

Sur la topologie des
variétés algébriques complexes

Olivier DEBARRE

Grenoble, le 26 octobre 2006

Étant donné un polynôme $f \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_r]$, nous nous intéressons à la topologie de son « lieu des zéros »

$$Z(f) = \{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbf{C}^r \mid f(x_1, \dots, x_r) = 0\}$$

(cadre *affine*). On peut aussi homogénéiser f en $F \in \mathbf{C}[X_0, X_1, \dots, X_r]$ et on considère le lieu (compact)

$$V(F) = \{(x_0 : \dots : x_r) \in \mathbf{P}^r \mid F(x_0, \dots, x_r) = 0\}$$

(cadre *projectif*), de sorte que $Z(f)$ est le complémentaire dans $V(F)$ de la *section hyperplane* $V(F) \cap (x_0 = 0)$.

Lorsqu'ils sont *lisses* (c'est-à-dire que l'équation et ses dérivées partielles n'ont pas de zéro commun), ces lieux sont des variétés complexes.

On peut aussi permettre plusieurs équations et considérer $Z(f_1, \dots, f_s)$ ou $V(F_1, \dots, F_s)$. On parle alors de variétés (algébriques) *affines* ou *projectives*. La variété est *lisse de codimension (complexe) d* si la matrice des dérivées partielles des équations qui la définissent est de rang d en tout point de la variété.

Exemple. L'ensemble des matrices (complexes) à m lignes et n colonnes, de rang $\leq r$, est une sous-variété de \mathbf{P}^{mn-1} de codimension $(m-r)(n-r)$ qui n'est lisse que pour $r = 1$.

Toute variété projective lisse de dimension n peut être plongée dans \mathbf{P}^{2n+1} . Pouvoir être plongé dans un projectif plus petit impose des contraintes topologiques. Plus précisément, nous allons discuter le

Principe. La topologie d'une sous-variété de petite codimension dans l'espace projectif ressemble à celle de l'espace projectif.

Variétés affines

Théorie de Morse. Soit M une variété différentiable réelle. Une fonction de Morse est une fonction $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que la forme quadratique d^2f soit non-dégénérée en chaque point critique de f . Sa signature est (r_+, r_-) et r_- est l'*indice* du point critique. La variété M a alors le type d'homotopie d'un CW complexe avec une cellule de dimension r_- pour chaque point critique.

Théorème (Andreotti–Frankel). *Une sous-variété lisse connexe V de \mathbf{C}^r , de dimension complexe n , a le type d'homotopie d'un CW complexe fini de dimension réelle $\leq n$. En particulier*

$$H_i(V; \mathbf{Z}) = H^i(V; \mathbf{Z}) = 0 \quad \text{pour } i > n. \quad (1)$$

La propriété (1) reste vraie même si V n'est pas lisse (Grothendieck).

En tant que variété réelle de dimension réelle $2n$, on sait que V a le type d'homotopie d'un CW complexe de dimension $\leq 2n$. Le théorème dit qu'il n'y a en fait que la moitié de la topologie qu'on aurait pu attendre.

Démonstration. Les points critiques de la fonction de Morse f donnée par le carré de la distance à un point général p sont tous d'indice $\leq n$.

On peut voir cela dans le cas où V est donnée, dans des coordonnées locales d'origine le point critique, par

$$V = \{(\mathbf{z}, z_{n+1}) \mid \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n), z_{n+1} = g(\mathbf{z})\}$$

où g est analytique, nulle au deuxième ordre à l'origine, et $p = (0, \dots, 0, 1)$. On a

$$f(\mathbf{z}, g(\mathbf{z})) = |\mathbf{z}|^2 + |g(\mathbf{z}) - 1|^2 \quad d^2 f(\mathbf{0}) = \text{Id} - 2 \text{Re } g_2(\mathbf{z})$$

et on vérifie que la forme quadratique réelle $\text{Re } g_2(\mathbf{z})$ a $r_+ = r_-$. \square

Exemple. Lorsque $r = 2$, les « courbes algébriques planes », lorsqu'elles sont lisses, sont des *surfaces de Riemann*. Une courbe affine $C \subset \mathbf{C}^2$ est une surface de Riemann *non compacte* et en effet $H^2(C; \mathbf{Z}) \simeq H_c^0(C, \mathbf{Z})^\vee = 0$.

