \quad \alpha_1 \mapsto \alpha_1^\vee$$

ou

$$\alpha_2 \mapsto \alpha_1^\vee \quad \alpha_1 \mapsto \alpha_1.$$

Dans le premier cas, la condition $\alpha_2 \mapsto \alpha_1$ implique $(\varphi \circ f)^* = \iota^*$, ce qui n'est pas compatible avec la condition $\alpha_1 \mapsto \alpha_1^\vee$. Avec un argument analogue, on voit que le deuxième cas n'est pas possible non plus, de sorte que $f \in \mathrm{Bir}(F)$ entraîne $f^* \mathrm{Nef}^1(F) = \mathrm{Nef}(F_i)$ (ou $\mathrm{Nef}(F_i^\vee)$) pour un entier pair i . Comme il y a un unique r_k (resp. r_k^\vee) dans $\mathrm{Aut}(N_{\mathbb{Z}}^1, q_F)$ qui envoie $\mathrm{Nef}^1(F)$ sur

$$\mathrm{Nef}^1(F_{2k}) = \mathbb{R}^+ \alpha_{2k} + \mathbb{R}^+ \alpha_{2k+1}$$

(resp. sur $\mathrm{Nef}^1(F_{2k}^\vee) = \mathbb{R}^+ \alpha_{2k}^\vee + \mathbb{R}^+ \alpha_{2k+1}^\vee$), il suffit de montrer que tout tel r_k (resp. r_k^\vee) appartient à $\langle \iota^* \rangle * \langle \iota^{\vee*} \rangle$. Le calcul suivant vérifie que c'est le cas :

$$\alpha_{2k} = \begin{cases} (\iota^{\vee*} \iota^*)^l \alpha_1 & \text{si } k = 2l \\ (\iota^{\vee*} \iota^*)^l \iota^{\vee*} \alpha_1^\vee & \text{si } k = 2l + 1 \end{cases}, \quad \alpha_{2k+1} = \begin{cases} (\iota^{\vee*} \iota^*)^l \alpha_1^\vee & \text{si } k = 2l \\ (\iota^{\vee*} \iota^*)^l \iota^{\vee*} \alpha_1 & \text{si } k = 2l + 1 \end{cases},$$

$$\alpha_{2k}^\vee = \begin{cases} (\iota^* \iota^{\vee*})^l \alpha_1^\vee & \text{si } k = 2l \\ (\iota^* \iota^{\vee*})^{l+1} \alpha_1 & \text{si } k = 2l + 1 \end{cases}, \quad \alpha_{2k+1}^\vee = \begin{cases} (\iota^* \iota^{\vee*})^l \alpha_1 & \text{si } k = 2l \\ (\iota^* \iota^{\vee*})^{l+1} \alpha_1^\vee & \text{si } k = 2l + 1 \end{cases}.$$

On a donc montré

$$\psi_{\mathrm{bir}}(B) = \psi_{\mathrm{bir}}(\mathrm{Bir}(F)) = \langle \iota^* \rangle * \langle \iota^{\vee*} \rangle,$$

d'où

$$\mathrm{Bir}(F) = \langle \iota \rangle * \langle \iota^\vee \rangle$$

par l'injectivité de ψ_{bir} . \square

3.4.3.3 La face isotrope

On montre que la face isotrope est de dimension 3.

Proposition 3.4.3.6. *Soit X une cubique générale admettant une section hyperplane Y à six points doubles en position générale (ou contenant un scroll cubique) et soit F la variété de Fano de X et soit $F(Y)$ la variété de Fano de Y . Si l'on écrit*

$$F(Y) = P \cup S' \cup P^\vee,$$

où P et P' sont des 2-plans, les classes $[S'], [P]$ et $[P^\vee]$ sont linéairement indépendantes dans $N^2(F)$ et l'on a

$$\mathbb{R}^+[S'] + \mathbb{R}^+[P] + \mathbb{R}^+[P^\vee] \subset \text{Psef}_{\text{iso}}^2(F).$$

Démonstration. Comme $[F(Y)] = s_2$ est une classe isotrope ainsi que $[P]$ et $[P^\vee]$, il est clair que l'on a

$$\mathbb{R}^+[S'] + \mathbb{R}^+[P] + \mathbb{R}^+[P^\vee] \subset \text{Psef}_{\text{iso}}^2(F).$$

Montrons que ces classes sont linéairement indépendantes. Comme α_1 (resp. α_1^\vee) correspond à la petite contraction de $[P]$ (resp. de $[P^\vee]$), on a

$$[P] \cdot \alpha_1 = [P^\vee] \cdot \alpha_1^\vee = 0$$

dans $N^3(F)$. D'autre part, on a $[P] \cdot \alpha_1^\vee \neq 0$ et $[P^\vee] \cdot \alpha_1 \neq 0$, ce qui entraîne que $[P]$ et $[P^\vee]$ sont libres dans $N^2(F)$. Supposons qu'il existe des réels α et β tels que $[S'] = \alpha[P] + \beta[P^\vee]$. Comme

$$[S'] + [P] + [P^\vee] = [F(Y)] = s_2$$

cela entraîne

$$s_2 \cdot \alpha_1 \alpha_1^\vee = 0.$$

En utilisant le lemme 3.4.1.1, la remarque 3.3.2.6 et (3.31), on obtient d'autre part

$$\begin{aligned} 8s_2 \cdot \alpha_1 \alpha_1^\vee &= (5s_1^2 - c_2(F)) \cdot \alpha_1 \alpha_1^\vee \\ &= 5q_F(s_1, s_1)q_F(\alpha_1, \alpha_1^\vee) + 10q_F(s_1, \alpha_1)q_F(s_1, \alpha_1^\vee) - 30q_F(\alpha_1, \alpha_1^\vee) \\ &= 10q_F(s_1, \alpha_1)q_F(s_1, \alpha_1^\vee) \\ &= 10 \cdot 24^2 \neq 0 \end{aligned}$$

et donc une contradiction. On en déduit que les classes $[P], [P^\vee], [S']$ sont linéairement indépendantes dans $N^2(F)$, ce qui fournit le résultat souhaité. \square

Proposition 3.4.3.7. *Soit X une cubique générale admettant une section hyperplane Y à six points doubles en position générale (ou contenant un scroll cubique), et soit F la variété de Fano de X . Avec les notations de la proposition précédente, les classes $[P]$ et $[P^\vee]$ sont extrémales dans $\text{Eff}^2(F)$, et P resp. P^\vee sont les seules surfaces dans F de classe dans $\mathbb{R}^+[P]$ resp. $\mathbb{R}^+[P^\vee]$.*

Démonstration. Comme la démonstration de la proposition 3.4.2.23. \square

3.4.4 Cubiques pfaffiennes

Le but de cette section est d'étudier la variété de Fano d'une cubique pfaffienne générale, i.e. d'une cubique générale dans \mathcal{C}_{14} . Par le théorème 3.3.2.2, une telle variété de Fano est isomorphe à un schéma de Hilbert $S^{[2]}$ d'une surface $K3$ générale de degré 14 générale. On rappelle donc d'abord quelques propriétés générales du schéma de Hilbert $S^{[2]}$ et ensuite on regarde le cas particulier où $S^{[2]}$ est isomorphe à la variété de Fano d'une cubique pfaffienne générale.

3.4.4.1 Le schéma de Hilbert $S^{[2]}$

Soit S une surface $K3$ et soit $S^{(2)}$ le produit symétrique de S , obtenu comme quotient de $S \times S$ par l'action du groupe qui permute les deux facteurs. Notons $\text{pr} : S \times S \rightarrow S^{(2)}$ la projection naturelle et $p_1, p_2 : S \times S \rightarrow S$ les projections sur chacun des deux facteurs. Soit $S^{[2]}$ le schéma de Hilbert paramétrant les sous-schémas de longueur 2 dans S . On a un morphisme birationnel $\pi : S^{[2]} \rightarrow S^{(2)}$ qui est l'éclatement de $S^{(2)}$ au-dessus de la diagonale Δ . Notons E le diviseur exceptionnel correspondant sur $S^{[2]}$. On résume cette construction dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & & S^{[2]} \\
 & & \downarrow \pi \\
 & S \times S & \xrightarrow{\text{pr}} S^{(2)} \\
 p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
 S & & S
 \end{array}$$

On obtient une injection de réseaux

$$i : (H^2(S, \mathbb{Z}), q_S) \longrightarrow (H^2(S^{[2]}, \mathbb{Z}), q_{S^{[2]}})$$

comme suit : pour $\alpha \in H^2(S, \mathbb{C})$, il existe un unique $\beta \in H^2(S^{(2)}, \mathbb{C})$ tel que $\text{pr}^* \beta = p_1^* \alpha + p_2^* \alpha$. On pose $i(\alpha) := \pi^* \beta$. Le morphisme i est compatible avec la décomposition de Hodge et il existe $\delta \in H^2(S^{[2]}, \mathbb{Z})$ tel que $[E] = 2\delta$ et

$$(H^2(S^{[2]}, \mathbb{Z}), q_{S^{[2]}}) \simeq (H^2(S, \mathbb{Z}), q_S) \oplus^\perp \mathbb{Z} \delta.$$

La forme de Beauville est alors donnée par

$$q_{S^{[2]}}(i(\alpha), i(\alpha)) = \alpha^2 \quad , \quad q_{S^{[2]}}(\delta, \delta) = -2 \quad , \quad q_{S^{[2]}}(\alpha, \delta) = 0 \quad (3.37)$$

pour tout $\alpha \in H^2(S, \mathbb{C})$.

Si (S, h) est une surface $K3$ polarisée générale, on a donc

$$N_{\mathbb{Z}}^1(S^{[2]}) = \mathbb{Z} h \oplus^\perp \mathbb{Z} \delta.$$

Soit $l \in N_1(S^{[2]})$ la classe d'une fibre de π au-dessus de Δ . Alors on a

$$\delta \cdot l = -1 \quad , \quad h \cdot l = 0,$$

et donc $2l \cdot \alpha = q_{S^{[2]}}(\alpha, \delta)$ pour tout $\alpha \in N^1(S^{[2]})$, i.e., $\rho_l = \delta$ (cf. (3.5)). Cela vérifie les conjectures de Hassett et Tschinkel pour un des deux rayons extrémaux du cône

- $\text{Psef}^1(S^{[2]})$: on a $q_{S^{[2]}}(\delta, \delta) = -2$ et δ est extrémal dans $\text{Psef}^1(S^{[2]})$;
- $\text{Psef}_1(S^{[2]})$: la classe l est extrémale dans $\text{Psef}_1(S^{[2]})$ et sa classe duale $\rho_l = \delta$ est une classe de carré -2 ; les courbes rationnelles représentant l sont paramétrées par $\Delta \simeq S$ et la contraction extrémale de l est définie par les sections de $\mathcal{O}_{S^{[2]}}(mh)$ pour $m \gg 0$;
- $\text{Nef}^1(S^{[2]})$: on a $h \cdot l = 0$, de sorte que h est extrémal dans $\text{Nef}^1(S^{[2]})$.

Remarque 3.4.4.1. Si S est une surface $K3$ de degré d générale, on a

$$N^2(S^{[2]}) = \langle \mathbf{S}^2 N^1(S^{[2]}), c_2(S^{[2]}) \rangle.$$

Pour $d = 2(n^2 + n + 1)$, cela découle de la proposition 3.3.2.4 et du théorème 3.3.2.2. Pour le cas général, on utilise que le groupe de Hodge de $S^{[2]}$ est connu [72], ce qui permet d'obtenir le résultat en faisant un calcul d'invariants.

