Sur la topologie des
varietes algebriques complexes

Olivier DEBARRE

Grenoble, le 26 octobre 2006

Étant donné un polynôme $f \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_r]$, nous nous intéressons à la topologie de son « lieu des zéros »

$$Z(f) = \{(x_1, \ldots, x_r) \in \mathbf{C}^r \mid f(x_1, \ldots, x_r) = 0\}$$

(cadre *affine*). On peut aussi homogénéiser f en $F \in \mathbf{C}[X_0, X_1, \ldots, X_r]$ et on considère le lieu (compact)

$$V(F) = \{(x_0 : \ldots : x_r) \in \mathbf{P}^r \mid F(x_0, \ldots, x_r) = 0\}$$

(cadre *projectif*), de sorte que $Z(f)$ est le complémentaire dans $V(F)$ de la *section hyperplane* $V(F) \cap (x_0 = 0)$.

Lorsqu'ils sont *lisses* (c'est-à-dire que l'équation et ses dérivées partielles n'ont pas de zéro commun), ces lieux sont des variétés complexes.

On peut aussi permettre plusieurs équations et considérer $Z(f_1, \ldots, f_s)$ ou $V(F_1, \ldots, F_s)$. On parle alors de variétés (algébriques) *affines* ou *projectives.* La variété est *lisse de codimension (complexe)* d si la matrice des dérivées partielles des équations qui la définissent est de rang d en tout point de la variété.

Exemple. L'ensemble des matrices (complexes) à m lignes et n colonnes, de rang $\leq r$, est une sous-variété de $\mathbf{P}^{mn-1}$ de codimension $(m-r)(n-r)$ qui n'est lisse que pour $r = 1$.

Toute variété projective lisse de dimension n peut être plongée dans $\mathbf{P}^{2n+1}$. Pouvoir être plongé dans un projectif plus petit impose des contraintes topologiques. Plus précisément, nous allons discuter le

Principe. La topologie d'une sous-variété de petite codimension dans l'espace projectif ressemble à celle de l'espace projectif.

Variétés affines

Théorie de Morse. Soit M une variété différentiable réelle. Une fonction de Morse est une fonction $f : M \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que la forme quadratique $d^2 f$ soit non-dégénérée en chaque point critique de f. Sa signature est (r_+, r_-) et r_- est l'*indice* du point critique. La variété M a alors le type d'homotopie d'un CW complexe avec une cellule de dimension r_- pour chaque point critique.

Théorème (Andreotti–Frankel). *Une sous-variété lisse connexe V de $\mathbf{C}^r$, de dimension complexe n, a le type d'homotopie d'un CW complexe fini de dimension réelle $\leq n$. En particulier*

$$H_i(V;\mathbf{Z}) = H^i(V;\mathbf{Z}) = 0 \qquad \textit{pour} \quad i > n. \tag{1}$$

La propriété (1) reste vraie même si V n'est pas lisse (Grothendieck).

En tant que variété réelle de dimension réelle $2n$, on sait que V a le type d'homotopie d'un CW complexe de dimension $\leq 2n$. Le théorème dit qu'il n'y a en fait que la moitié de la topologie qu'on aurait pu attendre.

Démonstration. Les points critiques de la fonction de Morse f donnée par le carré de la distance à un point général p sont tous d'indice $\leq n$.

On peut voir cela dans le cas où V est donnée, dans des coordonnées locales d'origine le point critique, par

$$V = \{(\mathbf{z}, z_{n+1}) \mid \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n),\ z_{n+1} = g(\mathbf{z})\}$$

où g est analytique, nulle au deuxième ordre à l'origine, et $p = (0, \ldots, 0, 1)$. On a

$$f(\mathbf{z}, g(\mathbf{z})) = |\mathbf{z}|^2 + |g(\mathbf{z}) - 1|^2 \qquad d^2 f(\mathbf{0}) = \mathrm{Id} - 2\,\mathrm{Re}\, g_2(\mathbf{z})$$

et on vérifie que la forme quadratique réelle $\mathrm{Re}\, g_2(\mathbf{z})$ a $r_+ = r_-$. $\square$

Exemple. Lorsque $r = 2$, les « courbes algébriques planes », lorsqu'elles sont lisses, sont des *surfaces de Riemann*. Une courbe affine $C \subset \mathbf{C}^2$ est une surface de Riemann *non compacte* et en effet $H^2(C;\mathbf{Z}) \simeq H^0_c(C,\mathbf{Z})^\vee = 0$.

Variétés projectives

Une fonction de Morse bien choisie du type

$$(x_0 : \ldots : x_r) \longmapsto \frac{c_0|x_0|^2 + \cdots + c_r|x_r|^2}{|x_0|^2 + \cdots + |x_r|^2}$$

permet de calculer la cohomologie de l'espace projectif :

$$H^i(\mathbf{P}^r;\mathbf{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{si } i \text{ est pair et dans } [0, 2r]\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On compare maintenant la cohomologie d'une hypersurface projective à celle de l'espace ambiant.