Variétés projectives

Une fonction de Morse bien choisie du type

$$(x_0 : \dots : x_r) \longmapsto \frac{c_0|x_0|^2 + \dots + c_r|x_r|^2}{|x_0|^2 + \dots + |x_r|^2}$$

permet de calculer la cohomologie de l'espace projectif :

$$H^i(\mathbf{P}^r; \mathbf{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{si } i \text{ est pair et dans } [0, 2r]; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On compare maintenant la cohomologie d'une hypersurface projective à celle de l'espace ambiant.

Théorème (Lefschetz). *Si $V \subset \mathbf{P}^r$ est une hypersurface, on a*

$$H^i(\mathbf{P}^r; \mathbf{Z}) \simeq H^i(V; \mathbf{Z}) \quad \text{pour } i \leq r - 2.$$

Démonstration. Comme $\mathbf{P}^r - V$ est lisse, on a

$$H^i(\mathbf{P}^r, V; \mathbf{Z}) \simeq H_{2r-i}(\mathbf{P}^r - V; \mathbf{Z}) \quad (2)$$

par dualité de Lefschetz. Mais $\mathbf{P}^r - V$ est affine : c'est le complémentaire d'une section hyperplane de l'image du plongement de Veronese $\mathbf{P}^r \hookrightarrow \mathbf{P}^{N-1}$, où d est le degré de V et $N = \binom{r+d}{d}$. Dit autrement, on a un plongement

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^r - V &\longrightarrow \mathbf{C}^{N-1} \\ (x_0 : \dots : x_r) &\longmapsto \left(\frac{F_2(x)}{F(x)}, \dots, \frac{F_N(x)}{F(x)} \right) \end{aligned}$$

où F est une équation de V et (F, F_2, \dots, F_N) une base de l'espace vectoriel des polynômes homogènes en $r + 1$ variables de degré d .

Les groupes de (2) sont donc nuls pour $2r - i > r$ par le théorème d'Andreotti–Frankel. \square

Exemple. Le produit $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$ se plonge *a priori* dans \mathbf{P}^7 . On peut le plonger dans \mathbf{P}^5 par l'application de Segre

$$((u_0 : u_1), (v_0 : v_1 : v_2)) \longmapsto (u_0v_0 : u_0v_1 : u_0v_2 : u_1v_0 : u_1v_1 : u_1v_2)$$

dont l'image est la variété projective définie par

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \leq 1$$

mais $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$ n'est pas isomorphe à une sous-variété lisse de \mathbf{P}^4 puisque

$$H^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^2$$

Généralisations. 1) (Lefschetz) On a aussi

$$\pi_i(V) \simeq \pi_i(\mathbf{P}^r) \quad \text{pour } i \leq r - 2.$$

Démonstration. On plonge comme ci-dessus \mathbf{P}^r dans un grand espace projectif \mathbf{P}^{N-1} et on considère la fonction sur $f : \mathbf{P}^r \rightarrow \mathbf{R}$ donnée sur $\mathbf{P}^r - V \subset \mathbf{C}^{N-1}$ par l'inverse du carré de la distance à un point général de \mathbf{C}^{N-1} et sur V par 0. Ses points critiques hors de V sont les mêmes que ceux de la fonction distance au carré utilisée avant, mais les signes sont inversés : ils sont donc tous d'indice $\geq r$, de sorte que \mathbf{P}^r est obtenu en attachant des cellules de dimension $\geq r$ à $\mathbf{P}_\varepsilon^r = f^{-1}([0, \varepsilon])$. En particulier, la restriction

$$\pi_i(\mathbf{P}^r, V) \rightarrow \pi_i(\mathbf{P}_\varepsilon^r, V)$$

est *bijective* pour $i \leq r - 1$. Comme V est par ailleurs un rétracte par déformation de \mathbf{P}_ε^r , le groupe de droite est nul. \square

2) (Barth–Larsen) Pour toute sous-variété lisse V de \mathbf{P}^r , on a

$$\pi_i(V) \simeq \pi_i(\mathbf{P}^r) \quad \text{pour } i \leq r - 2 \text{ codim}(V).$$

En particulier, toute sous-variété lisse (irréductible suffit) de \mathbf{P}^r de codimension $< r/2$ est simplement connexe.