3.4.4.2 L'isomorphisme de Beauville et Donagi

Soit maintenant X une cubique pfaffienne générale et soit F la variété de Fano de X . Rappelons d'abord la construction de l'isomorphisme $S^{[2]} \rightarrow F$ de Beauville et Donagi. Soit V_6 un espace vectoriel complexe de dimension 6 et soit W_9 un sous-espace linéaire, de dimension 9 dans $\wedge^2 V_6$. Si l'on choisit W_9 suffisamment général,

$$S := G(2, V_6) \cap \mathbb{P}(W_9) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 V_6)$$

est une surface $K3$ générale de degré 14 dans \mathbb{P}^8 et

$$X := \{2\text{-formes dégénérées}\} \cap \mathbb{P}(W_9^\perp) \subset \mathbb{P}(W_9^\perp) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 V_6^\vee)$$

est une cubique lisse dans \mathbb{P}^5 . Si l'on note F la variété de Fano de X , l'isomorphisme $S^{[2]} \rightarrow F$ de Beauville et Donagi est donné par

$$\begin{aligned} r : S^{[2]} &\longrightarrow F \subset G(2, W_9^\perp) \subset G(2, \wedge^2 V_6^\vee) \\ P + Q &\longmapsto W_9^\vee \cap \wedge^2(P + Q)^\perp. \end{aligned}$$

Le lemme suivant exprime la classe $s_1 \in N^1(F)$ en fonction de h et δ .

Lemme 3.4.4.2 (Beauville, Donagi). *Soit X une cubique pfaffienne générale et soit h la classe d'une section hyperplane de X . Avec les notations ci-dessus, on a*

$$r^* s_1 = 2h - 5\delta$$

dans $N^1(S^{[2]})$.

Démonstration. Soit H un hyperplan de Plücker défini par $W_4 \subset W_9^\perp$. On veut $r(P + Q) \cap W_4 \neq \emptyset$. Par dualité, c'est équivalent à

$$\wedge^2(P + Q) + W_4^\perp \neq \wedge^2 V_6, \quad (3.38)$$

où $W_9 \subset W_4^\perp \subset \wedge^2 V_6$. Les espaces $\wedge^2(P + Q)$ et W_4^\perp contiennent chacun $\wedge^2 P$ et $\wedge^2 Q$, de sorte que (3.38) est équivalent à la condition de Plücker

$$(P + Q) + W_4^\perp \neq \wedge^2 V_6.$$

Comme $\det(P \wedge Q) = \det(P)^2 \det(Q)^2$, on peut écrire

$$[r^*(H)] = 2h - b\delta$$

pour un $b \in \mathbb{Z}$. Comme $q_F(s_1, s_1) = 6$ et $h^2 = \deg(S) = 14$, on a $28 - b^2 = 3$ et $b = \pm 5$. L'intersection avec une droite du réglage Δ est b et donc b est positif et $b = 5$:

$$r^*[H] = 2h - 5\delta.$$

□

Remarque 3.4.4.3. Soit l une fibre de la projection $\pi : S^{[2]} \rightarrow S^{(2)}$. Alors on a $(2h - 5\delta) \cdot l = 5$, de sorte que l paramètre le réglage d'un scroll quintique T_5 dans X .

3.4.4.3 Classes nefes et classes de courbes

Etudions maintenant les cônes de classes positives en codimension 1 et 3 sur $S^{[2]} \simeq F$. La cubique X contient [25, §4.1.3], [11, Rem. 1] :

- une famille de scrolls quartiques T_4 , paramétrée par S et

- une famille de scrolls quintiques T_5 , également paramétrée par S (cf. remarque 3.4.4.3).

Notons $R_4 \in N_1(S^{[2]})$ (resp. $R_5 \in N_1(S^{[2]})$) la classe d'une courbe rationnelle lisse, paramétrant un réglage de T_4 (resp. de T_5) (où l'on identifie $S^{[2]}$ avec la variété de Fano F de X). Alors on a [27, p. 21, Ex. 7.10]

- $\tilde{q}_{S^{[2]}}(R_4, R_4) = -2$ et $\rho_{R_4} = 3h - 8\delta$, i.e.

$$\forall \eta \in N^1(S^{[2]}) \quad R_4 \cdot \eta = q_{S^{[2]}}(3h - 8\delta, \eta);$$

- $\tilde{q}_{S^{[2]}}(R_5, R_5) = -\frac{1}{2}$ et $\rho_{R_5} = \delta$, i.e.,

$$\forall \eta \in N^1(S^{[2]}) \quad 2R_5 \cdot \eta = q_{S^{[2]}}(\delta, \eta).$$

Remarque 3.4.4.4. On a $E_{\text{nod}}(S^{[2]}) = \{R_4, R_5\}$ (cf. définition 3.2.2.8); le réseau $N_{\mathbb{Z}}^1(S^{[2]})$ ne représente pas -10 .

Proposition 3.4.4.5. *Soit S une surface K3 générale de degré 14. Alors on a*

$$\text{Nef}^1(S^{[2]}) = \mathbb{R}^+(8h - 21\delta) + \mathbb{R}^+ h,$$

$$\text{Psef}_1(S^{[2]}) = \mathbb{R}^+ R_4 + \mathbb{R}^+ R_5.$$

Démonstration. Comme l'inclusion $\mathbb{R}^+(8h - 21\delta) + \mathbb{R}^+ h \subset \text{Nef}^1(S^{[2]})$ est connue (cf. remarque 3.2.2.11), il reste à vérifier que les deux rayons $\mathbb{R}^+(8h - 21\delta)$ et $\mathbb{R}^+ h$ sont extrémaux dans $\text{Nef}^1(S^{[2]})$. Mais cela découle du fait que l'on a

$$R_4 \cdot (8h - 21\delta) = q_{S^{[2]}}(3h - 8\delta, 8h - 21\delta) = 0$$

et

$$2R_5 \cdot h = q_{S^{[2]}}(\delta, h) = 0.$$

□

Remarque 3.4.4.6. Il découle de la remarque 3.4.4.4 que la proposition 3.4.4.5 vérifie les conjectures 3.2.2.7 et 3.2.2.10 de Hassett et Tschinkel.

Remarque 3.4.4.7. Avec la notation du paragraphe §3.4.4.1, R_5 est la classe d'une fibre de la contraction $S^{[2]} \rightarrow S^{(2)}$.

3.4.4.4 Classes pseudoeffectives et géométrie birationnelle

Proposition 3.4.4.8. *Soit S une surface K3 générale de degré 14. Alors on a*

$$\text{Psef}^1(S^{[2]}) = \mathbb{R}^+(3h - 8\delta) + \mathbb{R}^+ \delta.$$

Démonstration. Par un résultat de Markman, on a (cf. remarque 3.2.2.3)

$$\text{Psef}^1(S^{[2]}) \subset \mathbb{R}^+(3h - 8\delta) + \mathbb{R}^+ \delta.$$

Comme δ est effectif (cf. §3.4.4.1), il reste à montrer que $3h - 8\delta$ est pseudoeffectif. On construit un diviseur de classe un multiple de $3h - 8\delta$. Par la remarque 3.3.2.6, on a

$$(8h - 21\delta)^4 = 3q_{S^{[2]}}(8h - 21\delta, 8h - 21\delta)^2 = 3 \cdot 14 > 0,$$

de sorte la classe $(8h - 21\delta)$ est big et nef par la proposition 3.4.4.5. Le « basepoint-free theorem » [37, Thm. 3.3] entraîne alors que les sections globales du fibré en droites $\mathcal{O}_{S^{[2]}}(m(8h - 21\delta))$ définissent un morphisme génériquement fini

$$\varphi_{m(8h-21\delta)} : S^{[2]} \rightarrow \mathbb{P} H^0(S^{[2]}, \mathcal{O}_{S^{[2]}}(m(8h - 21\delta)))$$

si l'on choisit m suffisamment grand. Comme

$$R_4 \cdot (8h - 21\delta) = 0,$$

toutes les courbes de classe R_4 sont contractées par $\varphi_{m(8h-21\delta)}$. Si l'on note

$$S^{[2]} \xrightarrow{\text{contr}} Z \longrightarrow \mathbb{P} H^0(S^{[2]}, \mathcal{O}_{S^{[2]}}(m(8h - 21\delta)))$$

la factorisation de Stein, contr est une contraction au sens de la définition 3.2.2.5. Il y a deux possibilités : soit contr est divisorielle, soit contr est petite et contracte localement un \mathbb{P}^2 sur un point [71, Thm. 1.1] (cf. §3.2.2). Supposons d'abord que la contraction est petite, de sorte qu'elle contracte (au moins) un \mathbb{P}^2 . La classe duale $\rho_l \in N^1(S^{[2]})$ d'une droite l dans ce \mathbb{P}^2 est alors une classe primitive avec $q_{S^{[2]}}(\rho_l, \rho_l) = -10$ (cf. la démonstration de [28, Thm. 21]). Comme -10 n'est pas représenté par le réseau $(H^2(S^{[2]}, \mathbb{Z}), q_{S^{[2]}})$ (cf. remarque 3.4.4.4), on obtient une contradiction. Supposons donc que la contraction est divisorielle et notons D le diviseur contracté. Écrivons $[D] = ah + b\delta$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Par la remarque 3.3.2.6, on a

$$\begin{aligned} 0 &= [D] \cdot (8h - 21\delta)^3 = 3q_{S^{[2]}}(ah + b\delta, 8h - 21\delta)q_{S^{[2]}}(8h - 21\delta, 8h - 21\delta) \\ &= 3 \cdot ((112a + 42b) \cdot 3 \cdot 14), \end{aligned}$$

ce qui est équivalente à $3b = -8a$. On en déduit que $[D]$ est un multiple de $3h - 8\delta$ ce qui entraîne le résultat souhaité. \square

Corollaire 3.4.4.9. *Soit S une surface K3 générale de degré 14.*

1. *Il existe une contraction extrême $\text{contr}_{R_4} : S^{[2]} \rightarrow Y_4$ qui contracte les courbes de classe dans $\mathbb{R}^+ R_4$ sur $S \subset Y_4$. Le lieu exceptionnel est un diviseur E_4 de classe $3h - 8\delta$ et $\text{contr}_{R_4}|_{E_4} : E_4 \rightarrow S$ est une fibration en courbes rationnelles lisses de degré 4 par rapport à la polarisation $2h - 5\delta$.*
2. *La contraction extrême $\text{contr}_{R_5} : S^{[2]} \rightarrow S^{(2)}$ contracte les courbes de classe dans $\mathbb{R}^+ R_5$ sur la diagonale $\Delta \simeq S \subset S^{(2)}$. Le diviseur exceptionnel E_5 est de classe 2δ et $\text{contr}_{R_5}|_{E_5} : E_5 \rightarrow S$ est une fibration en courbes rationnelles lisses de degré 5 par rapport à la polarisation $2h - 5\delta$.*

Démonstration. Pour le rayon $\mathbb{R}^+ R_5$, c'est juste un résumé des discussions précédentes (cf. §3.4.4.1 et la remarque 3.4.4.7). Regardons donc le rayon $\mathbb{R}^+ R_4$. La contraction construite dans la démonstration de la proposition 3.4.4.8 est une contraction extrême divisorielle au sens de la définition 3.2.2.6 et l'on a un des deux cas suivants (cf. §3.2.2)

- contr_{R_4} est de type A_2 et donc $E_4 \cdot R_4 = -1$;
- contr_{R_4} est de type A_1 et donc $E_4 \cdot R_4 = -2$.

Comme E_4 est de classe un multiple de $(3h - 8\delta)$ et $(3h - 8\delta) \cdot R_4 = q_{S^{[2]}}(3h - 8\delta, 3h - 8\delta) = -2$, on doit avoir $E_4 \cdot R_4 = -2$ (cf. §3.2.2), d'où le résultat. \square

Remarque 3.4.4.10. Il découle de la remarque 3.4.4.4 que la proposition 3.4.4.8 et le corollaire 3.4.4.9 vérifient les conjectures 3.2.2.2 et 3.2.2.9 de Hassett et Tschinkel.

Remarque 3.4.4.11. Comme $\text{Nef}_{\text{bir}}^1(S^{[2]})$ est le dual de $\text{Psef}^1(S^{[2]})$ par rapport à la forme de Beauville [13, Prop. 4.4], on a

$$\text{Nef}_{\text{bir}}^1(S^{[2]}) = \text{Nef}^1(S^{[2]}).$$

3.4.4.5 La face isotrope

On montre que la face isotrope est de dimension 3.

Proposition 3.4.4.12. *Soit S une surface K3 générale de degré 14. Alors on a*

$$\mathbb{R}^+ h\delta + \mathbb{R}^+ s_2 + \mathbb{R}^+ (3h - 8\delta)(8h - 21\delta) \subset \text{Pset}_{\text{iso}}^2(S^{[2]})$$

et les classes $h\delta, s_2$ et $(3h - 8\delta)(8h - 21\delta)$ sont linéairement indépendantes.

Démonstration. Comme d'habitude, la classe s_2 est lagrangienne. Notons $\text{contr}_{R_5} : S^{[2]} \rightarrow S^{(2)}$ (resp. $\text{contr}_{R_4} : S^{[2]} \rightarrow Y$) la contraction extrême du rayon $\mathbb{R}^+ R_5$ (resp. $\mathbb{R}^+ R_4$). Si C est une courbe dans $\Delta \subset S^{(2)}$, la surface $\text{contr}_{R_5}^{-1}(C)$ est de classe un multiple de $E \cdot h = 2h\delta$. Par §3.2.3 et (3.37), on a $\varphi_{\text{iso}}(h\delta) = q_{S^{[2]}}(h, \delta) = 0$, d'où l'on déduit que $\text{contr}_{R_5}^{-1}(C)$ est lagrangienne. Avec un raisonnement analogue, en remplaçant R_4 par R_5 , on voit que la classe $(3h - 8\delta)(8h - 21\delta)$ est également lagrangienne. En utilisant le lemme 3.4.1.1 et le lemme 3.4.4.2, on vérifie que ces trois classes sont linéairement indépendantes dans $N^2(S^{[2]})$. \square

Pour la proposition suivante, on reprend les notations du corollaire 3.4.4.9.

Proposition 3.4.4.13. *Soit S une surface K3 générale de degré 14. Alors*

1. *Le rayon $\mathbb{R}^+((3h - 8\delta) \cdot (8h - 21\delta))$ est extrême dans $\text{Eff}^2(F)$ et les surfaces de classe dans ce rayon sont les surfaces dans E_4 obtenues comme tirées en arrière des courbes $C \subset S$ par la contraction $\text{contr}_{R_4}|_{E_4} : E_4 \rightarrow S$.*
2. *Le rayon $\mathbb{R}^+ h\delta$ est extrême dans $\text{Eff}^2(F)$ et les surfaces de classe dans ce rayon sont les surfaces dans E_5 obtenues comme tirées en arrière des courbes $C \subset S$ par la contraction $\text{contr}_{R_5}|_{E_5} : E_5 \rightarrow S$.*

Démonstration. Comme la démonstration de la proposition 3.4.2.23. \square

4. Produit d'une courbe

4.1 Introduction

Soit X une courbe irréductible de genre $g \geq 2$, très générale, ou une courbe hyperelliptique de genre $g \geq 2$, très générale. Notons $p_i : X \times X \rightarrow X, i \in \{1, 2\}$, les deux projections, $x_i \in N^1(X \times X)$ la classe d'une fibre de p_i et $\Delta \in N^1(X \times X)$ la classe de la diagonale. La famille $\{x_1, x_2, \Delta\}$ forme une base du \mathbb{R} -espace vectoriel $N^1(X \times X)$ (cf. lemme 4.2.0.2) et la classe $x := x_1 + x_2$ est ample. Notre résultat principal (proposition 4.1.2.1) est la construction de nouvelles classes nef dans $N^1(X \times X)$ en suivant une méthode de Vojta [68].

On explique d'abord ce à quoi l'on s'attend pour les cônes de classes positives selon une question de Kollár (§4.1.1) et comment la méthode de Vojta permet de construire des nouvelles classes nef dans $N^1(X \times X)$ (§4.1.2). Dans les sections §4.2 et §4.3, on donne un aperçu de ce qui est connu concernant l'étude des classes positives dans $N^1(X \times X)$ et dans la dernière section on construit enfin des nouvelles classes nef en appliquant la méthode de Vojta (§4.4).

4.1.1 Une question de Kollár

Avant d'expliquer la méthode de Vojta, on rappelle une question de Kollár concernant la structure de $\text{Psef}(X \times X)$ (resp. de $\text{Nef}(X \times X)$). Par Riemann-Roch, toute classe $c \in N^1(X \times X)$ telle que $c^2 > 0$ et $c \cdot x > 0$ est effective (cf. [38, Lemme 4]). Autrement dit, le cône $\text{Psef}(X \times X)$ contient un des deux cônes définis par $c^2 \geq 0$. Si ce cône est strictement contenu dans $\text{Psef}(X \times X)$, il existe un rayon extrémal $r \in \text{Psef}(X \times X)$ tel que $r^2 < 0$. Comme un tel rayon r est engendré par la classe d'une courbe irréductible C (cf. [16, Lemme 6.2]), on est ramené à déterminer les courbes irréductibles d'autointersection négative. Autrement dit, une classe c est nef si et seulement si $c^2 \geq 0, c \cdot x \geq 0$ et si $c \cdot \alpha \geq 0$ pour toute classe effective α d'autointersection négative. Rappelons quelles classes d'autointersection négative sont connues.

- On a $\Delta^2 = 2 - 2g < 0$ (cf. lemme 4.2.0.3), de sorte que Δ engendre un rayon extrémal dans $\text{Psef}(X \times X)$.
- Si X est hyperelliptique, l'involution hyperelliptique sur X induit une involution ι sur $N^1(X \times X)$, et l'on a $\iota(\Delta) = 2x - \Delta$, de sorte que $2x - \Delta$ engendre un autre rayon extrémal d'autointersection négative.
- Enfin, si $g = 3$, la classe $c_e = 8x - 3\Delta$ est effective d'autointersection négative (cf. la démonstration de 2) de la proposition 4.3.2.1).

Question 4.1.1.1 (Kollár). 1. Soit X une courbe très générale de genre ≥ 4 . Est-ce que la diagonale Δ est la seule courbe d'autointersection négative? C'est équivalent à demander si le cône $\text{Nef}(X \times X)$ est déterminé par les inéquations

$$c^2 \geq 0 \quad , \quad c \cdot x \geq 0 \quad , \quad c \cdot \Delta \geq 0.$$

2. Soit X une courbe hyperelliptique très générale de genre ≥ 2 . Est-ce que Δ et $2x - \Delta$ sont les seules classes effectives d'autointersection négative ? C'est équivalent à demander si le cône $\text{Nef}(X \times X)$ est déterminé par les inéquations

$$c^2 \geq 0 \quad , \quad c \cdot x \geq 0 \quad , \quad c \cdot \Delta \geq 0 \quad , \quad c \cdot (2x - \Delta) \geq 0.$$

3. Soit X une courbe très générale de genre 3. Est-ce que Δ et $8x - 3\Delta$ sont les seules classes effectives d'autointersection négative ? Autrement dit, on se demande si le cône $\text{Nef}(X \times X)$ est déterminé par les inéquations

$$c^2 \geq 0 \quad , \quad c \cdot x \geq 0 \quad , \quad c \cdot \Delta \geq 0 \quad , \quad c \cdot (8x - 3\Delta) \geq 0.$$

La question semble difficile car il est déjà difficile de déterminer l'intersection de $\text{Nef}(X \times X)$ (resp. $\text{Psef}(X \times X)$) avec le plan $\mathcal{H} := \langle x, \Delta \rangle$ des classes symétriques, ce qui a été l'objet des travaux de Kouvidakis [38], Bastianelli [6], Ross [58] et Jiang [34]. Alors qu'on sait qu'un des deux rayons extrémaux de $\text{Nef}(X \times X) \cap \mathcal{H}$ est engendré par $(g-1)x + \Delta$, l'autre rayon extrémal n'est connu que lorsque X est hyperelliptique, $g = 3$, ou g est un carré parfait (cf. §4.3.2 pour les résultats connus détaillés).

4.1.2 La méthode de Vojta

La méthode de Vojta [68, Prop. 1.5] pour construire des classes nef dans $\text{N}^1(X \times X)$ est la suivante : posons $\Delta' := \Delta - x$, de sorte que $\Delta' \cdot x_1 = \Delta' \cdot x_2 = 0$ (cf. lemme 4.2.0.3). L'involution σ sur $X \times X$ qui permute les deux facteurs induit une involution σ^* sur $\text{N}^1(X \times X)$ qui permute x_1 et x_2 et laisse Δ invariant. Le cône des classes pseudoeffectives (resp. nef) est invariant sous cette action, de sorte qu'il suffit d'étudier l'intersection de ces cônes avec le demi-espace

$$\mathcal{H}^+ := \{d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta' \mid d_2 \geq d_1\}.$$

Supposons qu'il existe un entier positif d et des classes effectives c_1, \dots, c_k d'autointersection négative telles que toute classe $c = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta' \in \mathcal{H}^+$ représentée par une courbe irréductible satisfasse une des trois conditions suivantes (cf. lemme 4.4.1.1) :

- la classe c est proportionnelle à une classe c_i ;
- la classe c est d'autointersection positive ;
- on a $d_1 \geq d$.

Alors, Vojta remarque que $\text{Psef}^+(X \times X) := \text{Psef}(X \times X) \cap \mathcal{H}^+$ est contenu dans l'enveloppe convexe de

$$\mathcal{C}_d := \{d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta' \in \mathcal{H}^+ \mid d_2d_1 - g\gamma^2 + \frac{1}{d}(g-1)d_1^2 \geq 0\}$$

et $\{c_1, \dots, c_k\}$ (cf. lemme 4.4.1.1). Comme $\alpha \in \text{Nef}(X \times X) \cap \mathcal{H}^+$ si et seulement si $\alpha \cdot \beta \geq 0$ pour tout $\beta \in \text{Psef}^+(X \times X)$ (cf. lemme 4.4.3.2), on en déduit que toute classe α dans \mathcal{H}^+ satisfaisant

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \alpha \cdot c_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathcal{C}_d^\vee$$

est nef, où l'on note \mathcal{C}_d^\vee le dual de \mathcal{C}_d par rapport au produit d'intersection.

Si $c = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta' \in \mathcal{H}^+$ est la classe d'une courbe irréductible C et si $c \neq x_1$, on a $d_1 = \deg(p_1|_C) \geq 1$ et donc $\text{Psef}^+(X \times X) \subset \mathcal{C}_1$. Par les arguments précédents, on voit ainsi que toute classe dans \mathcal{C}_1^\vee est nef, ce qui est le résultat de Vojta [68, Prop. 1.5]. La proposition suivante (cf. corollaire 4.1.2.1) fournit une légère amélioration de ce résultat alors que la question de Kollár reste ouverte en général.