3) (Sommese) Pour une sous-variété V de \mathbf{P}^r définie (ensemblément) par e équations

$$H^i(\mathbf{P}^r; \mathbf{Z}) \simeq H^i(V; \mathbf{Z}) \quad \text{pour } i \leq r - e - 1.$$

Exemple. L'image du plongement de Segre $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2 \subset \mathbf{P}^5$, définie par

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \leq 1$$

ne peut être définie par deux équations, puisque

$$H^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^2$$

Nous allons expliquer maintenant comment démontrer ces deux résultats.

Sous-variétés de fibrés vectoriels positifs

Nous allons démontrer le résultat de Sommese mentionné ci-dessus.

Fibrés vectoriels sur l'espace projectif. À un point de \mathbf{P}^r est associée une droite de \mathbf{C}^{r+1} . On a ainsi un fibré en droites naturel que l'on note $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(-1)$; c'est un sous-fibré du fibré trivial $\mathbf{C}^{r+1} \times \mathbf{P}^r$. Ses sections globales holomorphes sont nulles. En revanche, toute forme linéaire sur \mathbf{C}^{r+1} définit une section holomorphe du fibré dual $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(1)$. De même, tout polynôme homogène de degré d en $r+1$ variables définit une section holomorphe du fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(d) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(1)^{\otimes d}$ (il ne définit bien sûr pas une *fonction* holomorphe sur \mathbf{P}^r : elles sont toutes constantes).

Lieu des zéros d'une section d'un fibré positif. Si $V \subset \mathbf{P}^r$ est défini par l'annulation de e polynômes homogènes de degré d_1, \dots, d_e , c'est le lieu des zéros d'une section du fibré vectoriel $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(d_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(d_e)$ de rang e . Ce fibré est :

- positif au sens de Griffiths (muni d'une métrique à courbure sectionnelle > 0);
- donc ample (au sens de la géométrie algébrique).

On a un résultat général qui compare la topologie du lieu des zéros d'une section d'un fibré « positif » à celle de l'espace ambiant.

Théorème. *Soit V le lieu des zéros d'une section d'un fibré vectoriel E de rang e , positif au sens de Griffiths, sur une variété lisse connexe X de dimension r . On a*

$$\pi_i(V) \simeq \pi_i(X) \quad \text{pour } i \leq r - e - 1.$$

Si $e \leq r$, toute section doit s'annuler quelque part. Si $e < r$, le lieu des zéros est connexe.

Le résultat de Sommese s'en déduit.

Démonstration. On utilise encore une fonction de Morse. Si s est la section et h une métrique sur E à courbure sectionnelle > 0 , on montre que les points critiques dans $X - V$ de la fonction $f : x \mapsto \|s(x)\|_h^2$ sont d'indice $\geq r - e + 1$.

On conclut comme dans le théorème de Lefschetz : X est obtenu en attachant des cellules de dimension $\geq r - e + 1$ à $f^{-1}([0, \varepsilon])$, et $\pi_i(X, V) = 0$ pour $i \leq r - e$. \square

Si E n'est que ample, on a un énoncé analogue :

$$H^i(X; \mathbf{Z}) \simeq H^i(V; \mathbf{Z}) \quad \text{pour } i \leq r - e - 1.$$

Démonstration. Puisque $X - V$ est lisse, il suffit, par dualité de Lefschetz, de prouver $H_i(X - V; \mathbf{Z}) = 0$ pour $i \geq r + e$. On construit, dans le fibré projectif $\mathbf{P}(E)$ des hyperplans des fibres de E , une hypersurface V^* dont le complémentaire est affine et telle que $\mathbf{P}(E) - V^* \rightarrow X - V$ soit un fibré en \mathbf{C}^{e-1} . Il suffit alors d'appliquer le théorème d'Andreotti–Frankel à la variété affine $\mathbf{P}(E) - V^*$. \square

Sous-variétés d'un fibré vectoriel positif

Premier exemple. Une sous-variété $V \subset \mathbf{P}^r$ de dimension n est une sous-variété d'un fibré vectoriel « positif » sur \mathbf{P}^n : un sous-espace linéaire général Λ de \mathbf{P}^r de dimension $r - n - 1$ ne rencontre pas V , on peut projeter depuis Λ :

$$\begin{array}{ccc} V & \hookrightarrow & \mathbf{P}^r - \Lambda \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbf{P}^n \end{array}$$

et $\mathbf{P}^r - \Lambda$ est l'espace total du fibré vectoriel $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{\oplus(r-n)}$ sur \mathbf{P}^n , qui est positif au sens de Griffiths.