Proposition 4.1.2.1. *Soit X une courbe de genre $g \geq 2$.*

1. *Lorsque X est une courbe hyperelliptique très générale, $\text{Psef}^+(X \times X)$ est contenu dans l'enveloppe convexe de $\Delta, 2x - \Delta$ et \mathcal{C}_2 .*
2. *Si $g = 3$, $\text{Psef}^+(X \times X)$ est contenu dans l'enveloppe convexe de Δ et \mathcal{C}_2 .*
3. *Lorsque X est une courbe très générale de genre $g \geq 5$, $\text{Psef}^+(X \times X)$ est contenu dans l'enveloppe convexe de Δ et \mathcal{C}_2 .*
4. *Si $g \geq 4$ et g est un carré parfait, $\text{Psef}^+(X \times X)$ est contenu dans l'enveloppe convexe de Δ et \mathcal{C}_3 .*

On obtient par exemple l'image suivante pour une courbe très générale de genre 2, où les classes dans la région en gris foncé sont nefes et le cône nef est contenu dans la région en gris clair (cf. §4.4.4 pour des figures pour $g = 3, 4, 5$).

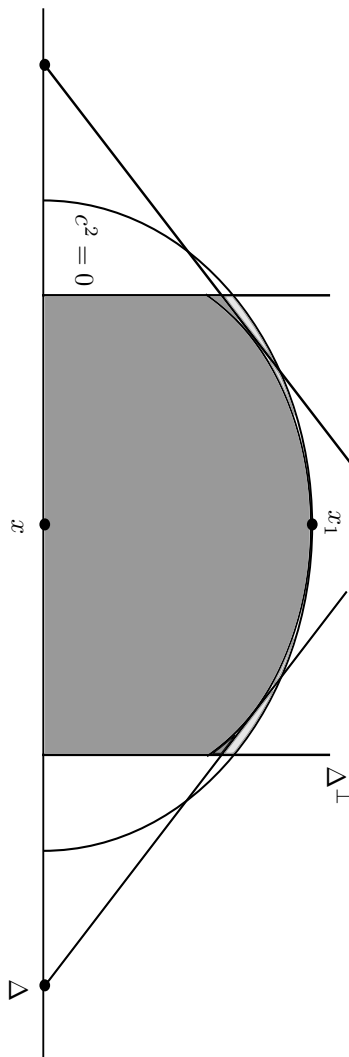


FIGURE 4.1 – Cône nef pour $g = 2$

4.2 Préliminaires

Soit Z une variété algébrique projective lisse. On note $\text{Pic}(Z)$ le groupe de Picard de Z et $\text{Pic}^0(Z)$ le sous-groupe des classes algébriquement équivalentes à 0. Le groupe de Néron-Severi est défini par

$$\text{NS}(Z) := \text{Pic}(Z) / \text{Pic}^0(Z),$$

i.e., il paramètre les classes d'équivalence algébrique. Le \mathbb{R} -espace vectoriel

$$N^1(Z) := \text{NS}(Z) \otimes \mathbb{R}$$

paramètre les classes d'équivalence numérique de \mathbb{R} -diviseurs sur Z (cf. [36, p.122])¹.

Soit désormais X une courbe de genre $g \geq 2$ très générale ou une courbe hyperelliptique de genre $g \geq 2$ très générale. Notons JX la jacobienne de X et soit

$$\begin{aligned} u : X \times X &\rightarrow JX \\ (x, y) &\mapsto [\mathcal{O}_X(x + y - 2q_0)] \end{aligned}$$

l'application d'Abel-Jacobi pour un point de base $q_0 \in X$ fixé. Notons $p_i : X \times X \rightarrow X$ les deux projections pour $i \in \{1, 2\}$. Dans $N^1(X \times X)$, on a les classes

$$x_1 := [p_1^{-1}(\{pt.\})] \quad , \quad x_2 := [p_2^{-1}(\{pt.\})] \quad , \quad \theta := u^*\Theta,$$

où Θ est la polarisation canonique de JX . Pour faciliter les notations dans la suite, on pose de plus $x := x_1 + x_2$. La classe Δ de la diagonale dans $X \times X$ est alors donnée par (cf. §4.3.1, équation (4.2))

$$\Delta = -\theta + (g + 1)x. \tag{4.1}$$

Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 4.2.0.2. *Soit X une courbe de genre $g \geq 2$. La famille $\{x_1, x_2, \Delta\}$ est libre dans $N^1(X \times X)$ et elle engendre $N^1(X \times X)$ si X est une courbe très générale ou une courbe hyperelliptique très générale.*

Démonstration. On a (cf. [40, §15.2]) :

$$\begin{aligned} \text{Pic}(X \times X) &\simeq p_1^* \text{Pic}(X) \oplus p_2^* \text{Pic}(X) \oplus \text{End}(JX) \\ &\simeq \text{Pic}^0(X) \oplus \text{Pic}^0(X) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus 2} \oplus \text{End}(JX), \end{aligned}$$

et comme $\text{End}(JX)$ est un groupe discret, on a $\text{Pic}^0(X \times X) \simeq \text{Pic}^0(X) \oplus \text{Pic}^0(X)$, d'où l'on déduit

$$\text{NS}(X \times X) = \text{Pic}(X \times X) / \text{Pic}^0(X \times X) = \mathbb{Z}^{\oplus 2} \oplus \text{End}(JX)$$

et donc

$$N^1(X \times X) \simeq \mathbb{R}x_1 \oplus \mathbb{R}x_2 \oplus (\text{End}(JX) \otimes \mathbb{R}).$$

Les classes dans $\text{End}(JX)$ s'identifient avec les correspondances non triviales dans $X \times X$, et comme Δ est une correspondance non triviale, on obtient la première partie de l'énoncé. Pour la deuxième partie, il suffit de remarquer que l'on a $\text{End}(JX) = \mathbb{Z}$ pour X très générale et que c'est également le cas pour X hyperelliptique très générale par un résultat de [73]. \square

1. On remarque que cette notation coïncide avec la notation introduite dans §1.1.

Lemme 4.2.0.3. *Soit X une courbe de genre $g \geq 2$. La forme d'intersection sur $\langle x_1, x_2, \Delta \rangle \subset N^1(X \times X)$ est donnée par*

$$\Delta^2 = 2 - 2g \quad , \quad \Delta \cdot x_1 = \Delta \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2 = 1 \quad , \quad x_1^2 = x_2^2 = 0.$$

Démonstration. Il est clair que l'on a $\Delta \cdot x_1 = \Delta \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2 = 1$ et $x_1^2 = x_2^2 = 0$. Comme la diagonale Δ est lisse de genre g , la formule d'adjonction $\Delta^2 = 2p_a(\Delta) + K_{X \times X} \cdot \Delta$ fournit $\Delta^2 = 2 - 2g$. \square

Remarque 4.2.0.4. Parfois il est plus facile de travailler avec la classe $\Delta' := \Delta - x$ qui satisfait

$$\Delta'^2 = -2g \quad , \quad \Delta' \cdot x_2 = \Delta' \cdot x_1 = 0.$$

L'involution

$$\begin{aligned} \sigma : X \times X &\rightarrow X \times X \\ (x, y) &\mapsto (y, x) \end{aligned}$$

induit une involution σ^* sur $N^1(X \times X)$ qui agit par

$$x_1 \mapsto x_2 \quad , \quad x_2 \mapsto x_1 \quad , \quad \Delta \mapsto \Delta \quad , \quad \Delta' \mapsto \Delta'$$

et laisse le cône des classes pseudoeffectives (resp. nef) invariant. Si l'on pose

$$\mathcal{H}^+ := \{c = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta' \in N^1(X \times X) \mid d_2 \geq d_1\},$$

il suffit ainsi d'étudier les cônes

$$\text{Nef}^+(X \times X) := \text{Nef}(X \times X) \cap \mathcal{H}^+ \quad , \quad \text{Psef}^+(X \times X) := \text{Psef}(X \times X) \cap \mathcal{H}^+.$$

Une première étape serait de déterminer l'intersection de ces cônes avec l'hyperplan

$$\mathcal{H} := \{c = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta' \mid d_2 = d_1\} = \langle x, \Delta \rangle$$

des classes symétriques.

4.3 Classes symétriques sur $X \times X$

On rappelle d'abord quelques propriétés élémentaires du produit symétrique $X^{(d)}$ de X (§4.3.1); on donne ensuite un aperçu des résultats connus concernant la positivité des classes symétriques dans $N^1(X \times X)$ (§4.3.2).

4.3.1 Le produit symétrique d'une courbe

Soit d un entier positif. Munissons X^d de l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_d qui permute les facteurs de X^d . Le produit symétrique $X^{(d)}$ de X est la variété projective lisse obtenue comme quotient de X^d par cette action (cf. [46, Prop. 3.2]). Elle paramètre les diviseurs de degré d sur X . Pour un point $q_0 \in X$ fixé, on a l'application d'Abel-Jacobi

$$\begin{aligned} u_d : X^{(d)} &\rightarrow JX \\ D &\mapsto [\mathcal{O}_X(D - dq_0)], \end{aligned}$$

et les classes entières

$$x_{(d)} = \text{classe de } \{q_0 + D \mid D \in X^{(d-1)}\} \quad , \quad \theta_{(d)} = u_d^* \Theta$$

sont linéairement indépendantes dans $N^1(X^{(d)})$ (cf. [18, Ex. B-1]), où l'on note Θ la polarisation principale canonique de JX . La classe $\Delta_{(d)}$ de la grande diagonale $\{2q_0 + D \subset X^{(d)} \mid p \in X, D \in X^{(d-2)}\}$ est donnée par (cf. [18, p. 358, Prop. 5.1])

$$\Delta_{(d)} = 2((d+g-1)x_{(d)} - \theta_{(d)}), \quad (4.2)$$

et l'on pose

$$\delta_{(d)} := \frac{\Delta_{(d)}}{2}.$$

Le lemme suivant est bien connu (cf. [18, p. 359] pour le cas où X est très générale).

Lemme 4.3.1.1. *La famille $\{x_{(d)}, \delta_{(d)}\}$ est libre dans $N^1(X^{(d)})$ et, pour X très générale ou X hyperelliptique très générale, cette famille engendre $N^1(X^{(d)})$.*

Démonstration. Il est clair que la famille est libre, de sorte qu'il suffit de montrer que $N^1(X^{(d)})$ est de dimension 2. On a (cf. [50, Prop. 2.3])

$$N^1(X^{(d)}) \simeq \mathbb{R}x_{(d)} \oplus (\text{NS}(JX) \otimes \mathbb{R})$$

et comme $\text{NS}(JX) = \mathbb{Z}$ pour X très générale ou X une courbe hyperelliptique très générale, $N^1(X \times X)$ est de rang 2 dans ce cas. \square

4.3.2 Classes nef symétriques

Le cône $\text{Nef}(X \times X) \cap \mathcal{H}$ est engendré par deux rayons extrémaux. Comme $(g-1)x + \Delta$ est effective et comme $((g-1)x + \Delta) \cdot \Delta = 0$, la classe $(g-1)x + \Delta$ engendre un des deux rayons extrémaux de $\text{Nef}(X \times X) \cap \mathcal{H}$. Posons

$$\lambda_n := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda x - \Delta \in \text{Nef}(X \times X)\},$$

de sorte que l'autre rayon extrémal de $\text{Nef}(X \times X) \cap \mathcal{H}$ est engendré par $\lambda_n x - \Delta$.

Comme la projection naturelle $\pi : X \times X \rightarrow X^{(2)}$ est finie (de degré 2), ramifiée le long de la diagonale, on a une injection

$$\pi^* : N^1(X^{(2)}) \rightarrow N^1(X \times X) \quad , \quad x_{(2)} \mapsto x \quad , \quad \delta_{(2)} \mapsto \Delta$$

qui identifie $N^1(X^{(2)})$ avec $N^1(X \times X) \cap \mathcal{H}$, et l'on a, en utilisant la formule de projection,

$$\text{Nef}(X \times X) \cap \mathcal{H} = \pi^* \text{Nef}(X^{(2)}).$$

Autrement dit, le cône $\text{Nef}(X^{(2)})$ est engendré par $(g-1)x_{(2)} + \delta_{(2)}$ et $\lambda_n x_{(2)} - \delta_{(2)}$. On a donc les résultats suivants pour $\text{Nef}^+(X \times X) \cap \mathcal{H}$ qui ont été formulés pour $\text{Nef}(X^{(2)})$ dans l'article original de Kouvidakis [38, Thm. 2] (cf. aussi [42]).

Proposition 4.3.2.1 (Kouvidakis). *Soit X une courbe de genre $g \geq 2$.*

1. *Si X est hyperelliptique, on a $\lambda_n = g + 1$.*
2. *Lorsque X est très générale de genre $g = 3$, on a $\lambda_n = \frac{14}{5}$.*
3. *Si X est très générale de genre $g \geq 4$, on a*

$$\sqrt{g} + 1 \leq \lambda_n \leq \frac{g}{\lfloor \sqrt{g} \rfloor} + 1$$

et donc $\lambda_n = \sqrt{g} + 1$ si g est un carré parfait.

- Démonstration.* 1. Supposons X hyperelliptique. La classe $(g+1)x - \Delta$ est nef car c'est le tiré en arrière de la polarisation principale sur JX par l'application d'Abel-Jacobi (cf. (4.1)). D'un autre côté, la classe $2x - \Delta = \iota(\Delta)$ est effective et comme $((g+1)x - \Delta) \cdot (2x - \Delta) = 0$, on en déduit que $(g+1)x - \Delta$ engendre un rayon extrémal de $\text{Nef}(X \times X) \cap \mathcal{H}$, i.e., $\lambda_n = g+1$.
2. Comme X est très générale, on peut supposer que X est une quartique plane. Or la tangente à un point $P \in X$ intersecte X en deux points supplémentaires Q et R . En bougeant P , on obtient ainsi un diviseur dans $X^{(2)}$, et un calcul d'intersection montre qu'il est de classe $8x_{(2)} - 3\delta_{(2)}$ (cf. [38, p. 124] et [16, p. 11]), d'autointersection négative. La classe $\frac{14}{5}x_{(2)} - \delta_{(2)}$ étant orthogonale à $8x_{(2)} - 3\delta_{(2)}$, elle engendre un rayon extrémal de $\text{Nef}(X^{(2)})$ et $\frac{14}{5}x - \Delta$ engendre donc un rayon extrémal de $\text{Nef}(X \times X) \cap \mathcal{H}$.
3. Comme l'autointersection d'une classe nef est positive, on a $\sqrt{g} + 1 \leq \lambda_n$ et par [38, Thm. 2], on a $\lambda_n \leq \frac{g}{\lfloor \sqrt{g} \rfloor} + 1$. □

Conjecture 4.3.2.2 (Kouvidakis). *Si X est une courbe de genre $g \geq 4$ très générale, Kouvidakis conjecture*

$$\lambda_n = \sqrt{g} + 1,$$

ce qui est équivalent à dire que $\delta_{(2)}$ (resp. Δ) est la seule classe effective d'autointersection négative dans $N^1(X^{(2)})$ (resp. dans $\text{Nef}(X \times X) \cap \mathcal{H}$).

La conjecture de Kouvidakis est donc vérifiée lorsque g est un carré parfait. Lorsque $g \geq 4$ est petit et n'est pas un carré parfait, de meilleures bornes supérieures pour λ_n ont été déterminées dans [34], [6], [58]. Par exemple, on a, pour $5 \leq g \leq 10$, les bornes suivantes :

g	5	6	7	8	10
$\lambda_n \leq$	$\frac{9}{4}$	$\frac{45}{13}$	$\frac{106}{29}$	$\frac{23}{6}$	$\frac{17}{4}$

4.4 Construction de classes nef d'après Vojta

Dans cette section, on construit de nouvelles classes nef en suivant la méthode de Vojta (cf. [68]) présentée dans §4.1.2.

4.4.1 Restrictions pour le cône pseudoeffectif

Soit C une courbe irréductible dans $X \times X$, de classe

$$[C] = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta'.$$

On a $d_i = C \cdot x_i \geq 0$ et si l'on suppose de plus $[C] \neq x_i$, on a $d_i = \deg(p_i|_C) \geq 1$ pour $i \in \{1, 2\}$, où l'on note $p_i : X \times X \rightarrow X$ la projection sur le i -ième facteur. Soit d un entier strictement positif et posons

$$Q_d(d_1, d_2, \gamma) := d_2d_1 - g\gamma^2 + \frac{1}{d}(g-1)d_1^2 \tag{4.3}$$

et

$$\mathcal{C}_d := \{d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta' \in \mathcal{H}^+ \mid Q_d(d_1, d_2, \gamma) \geq 0\}.$$

Lemme 4.4.1.1. *Supposons qu'il existe des classes effectives $c_1, \dots, c_k \in \mathcal{H}^+$ d'autointersection négative telles que toute classe $c = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta' \in \mathcal{H}^+$ représentée par une courbe irréductible satisfasse une des trois conditions suivantes :*

- la classe c est proportionnelle à une classe c_i ;
- la classe c est d'autointersection positive ;
- on a $d_1 \geq d$.

Alors $\text{Psef}^+(X \times X)$ est contenu dans l'enveloppe convexe de \mathcal{C}_d et $\{c_1, \dots, c_k\}$.

Démonstration. Soit $c = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta' \in \mathcal{H}^+$ la classe d'une courbe irréductible C d'autointersection positive ou satisfaisant $d_1 \geq d$. On va montrer que l'on a $c \in \mathcal{C}_d$. Comme $C^2 = 2d_1d_2 - 2g\gamma^2$, c'est clair si $C^2 \geq 0$. Supposons $d_1 \geq d$. On a, par Riemann-Hurwitz,

$$C^2 + C \cdot K_{X \times X} = 2p_a(C) - 2 \geq 2p_g(C) - 2 \geq (2g - 2)(x_2 \cdot C) = (2g - 2)d_2,$$

et comme

$$C^2 + C \cdot K_{X \times X} = 2d_2d_1 - 2g\gamma^2 + (2g - 2)(d_1 + d_2),$$

cela fournit

$$d_2d_1 - g\gamma^2 + (g - 1)d_1 \geq 0.$$

Comme $d_1 \geq d$, on en déduit

$$d_2d_1 - g\gamma^2 + \frac{1}{d}(g - 1)d_1^2 \geq 0,$$

c'est-à-dire $c \in \mathcal{C}_d$, ce qui termine la preuve. \square

Notre but est maintenant de déterminer les classes de courbes irréductibles d'autointersection négative pour d_1 petit ou d'exclure l'existence de telles classes. Notre résultat principal dans ce sens est la proposition 4.4.1.6. D'abord on aura besoin de deux petits lemmes.

Lemme 4.4.1.2. *Soit $d_1 \geq 1$. On a une bijection*

$$\begin{aligned} & \left\{ \varphi : X \rightarrow X^{(d_1)} \mid \varphi(X) \not\subset \Delta_{(d_1)} \right\} \\ \longleftrightarrow & \left\{ C \subset X \times X \mid [C] = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta', C \text{ sans composante } \{pt.\} \times X \right\}, \end{aligned}$$

où l'on note $\Delta_{(d_1)}$ la variété diagonale dans $X^{(d_1)}$ (et pas sa classe).

Démonstration. Soit C une courbe (réduite) dans $X \times X$ sans composante $\{pt.\} \times X$. Alors on obtient un morphisme $\varphi_C : X \rightarrow X^{(d_1)}$ tel que $\varphi_C(X) \not\subset \Delta_{(d_1)}$ en posant $\varphi_C(X) := p_2((p_1|_C)^{-1}(x))$. Inversement, pour un morphisme $\varphi : X \rightarrow X^{(d_1)}$ tel que $\varphi(X) \not\subset \Delta_{(d_1)}$ donné, on obtient une courbe C dans $X \times X$ en posant

$$C := \{(a, b) \in X \times X \mid \varphi(a) - b \geq 0\}.$$

Il est clair que, pour C sans composante $\{pt.\} \times X$, ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre. \square

Remarque 4.4.1.3. Il est possible que la courbe associée à un morphisme $\varphi : X \rightarrow X^{(d_1)}$ soit réductible. D'autre part, le morphisme φ est constant si et seulement si C est réunion de courbes du type $X \times \{pt.\}$.

Remarque 4.4.1.4. Soit C une courbe irréductible (peut-être singulière) de classe $[C] = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta' \neq x_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Alors on a $d_i = \deg(p_i|_C)$ et l'on obtient par Riemann-Hurwitz

$$C^2 + (2g - 2)C \cdot x = (2g - 2)d_i + r_i$$

pour $i \in \{1, 2\}$, où r_i est le degré du diviseur de ramification de $p_i|_C$. En particulier, on a

$$C^2 = r_1 - (2g - 2) = r_2 - (2g - 2)d_1$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_{C,*}X \cdot x_{(d_1)} &= d_2, \\ \varphi_{C,*}X \cdot \delta_{(d_1)} &= \frac{r_1}{2},\end{aligned}$$

où $\varphi_C : X \rightarrow X^{(d_1)}$ est le morphisme associé à C au sens du lemme 4.4.1.2.

Lemme 4.4.1.5. *Soit X une courbe de genre $g \geq 2$. Soit $d \geq 2$ et soit $\varphi : X \rightarrow X^{(d)}$ un morphisme non constant.*

1. *Si X est très générale de genre $g \geq 3$, ou bien φ est injectif, ou bien $\varphi(X)$ est contenu dans une fibre de l'application d'Abel-Jacobi $u_d : X^{(d)} \rightarrow JX$.*
2. *Si X est une courbe hyperelliptique très générale, ou bien φ est génériquement injectif, ou bien $\varphi(X)$ est contenu dans une fibre de l'application d'Abel-Jacobi $u_d : X^{(d)} \rightarrow JX$.*

Démonstration. Comme X est très générale ou hyperelliptique très générale, on a $\text{End}(JX) = \mathbb{Z}$, de sorte que l'on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X^{(d)} \\ u \downarrow & & \downarrow u_d \\ JX & \xrightarrow{m} & JX \end{array}$$

où m est un entier, pour des applications d'Abel-Jacobi bien choisies u et u_d . Si $m = 0$, la courbe $\varphi(X)$ est contenue dans une fibre de u_d . Supposons $m \neq 0$. Soient $p, q \in X$ et supposons $\varphi(p) = \varphi(q)$. Alors on a $m(u(p) - u(q)) = 0$, c'est-à-dire que $u(p) - u(q)$ est dans $JX[m]$, l'ensemble (fini) des points de m -torsion de JX . La restriction de

$$\begin{aligned}\tau : X \times X &\rightarrow JX \\ (p, q) &\mapsto u(p) - u(q)\end{aligned}$$

au complémentaire de la diagonale est à fibres finies [3, Prop. 4], de sorte que φ est génériquement injectif pour tout $g \geq 2$.

Supposons $\tau(X \times X) \cap JX[m] \neq \emptyset$, de sorte qu'il existe deux points distincts $p, q \in X$ tels que $\mathcal{O}_X(mp) = \mathcal{O}_X(mq)$. Le g_m^1 engendré par mp et mq donne lieu à un morphisme $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de degré m avec fibres mp et mq . Par Riemann-Hurwitz, on a alors

$$2g - 2 = -2m + 2(m - 1) + r,$$

où r est le degré de la ramification en dehors des fibres mp et mq . On a $r = 2g$, de sorte que

$$3g - 3 \geq 2g \Leftrightarrow g \geq 3$$

assure qu'une courbe très générale de genre $g \geq 3$ n'admet pas de tel g_m^1 et donc $\tau(X \times X) \cap (JX[m] - \{0\}) = \emptyset$. \square

Proposition 4.4.1.6. *Soit $[C] = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta' \in \mathcal{H}^+$ la classe d'une courbe irréductible C dans $X \times X$.*

1. *Lorsque X est une courbe hyperelliptique très générale, on a ou bien $[C] \in \{x_1, \Delta, 2x - \Delta\}$ ou bien $d_1 \geq 2$.*

2. Lorsque X est une courbe très générale de genre $g \geq 3$, on a ou bien $[C] \in \{x_1, \Delta\}$ ou bien $d_1 \geq 2$.
3. Si X est une courbe très générale de genre $g = 4$, on a ou bien $[C] \in \{x_1, \Delta, 3x - \Delta\}$ ou bien $d_1 \geq 3$.
4. Si X est une courbe très générale de genre $g \geq 5$ et g est un carré parfait, on a ou bien $[C] \in \{x_1, \Delta\}$ ou bien $d_1 \geq 3$.