Une sous-variété (de petite codimension) de l'espace projectif est donc aussi une sous-variété d'un fibré vectoriel positif (de petit rang) sur un espace projectif.

Second exemple. Lazarsfeld a montré que, si $f : V \rightarrow \mathbf{P}^n$ est un revêtement (ramifié) de degré d , la variété V est une sous-variété d'un fibré

vectoriel E_f de rang $d - 1$ qui, si V est lisse connexe, est positif au sens de Griffiths. (c'est un quotient d'une somme directe $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{\oplus N}$).

Dans les deux cas, le théorème suivant impose des restrictions sur la cohomologie de V (pour le premier exemple, on retrouve le théorème de Barth–Larsen en cohomologie).

Théorème. *Soit X une variété projective lisse connexe de dimension n , soit E un fibré ample de rang e sur X , et soit V une sous-variété projective lisse de E de dimension n . On a*

$$H^i(X; \mathbf{Z}) \simeq H^i(V; \mathbf{Z}) \quad \text{pour } i \leq n - e.$$

L'énoncé analogue sur les groupes d'homotopie n'est pas connu. Lorsque X et V sont *simplement connexes*, il résulte du théorème de Whitehead. C'est le cas lorsque $X = \mathbf{P}^n$ et que V est un revêtement de degré $d \leq n$.

Peut-on remplacer l'espace projectif par autre chose ?

Pour les sous-variétés, des analogues du théorème de Barth–Larsen ont été montrés lorsqu'on remplace l'espace projectif par un espace homogène rationnel (Sommese, Okonek) ou une variété abélienne (Sommese, Debarre) X . On obtient des résultats du type

$$\pi_i(V) \simeq \pi_i(X) \quad \text{pour } i \leq \dim(X) - 2 \operatorname{codim}(V) - \lambda,$$

où λ est un *défaut* explicite qui soit dépend de X (et s'annule pour l'espace projectif), soit des propriétés géométriques (ou numériques) de la sous-variété V .

Il y a aussi des résultats pour les sous-variétés compactes totalement géodésiques d'une variété Riemannienne compacte à courbure positive (Wilking, Fang–Mendonça–Rong).

Pour les revêtements (on ne peut plus passer de l'un à l'autre comme dans l'espace projectif car il n'y a plus de projection!), Kim et Manivel ont montré que le fibré vectoriel associé à un revêtement de certains espaces homogènes

« minimaux » est *ample*. En particulier, les revêtements lisses connexes de petit degré ont même cohomologie que la base.

Le cheminement est le même : on montre que E_f est un quotient d'une somme directe $\mathcal{O}_G(1)^{\oplus N}$.

Il n'est en général pas facile de montrer qu'un fibré vectoriel E sur une variété X est ample. Lorsque E est quotient d'un fibré trivial de fibre un espace vectoriel fixe S , l'amplitude a l'interprétation géométrique suivante : on peut penser à E comme à une famille $(E_x^\vee)_{x \in X}$ de sous-espaces vectoriels de S^\vee qui varient holomorphiquement avec x , et on demande que chaque vecteur non nul de S ne soit dans E_x^\vee que pour un nombre fini de x .

On a aussi des résultats analogues pour des revêtements $f : V \rightarrow A$ d'une *variété abélienne* A . La difficulté est que E_f n'est plus nécessairement quotient d'un fibré vectoriel trivial.

Pareschi et Popa ont donné un critère cohomologique pour qu'un fibré vectoriel E sur A soit tel que, pour tout ouvert U de l'espace des fibrés en droites sur A *numériquement triviaux*, on a une surjection

$$\bigoplus_{\xi \in U} \xi^{\oplus N} \longrightarrow E$$

pour un entier N convenable. J'ai montré que ces fibrés sont amples. On en déduit que si A est *simple* et que f ne se factorise pas par un revêtement (non ramifié) connexe non trivial $A' \rightarrow A$, le fibré E_f est ample.