Démonstration. Si $d_1 = 0$, il est clair que l'on a $[C] = x_1$. Si l'on a $d_1 = 1$, alors $p_1|_C$ est un isomorphisme. Si X est très générale, on a $\text{Aut}(X) = \{\text{id}\}$ et donc $[C] = \Delta$. Si X est une courbe hyperelliptique très générale, on a $\text{Aut}(X) = \{\text{id}, \iota\}$ et donc $[C] = \Delta$ ou $[C] = 2x - \Delta$. Ceci montre 1), 2) et 4).

Soit X maintenant une courbe très générale de genre $g \geq 4$, où g est un carré parfait. Supposons $d_1 = 2$. Le morphisme φ_C est non constant (cf. remarque 4.4.1.3) et $C_0 := \varphi_C(X)$ est une courbe irréductible dans $X^{(2)}$ qui n'est pas contenue dans la diagonale. Lorsque $C_0 \cdot x_{(2)} = 1$, la projection $p_2|_C : C \rightarrow X$ est de degré 1, ce qui est une contradiction. On a donc $C_0 \cdot x_{(2)} \geq 2$. Comme g est un carré parfait, on a $C_0^2 \geq 0$ par la proposition 4.3.2.1 et donc

$$\begin{aligned} 2p_a(C_0) - 2 &= C_0^2 + C \cdot K_{X^{(2)}} \\ &= C_0^2 + C_0 \cdot ((2g - 2)x_{(2)} - \delta_{(2)}) \\ &= C_0^2 + (2g - 2 - \lambda_n)(C_0 \cdot x_{(2)}) + C_0 \cdot (\lambda_n x_{(2)} - \delta_{(2)}) \\ &\geq (2g - 2 - \lambda_n)(C_0 \cdot x_{(2)}) \\ &\geq 4g - 4 - \lambda_n. \end{aligned}$$

Comme $\lambda_n = \sqrt{g} + 1$ (proposition 4.3.2.1), on en déduit

$$p_a(C_0) \geq 2g - 2 - \sqrt{g}.$$

Or X n'admet pas de g_2^1 , de sorte que le morphisme φ_C est un plongement par le lemme 4.4.1.5 et l'on a $p_g(C_0) = p_a(C_0) = g$. Cela fournit une contradiction pour $g \geq 5$, et, pour $g = 4$, on en déduit $p_a(C_0) = 4$ et $C_0^2 = 0$, d'où $[C_0] = 3x_{(2)} - \delta_{(2)}$. Par la remarque 4.4.1.4, on a alors $d_2 = 2$ et $r_1 = 12$ et donc $C^2 = 0$, ce qui implique $[C] = 2x - \Delta' = 3x - \Delta$. Cela achève la démonstration de 3). \square

Avec le lemme 4.4.1.1, on en déduit la proposition 4.1.2.1.

4.4.2 Une section affine

Dans la suite, on représentera les cônes $\text{Psef}(X \times X)$ et $\text{Nef}(X \times X)$ dans le plan affine

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \gamma \Delta \in \mathbb{N}^1(X \times X) \mid c \cdot x = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\gamma = 2\} \\ &= \{c = d_2 x_1 + d_1 x_2 + \gamma \Delta' \in \mathbb{N}^1(X \times X) \mid c \cdot x = d_2 + d_1 = 2\}, \end{aligned}$$

où le demi-espace \mathcal{H}^+ correspond au demi-espace affine

$$\mathcal{P}^+ = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \gamma \Delta \in \mathcal{P} \mid \alpha_1 \geq \alpha_2\} = \{d_2 x_1 + d_1 x_2 + \gamma \Delta' \in \mathcal{P} \mid d_2 \geq d_1\}.$$

On introduit des coordonnées (u, v) sur \mathcal{P} en posant

$$x = (0, 0) \quad , \quad \Delta = (g, 0) \quad , \quad x_1 = (0, 1).$$

Le point $(u, v) \in \mathcal{P}$ correspond alors à la classe $(1+v-\frac{u}{g})x_1 + (1-v-\frac{u}{g})x_2 + \frac{u}{g}\Delta$ (resp. $(1+v)x_1 + (1-v)x_2 + \frac{u}{g}\Delta'$). En particulier, le produit d'intersection de deux classes (u, v) et (u', v') est donné par $2(1-vv' - \frac{uu'}{g})$. Inversement, la classe $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \gamma \Delta$ correspond au point $(\frac{2g\gamma}{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\gamma}, \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\gamma})$ et une classe $d_2 x_1 + d_1 x_2 + \gamma \Delta'$ au point $(\frac{2g\gamma}{d_2 + d_1}, \frac{d_2 - d_1}{d_2 + d_1})$.

Remarque 4.4.2.1. Si X est hyperelliptique, l'involution hyperelliptique correspond à la réflexion d'axe u , de sorte que les cônes $\text{Nef}(X \times X)$ et $\text{Psef}(X \times X)$ sont symétriques par rapport aux axes u (et v).

Remarque 4.4.2.2. Dans le plan affine \mathcal{P} , le cône des classes symétriques correspond à l'intersection de $\text{Nef}(X \times X)$ avec l'axe u .

Dans \mathcal{P} , l'équation $Q_d = 0$ correspond à

$$v^2(g-1-d) - \frac{du^2}{g} + (2-2g)v + d + g - 1 = 0.$$

Cela fournit une conique, qui intersecte l'ellipse $c^2 = 0$ en $x_1 = (1, 0)$ et l'axe u en les points $(\pm\sqrt{\frac{(d+g-1)g}{d}}, 0)$. Comme l'intersection de Δ avec toute courbe irréductible de classe différente de Δ est positive, Δ est la seule classe effective à droite de $\Delta^\perp = \{(u, v) \in \mathcal{P}^+ | u = 1\}$. Les classes pseudoeffectives doivent donc être en-dessous de la droite joignant Δ et le point d'intersection $\{Q_d = 0\} \cap \Delta^\perp$.

On obtient dans \mathcal{P}^+ l'image suivante, où le cône pseudoeffectif doit être dans la région en gris foncé et les classes dans la région en gris clair sont pseudoeffectives.

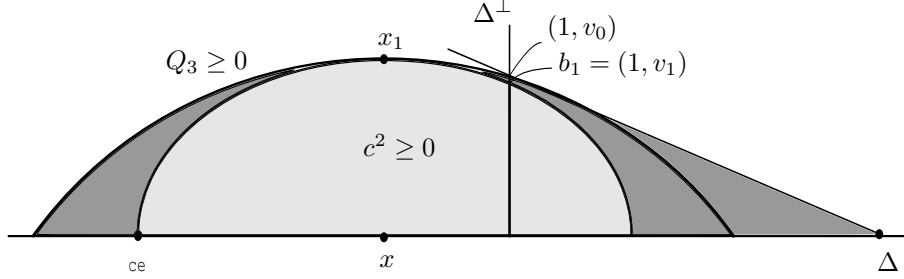


FIGURE 4.2 – Cône pseudoeffectif pour $g = 4$

4.4.3 Classes nef

Construisons maintenant des classes nef dans $X \times X$. Pour cela, on caractérise d'abord le dual

$$\mathcal{C}_d^\vee := \{c \in \mathbb{N}^1(X \times X) \mid \forall \beta \in \mathcal{C}_d, c \cdot \beta \geq 0\}.$$

Posons

$$Q_d^\vee(d'_1, d'_2, \gamma') := g\gamma'^2 - d'_1(d'_2 - \frac{1}{d}(g-1)d'_1).$$

Lemme 4.4.3.1. *On a*

$$\mathcal{C}_d^\vee = \{d'_2x_1 + d'_1x_2 + \gamma'\Delta' \in \mathbb{N}^1(X \times X) \mid Q_d^\vee(d_1, d_2, \gamma) \leq 0\}.$$

Démonstration. Soit $c = d'_2x_1 + d'_1x_2 + \gamma'\Delta' \in \mathbb{N}^1(X \times X)$. Par définition, on a $c \in \mathcal{C}_d^\vee$ si et seulement si c est d'intersection positive sur toute classe $d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta'$ satisfaisant $Q_d(d_1, d_2, \gamma) = 0$. Autrement dit, on a $c \in \mathcal{C}_d^\vee$ si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 &\leq d_2d'_1 + d'_2d_1 - 2g\gamma\gamma' \\ &= \frac{g\gamma^2 - \frac{1}{d}(g-1)d_1^2}{d_1}d'_1 + d'_2d_1 - 2g\gamma\gamma' \end{aligned}$$

pour tout d_2, d_1 et γ , ce qui est équivalent à

$$0 \leq g\gamma^2d'_1 + (d'_2 - \frac{1}{d}(g-1)d_1^2) - 2g\gamma\gamma'd_1$$

pour tout d_1 et γ . C'est le cas si et seulement le discriminant est négatif, i.e. si et seulement si

$$0 \geq g\gamma'^2 - d'_1(d'_2 - \frac{1}{d}(g-1)d'_1).$$

□

Lemme 4.4.3.2. *Soit $c \in N^1(X \times X)$. On a $c \in \text{Nef}^+(X \times X)$ si et seulement si $c \cdot \beta \geq 0$ pour tout $\beta \in \text{Psef}^+(X \times X)$.*

Démonstration. Il faut montrer que $c \cdot \beta \geq 0$ pour tout $\beta \in \text{Psef}^+(X \times X)$ implique que c est nef. Ecrivons $c = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta'$ et supposons que c n'est pas nef. Alors il existe une classe pseudoeffective $\beta = d'_2x_1 + d'_1x_2 + \gamma'\Delta'$ avec $d'_1 > d'_2$ telle que $c \cdot \beta > 0$. On a $\sigma^*\beta \in \text{Psef}(X \times X) \cap \mathcal{H}^+$ et

$$c \cdot \sigma^*\beta \leq c \cdot \beta \Leftrightarrow (d_2 - d_1)(d'_2 - d'_1) \leq 0,$$

ce qui est vrai par les hypothèses sur c et β , de sorte que l'on obtient une contradiction. □

La proposition suivante découle alors tout de suite des lemmes 4.4.3.1 et 4.4.3.2, et la proposition 4.1.2.1.

Proposition 4.4.3.3. *Supposons qu'il existe des classes effectives $c_1, \dots, c_k \in \mathcal{H}^+$ d'autointersection négative et un entier positif d tel que $\text{Psef}^+(X \times X)$ est contenu dans l'enveloppe convexe de \mathcal{C}_d et $\{c_1, \dots, c_k\}$. Alors les classes $c = d'_2x_1 + d'_1x_2 + \gamma'\Delta' \in \mathcal{H}^+$ satisfaisant*

$$Q_d^\vee(d'_1, d'_2, \gamma') \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad c \cdot c_i \geq 0$$

sont nef.

Corollaire 4.4.3.4. *Soit X une courbe de genre $g \geq 2$ et soit $c = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta' \in N^1(X \times X)$.*

1. *Si X est hyperelliptique très générale, c est nef si l'on a $Q_2(d_1, d_2, \gamma)^\vee \leq 0$ et $c \cdot \Delta \geq 0, c \cdot (2x - \Delta) \geq 0$.*
2. *Si X est très générale de genre 3, c est nef si l'on a $Q_2(d_1, d_2, \gamma)^\vee \leq 0$ et $c \cdot \Delta \geq 0$ et $c \cdot (\frac{8}{3}x - \Delta) \geq 0$.*
3. *Si X est très générale de genre $g \geq 5$, c est nef si l'on a $Q_2(d_1, d_2, \gamma)^\vee \leq 0$ et $c \cdot \Delta \geq 0$.*
4. *Si X est très générale de genre $g \geq 4$ avec g un carré parfait, c est nef si l'on a $Q_2(d_1, d_2, \gamma)^\vee \leq 0$ et $c \cdot \Delta \geq 0$.*

4.4.4 Représentation des classes nef dans la section affine

Représentons maintenant les classes nef qu'on obtient dans \mathcal{P} grâce au corollaire 4.4.3.4 et la proposition 4.3.2.1. On commence avec deux remarques générales et ensuite on donne des représentations selon le genre de X et selon que X est hyperelliptique ou pas.

Remarque 4.4.4.1. L'inéquation $Q_d^\vee(d_1, d_2, \gamma) \leq 0$ fournit (pour tout g) une ellipse définie par

$$0 \geq \frac{u^2}{g} - (1-v)(1+v - \frac{1}{d}(g-1)(1-v)), \quad (4.4)$$

dont la forme normale est donnée par

$$\frac{d+g-1}{dg}u^2 + \frac{(d+g-1)^2}{d^2} \left(v - \frac{g-1}{d+g-1} \right)^2 = 1.$$

Le centre de cet ellipse est donc le point $(0, \frac{g-1}{d+g-1}) \in \mathcal{P}^+$ et les sommets sont $(0, \frac{g-1}{d+g-1} \pm \frac{d}{d+g-1})$ et $(\pm \sqrt{\frac{dg}{d+g-1}}, \frac{g-1}{d+g-1})$ (en particulier, un des sommets est $x_1 = (1, 0)$).

Remarque 4.4.4.2. Supposons que, dans \mathcal{H}^+ , les classes des courbes irréductibles sont contenues dans \mathcal{C}_d sauf certaines classes c_1, \dots, c_k d'autointersection négative avec $c_1 := \Delta$. Fixons une classe c_i et notons b_i le point d'intersection de c_i^\perp avec la droite passant par c_i et tangente à \mathcal{C}_d^\vee dans \mathcal{P}^+ . Alors il existe une classe $a_i \in \text{Nef}^+(X \times X)$ telle que b_i est proportionnelle à la classe $a_i + c_i$. Comme l'intersection de c_i avec toute courbe de classe différente de c_i est positive, et comme $b_i \cdot c_i \geq 0$, la classe b_i est nef (cf. figure ci-dessous).

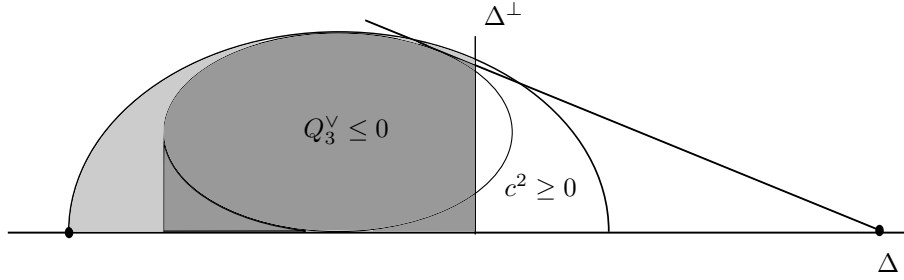


FIGURE 4.3 – Cône nef pour $g = 4$

En écrivant $b_1 = (1, v_1)$ et $\{c^2 = 0\} \cap \Delta^\perp = (1, v_0)$, on obtient par le corollaire 4.4.3.4 les valeurs suivantes pour v_0 et v_1 ² :

Courbes hyperelliptiques très générales. Soit X une courbe hyperelliptique très générale de genre g . Par le corollaire 4.4.3.4, une classe $c = d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta'$ est donc nef si elle satisfait $Q_2^\vee(d_1, d_2, \gamma) \leq 0$ et si l'intersection avec $c_1 := \Delta$ et avec $c_2 := 2x - \Delta$ est positive. De plus, les classes b_1 et b_2 au sens de la remarque 4.4.4.2 sont nef, de sorte que l'on obtient l'image ci-dessous (figure 4.4).

Remarque 4.4.4.3. On vérifie facilement que l'on a $v_1 \rightarrow v_0$ pour $g \rightarrow \infty$ pour $d \geq 1$ fixé, de sorte que le résultat est asymptotiquement optimal pour les courbes hyperelliptiques très générales.

Remarque 4.4.4.4. Une classe nef sur une courbe hyperelliptique reste nef sur une courbe très générale : soit X_0 une courbe hyperelliptique de genre g et supposons que la classe $d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta$ est nef sur $X_0 \times X_0$. Soit $\mathcal{X} \rightarrow B$ une famille de courbes lisses (de genre g) de fibre spéciale X_0 et notons X_b la fibre au-dessus de $b \in B$. Si l'on note \mathcal{L} un fibré sur $\mathcal{X} \times_B \mathcal{X}$ tel que $\mathcal{L}_b := \mathcal{L}|_{X_b \times X_b}$ soit de classe

2. Pour calculer le point b_1 , on remarque d'abord que la tangente au point (u_0, v_0) est donnée par l'équation

$$\frac{d+g-1}{dg}uu_0 + \frac{(d+g-1)^2}{d^2} \left(v - \frac{g-1}{d+g-1} \right) \left(v_0 - \frac{g-1}{d+g-1} \right) = 1,$$

d'où l'on déduit que la tangente à l'ellipse contenant $\Delta = (g, 0)$ doit satisfaire

$$\frac{d+g-1}{d}u_0 - \frac{(d+g-1)(g-1)}{d^2} \left(v_0 - \frac{g-1}{d+g-1} \right) = 1.$$

Le point (u_0, v_0) étant sur la tangente fournit alors

$$\left(\frac{d+g-1}{d}u_0 - 1 \right)^2 = \frac{(g-1)^2}{d^2} \left(1 - \frac{d+g-1}{dg}u_0^2 \right).$$

En résolvant, on obtient les valeurs dans la table 4.1.

TABLE 4.1 –

g	d	v_1	v_0
2	2	$\frac{4+\sqrt{3}}{-2+3\sqrt{3}} \approx 0.6830$	$\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7071$
3	2	$\frac{4}{5} = 0.8$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.8165$
4	3	$\frac{6}{7} \approx 0.8571$	$\sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0.8660$
5	2	$\frac{4}{5} \frac{5+2\sqrt{30}}{-2+3\sqrt{30}} \approx 0.8844$	$\sqrt{\frac{4}{5}} \approx 0.8944$
10	2	$\frac{3}{10} \frac{20+27\sqrt{15}}{-3+11\sqrt{15}} \approx 0.943$	$\sqrt{\frac{5}{6}} \approx 0.9487$
100	3	$\frac{99}{5} \frac{5+33\sqrt{33}}{-33+680\sqrt{33}} \approx 0.9946$	$\sqrt{\frac{6}{7}} \approx 0.9950$

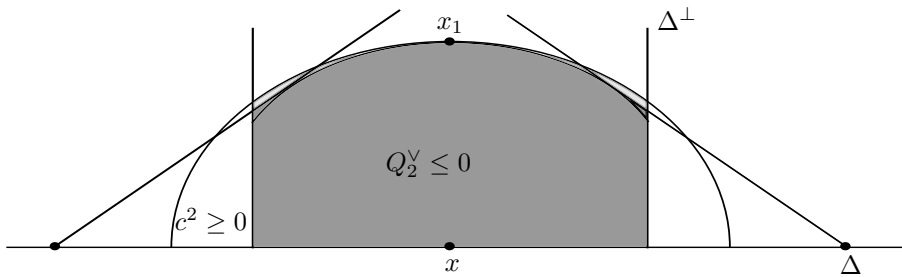


FIGURE 4.4 – Cône nef pour $g = 2$

$d_2x_1 + d_1x_2 + \gamma\Delta$ pour tout $b \in B$, alors \mathcal{L}_b est nef pour $b \in B$ très général (cf. [42, Prop. 1.4.14]).

Courbes de genre 3 très générales. Soit X une courbe très générale de genre 3. On obtient des classes nef comme suit :

1. Par la remarque 4.4.4.4, les classes nef pour une courbe hyperelliptique (très générale) de genre 3 sont aussi nef pour une courbe très générale.
2. Par le corollaire 4.4.3.4, les classes dont l'intersection avec $c_1 := \Delta$ et $c_2 := \frac{8}{3}x - \Delta$ est positive, et pour lesquelles $Q_2^v(d_1, d_2, \gamma) \leq 0$, sont nef.
3. Les classes $b_1 = (1, \frac{4}{5})$ et $b_2 = (-\frac{5}{3}, \frac{4}{29})$ sont nef (cf. remarque 4.4.4.2).

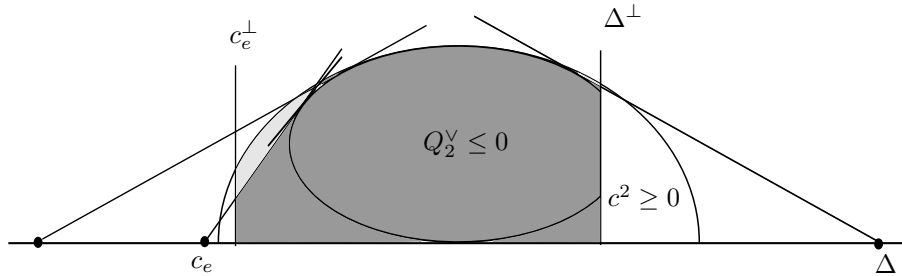


FIGURE 4.5 – Cône nef pour $g = 3$

Courbes de genre $g = r^2$ très générales. Soit X une courbe très générale de genre $g = r^2$, un carré parfait. On obtient des classes nefes comme suit :

1. Par la remarque 4.4.4.4, les classes nefes pour une courbe hyperelliptique très générale de genre g sont aussi nefes pour une courbe très générale.
2. Par le corollaire 4.4.3.4, les classes dont l'intersection avec $c_1 := \Delta$ est positive, et pour lesquelles $Q_3^\vee(d_1, d_2, \gamma) \leq 0$, sont nefes.
3. La classe $\lambda_n = (\sqrt{g} + 1)x - \Delta$ est nef.
4. La classe b_1 est nef.

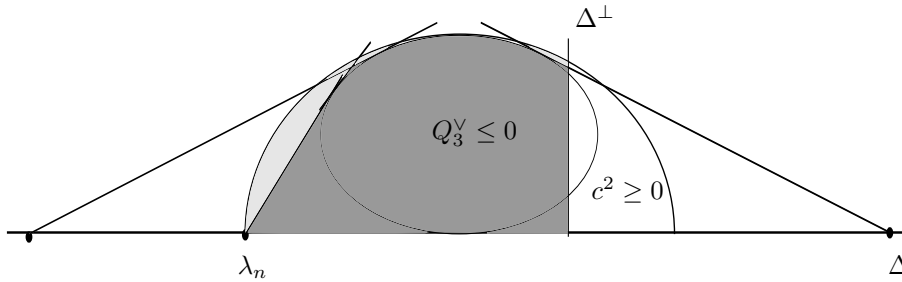


FIGURE 4.6 – Cône nef pour $g = 4$

Courbes de genre ≥ 5 très générales. Soit X une courbe très générale de genre g et supposons que g n'est pas un carré parfait. On obtient des classes nefes comme suit :

1. Par la remarque 4.4.4.4, les classes nefes pour une courbe hyperelliptique très générale de genre g sont aussi nefes pour une courbe très générale.
2. Par le corollaire 4.4.3.4, les classes dont l'intersection avec $c_1 := \Delta$ est positive, et pour lesquelles $Q_2^\vee(d_1, d_2, \gamma) \leq 0$.
3. Pour $g \geq 5$, λ_n n'est pas connu, mais on a des bornes supérieures sur λ_n (cf. proposition 4.3.2.1).
4. La classe b_1 est nef.

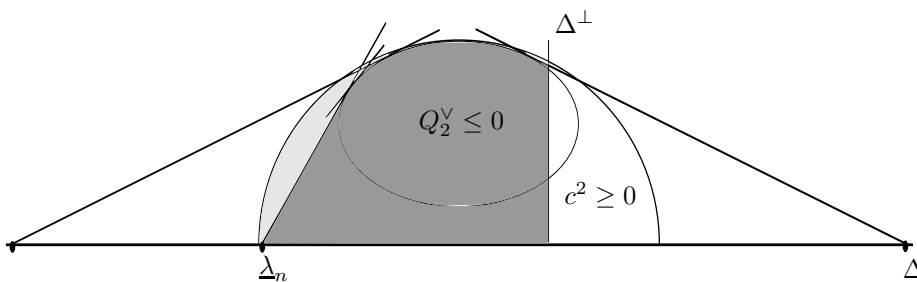


FIGURE 4.7 – Cône nef pour $g = 5$

5. Bibliographie

- [1] S. Abeasis. The $GL(V)$ -invariant ideals in $S(S^2(V))$. *Rend. Mat.*, (6) 13 :235–262, 1980.
- [2] E. Amerik. A computation of invariants of a rational self-map. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, pages 481–493, 2009.
- [3] M. Baker and B. Poonen. Torsion packets on curves. *Compos. Math.*, 127(1) :109–116, 2001.
- [4] W. Barth and A. Van de Ven. Fano-varieties of lines on hypersurfaces. *Arch. Math.*, 31(1) :96–104, 1978.
- [5] A. Barvinok. *A course in convexity*. Grad. Stud. Math. American Mathematical Society, 2000.
- [6] F. Bastianelli. Remarks on the nef cone on symmetric products of curves. *Manuscr. math.*, 130(1) :113–120, 2009.
- [7] T. Bauer. On the cone of curves of abelian varieties. *Amer. J. Math.*, 120 :997–1006, 1998.
- [8] A. Beauville. Variétés de Prym et jacobiniennes intermédiaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 10(3) :309–391, 1977.
- [9] A. Beauville. Some remarks on Kähler manifolds with $c_1 = 0$. *Classification of algebraic and analytic manifolds*, 1982.
- [10] A. Beauville. Variétés kählériennes dont la première classe de Chern est nulle. *J. Differential Geom.*, 18(4) :755–782, 1983.
- [11] A. Beauville and R. Donagi. La variété des droites d’une hypersurface cubique de dimension 4. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math*, 301(14) :703–706, 1985.
- [12] S. Boissiere, M. Nieper-Wisskirchen, and A. Sarti. Smith theory and irreducible holomorphic symplectic manifolds. *Arxiv :1204.4118*.
- [13] S. Boucksom. Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, 37(1) :45–76, 2004.
- [14] S. Boucksom, J.P. Demailly, M. Paun, and T. Peternell. The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension. *Arxiv : 0405285*.
- [15] C.H. Clemens and P.A. Griffiths. The intermediate Jacobian of the cubic threefold. *Ann. of Math.*, 95(2) :281–356, 1972.
- [16] O. Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry. Universitext*, volume 4. Springer, 2001.
- [17] O. Debarre, L. Ein, R. Lazarsfeld, and C. Voisin. Pseudoeffective and nef classes on abelian varieties. *Compos. Math*, 147(6) :1793–1818, 2011.
- [18] J. E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths et Harris. *Geometry of algebraic curves*, volume 267 of *Grundlehren Math. Wiss.* Springer, 1985.

- [19] M. Ramana et M.J. Goldman. Some geometric results in semidefinite programming. *Global Optim.*, 7 (1) :33–50, 1995.
- [20] A. Fujiki and S. Nakano. Supplement to "On the inverse of monoidal transformation". *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 7 :637–644, 1971.
- [21] M. Fulger. The cones of effective cycles on projective bundles over curves. *Mathematische Zeitschrift*, 269(1) :449–459, 2011.
- [22] W. Fulton, P. Pragacz, and W. Fulton. *Schubert varieties and degeneracy loci*. Springer, 1998.
- [23] D. Guan. On the Betti numbers of irreducible compact hyperkahler manifolds of complex dimension four. *Math. Res. Lett.*, 8(5/6) :663–670, 2001.
- [24] R. Harvey. Holomorphic chains and boundaries. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 30, part 1 :1975.
- [25] B. Hassett. Special cubic fourfolds. *Ph.D. Thesis*, 1998.
- [26] B. Hassett and Y. Tschinkel. Hodge theory and lagrangian planes on generalized Kummer fourfolds. *Arxiv : 1004.0046*.
- [27] B. Hassett and Y. Tschinkel. Rational curves on holomorphic symplectic fourfolds. *Geom. Funct. Anal.*, 11(6) :1201–1228, 2001.
- [28] B. Hassett and Y. Tschinkel. Moving and ample cones of holomorphic symplectic fourfolds. *Geom. Funct. Anal.*, 19(4) :1065–1080, 2009.
- [29] B. Hassett and Y. Tschinkel. Flops on holomorphic symplectic fourfolds and determinantal cubic hypersurfaces. *J. Inst. Math. Jussieu*, 9(1) :125–153, 2010.
- [30] F. Hazama. Algebraic cycles on certain abelian varieties and powers of special surfaces. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math*, 31 :2487–520, 1985.
- [31] R. Howe. Remarks on classical invariant theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 313(2) :239–570, 1989.
- [32] D. Huybrechts. Compact hyperkähler manifolds : basic results. *Invent. Math.*, 135(1) :63–113, 1999.
- [33] A. Iliev and L. Manivel. Cubic hypersurfaces and integrable systems. *Arxiv : 0605260*.
- [34] Z. Jiang. Sur l'application d'Albanese des variétés projectives et le cône nef des produits symétriques de courbes. *Thèse*, 2010.
- [35] R. Harvey, Q.W. Knapp. Positive (p,p) forms, Wirtinger's inequality, and currents. In *Value-distribution theory, Part A*, pages 43–62, 1974.
- [36] J. Kollár. *Complex Algebraic Geometry*. AMS, 1997.
- [37] J. Kollár and S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, volume 134. Cambridge Univ Pr, 2008.
- [38] A. Kouvidakis. Divisors on symmetric products of curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 337 :117–128, 1993.
- [39] A. Kuznetsov. Derived categories of cubic fourfolds. In F. Bogomolov and Y. Tschinkel, editors, *Cohomological and geometric approaches to rationality problems*, number 282, pages 219–243. Birkhäuser, 2010.
- [40] C. Birkenhake, H. Lange. *Complex Abelian Varieties*, volume 302 of *Grundlehren Math. Wiss.* Springer, 2003.
- [41] B. Lawson. The stable homology of a flat torus. *Math. Scand.*, 36 :49–73, 1975.
- [42] R. Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry*, volume 1. Springer Verlag, 2004.
- [43] E. Looijenga and C. Peters. Torelli theorems for Kähler K3 surfaces. *Compos. Math.*, 42(2) :145–186, 1980.

- [44] E. Markman. Prime exceptional divisors on holomorphic symplectic varieties and monodromy-reflections. *Arxiv :0912.4981*.
- [45] E. Markman. A survey of Torelli and monodromy results for holomorphic-symplectic varieties. *Complex and Differential Geometry*, pages 257–322, 2011.
- [46] J.S. Milne. Jacobian varieties. In G. Cornell, J.H. Silverman, and M. Artin, editors, *Arithmetic Geometry*. Springer Verlag, 1986.
- [47] J.W. Milnor and D. Husemoller. *Symmetric bilinear forms*. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [48] S. Mukai. Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or $K3$ surface. *Invent. Math.*, 77(1) :101–116, 1984.
- [49] D. Mumford, J. Fogarty, and F.C. Kirwan. *Geometric invariant theory*, volume 34 of *Ergeb. Math. Grenzgeb.* Springer, 1994.
- [50] Y.A. Mustopa. The effective cone on symmetric powers on curves. *Ph.D. Thesis*, 2008.
- [51] S. Nakano. On the inverse of monoidal transformation. *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 6 :483–502.
- [52] V.V. Nikulin. Integral symmetric bilinear forms and some of their applications. *Izv. Math.*, 43(1) :111–177, 1979.
- [53] K.G. O’Grady. Irreducible symplectic 4-folds numerically equivalent to $(K3)^{[2]}$. *Arxiv : 0504434*.
- [54] A. Prendergast-Smith. The cone conjecture for abelian varieties. *Arxiv :1008.4509v1*.
- [55] B. Reznick. Homogeneous polynomial solutions to constant coefficient PDE’s. *Adv. Math.*, 117 :179–192.
- [56] K. Ribet. Hodge classes on certain types of abelian varieties. *Amer. J. Math.*, 105 :523–538.
- [57] J. Rosoff. The monoid of effective divisor classes on a complex torus. *Algebraic Geometry*, pages 208–231, 1981.
- [58] J. Ross. Seshadri constants on symmetric products of curves. *Math. Res. Lett*, 14(1) :63–75, 2007.
- [59] U. Schlickewei. Hodge classes on self-products of $K3$ surfaces. *Ph.D. Thesis*, 2009.
- [60] T. Tambour. A note on some representations of $SL(V)$. *Indag. Math.*, 6 (4) :505–509, 1995.
- [61] S. G. Tankeev. Cycles on simple abelian varieties of prime dimension (in russian). *Izv. Akad. Nauk USSR Ser. Mat.*, 46 :155 – 170.
- [62] G. Thompson. Skew invariant theory of symplectic groups, pluri-Hodge groups and 3-manifold invariants. *Int. Math. Res. Not.*, 10.1093/imrn/rnm048, 2007.
- [63] C. Voisin. Théorème de Torelli pour les cubiques de \mathbb{P}^5 . *Invent. Math.*, 86(3) :577–601, 1986.
- [64] C. Voisin. Sur la stabilité des sous-variétés lagrangiennes des variétés symplectiques holomorphes. *Complex projective geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989)*, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 179 :294–303, 1992.
- [65] C. Voisin. Intrinsic pseudo-volume forms and K-correspondences. In *The Fano Conference*, pages 761–792, 2004.
- [66] C. Voisin. Some aspects of the Hodge conjecture. *Japanese Journal of Mathematics*, 2(2) :261–296, 2007.

- [67] C. Voisin. Coniveau 2 complete intersections and effective cones. *Geom. Funct. Anal.*, 19(5) :1494–1513, 2010.
- [68] P. Vojta. Mordell’s conjecture over function fields. *Invent. math.*, 98(1) :115–138, 1998.
- [69] J. Wierzba. Contractions of symplectic varieties. *Arxiv : 9910130*.
- [70] J. Wierzba. Contractions of symplectic varieties. *J. Algebraic Geom.*, 12(3) :507–534, 2003.
- [71] J. Wierzba and J.A. Wisniewski. Small contractions of symplectic 4-folds. *Duke Math. J.*, 120(1) :65–96, 2003.
- [72] Y. Zarhin. Hodge groups of $K3$ surfaces. *J. Reine Angew. Math.*, 341 :193–220, 1983.
- [73] Y. Zarhin. Hyperelliptic Jacobians without complex multiplication. *Math. Res. Lett.*, 7(1) :123–132, 2000.