Théorème (Lefschetz). *Si $V \subset \mathbf{P}^r$ est une hypersurface, on a*

$$H^i(\mathbf{P}^r; \mathbf{Z}) \simeq H^i(V; \mathbf{Z}) \qquad \textit{pour} \quad i \leq r-2.$$

Démonstration. Comme $\mathbf{P}^r - V$ est lisse, on a

$$H^i(\mathbf{P}^r, V; \mathbf{Z}) \simeq H_{2r-i}(\mathbf{P}^r - V; \mathbf{Z}) \tag{2}$$

par dualité de Lefschetz. Mais $\mathbf{P}^r - V$ est affine : c'est le complémentaire d'une section hyperplane de l'image du plongement de Veronese $\mathbf{P}^r \hookrightarrow \mathbf{P}^{N-1}$, où d est le degré de V et $N = \binom{r+d}{d}$. Dit autrement, on a un plongement

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^r - V & \longrightarrow & \mathbf{C}^{N-1} \\ (x_0 : \ldots : x_r) & \longmapsto & \left(\frac{F_2(x)}{F(x)}, \ldots, \frac{F_N(x)}{F(x)}\right) \end{array}$$

où F est un équation de V et $(F, F_2, \ldots, F_N)$ une base de l'espace vectoriel des polynômes homogènes en $r+1$ variables de degré d.

Les groupes de (2) sont donc nuls pour $2r - i > r$ par le théorème d'Andreotti–Frankel. $\square$

Exemple. Le produit $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$ se plonge *a priori* dans $\mathbf{P}^7$. On peut le plonger dans $\mathbf{P}^5$ par l'application de Segre

$$((u_0 : u_1), (v_0 : v_1 : v_2)) \longmapsto (u_0v_0 : u_0v_1 : u_0v_2 : u_1v_0 : u_1v_1 : u_1v_2)$$

dont l'image est la variété projective définie par

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \leq 1$$

mais $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$ n'est pas isomorphe à une sous-variété lisse de $\mathbf{P}^4$ puisque

$$H^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^2$$

Généralisations. 1) (Lefschetz) On a aussi

$$\pi_i(V) \simeq \pi_i(\mathbf{P}^r) \qquad \text{pour} \quad i \leq r-2.$$

Démonstration. On plonge comme ci-dessus $\mathbf{P}^r$ dans un grand espace projectif $\mathbf{P}^{N-1}$ et on considère la fonction sur $f : \mathbf{P}^r \to \mathbf{R}$ donnée sur $\mathbf{P}^r - V \subset \mathbf{C}^{N-1}$ par *l'inverse* du carré de la distance à un point général de $\mathbf{C}^{N-1}$ et sur V par 0. Ses points critiques hors de V sont les mêmes que ceux de la fonction distance au carré utilisée avant, mais les signes sont inversés : ils sont donc tous d'indice $\geq r$, de sorte que $\mathbf{P}^r$ est obtenu en attachant des cellules de dimension $\geq r$ à $\mathbf{P}^r_\varepsilon = f^{-1}([0,\varepsilon])$. En particulier, la restriction

$$\pi_i(\mathbf{P}^r, V) \to \pi_i(\mathbf{P}^r_\varepsilon, V)$$

est *bijective* pour $i \leq r-1$. Comme V est par ailleurs un rétracte par déformation de $\mathbf{P}^r_\varepsilon$, le groupe de droite est nul. $\square$

2) (Barth–Larsen) Pour toute sous-variété lisse V de $\mathbf{P}^r$, on a

$$\pi_i(V) \simeq \pi_i(\mathbf{P}^r) \qquad \text{pour} \quad i \leq r - 2\,\mathrm{codim}(V).$$

En particulier, toute sous-variété lisse (irréductible suffit) de $\mathbf{P}^r$ de codimension $< r/2$ est simplement connexe.

3) (Sommese) Pour une sous-variété V de $\mathbf{P}^r$ définie (ensemblistement) par e équations

$$H^i(\mathbf{P}^r;\mathbf{Z}) \simeq H^i(V;\mathbf{Z}) \qquad \text{pour} \quad i \leq r-e-1.$$

Exemple. L'image du plongement de Segre $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2 \subset \mathbf{P}^5$, définie par

$$\mathrm{Rang} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \leq 1$$

ne peut être définie par deux équations, puisque

$$H^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^2$$

Nous allons expliquer maintenant comment démontrer ces deux résultats.

Sous-variétés de fibrés vectoriels positifs

Nous allons démontrer le résultat de Sommese mentionné ci-dessus.

Fibrés vectoriels sur l'espace projectif. À un point de $\mathbf{P}^r$ est associée une droite de $\mathbf{C}^{r+1}$. On a ainsi un fibré en droites naturel que l'on note $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(-1)$; c'est un sous-fibré du fibré trivial $\mathbf{C}^{r+1} \times \mathbf{P}^r$. Ses sections globales holomorphes sont nulles. En revanche, toute forme linéaire sur $\mathbf{C}^{r+1}$ définir une section holomorphe du fibré dual $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1)$. De même, tout polynôme homogène de degré d en $r+1$ variables définit une section holomorphe du fibré $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(d) = \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(1)^{\otimes d}$ (il ne définit bien sûr pas une *fonction* holomorphe sur $\mathbf{P}^r$: elles sont toutes constantes).

Lieu des zéros d'une section d'un fibré positif. Si $V \subset \mathbf{P}^r$ est défini par l'annulation de e polynômes homogènes de degré $d_1, \ldots, d_e$, c'est le lieu des zéros d'une section du fibré vectoriel $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r}(d_e)$ de rang e. Ce fibré est :

- positif au sens de Griffiths (muni d'une métrique à courbure sectionnelle > 0) ;
- donc ample (au sens de la géométrie algébrique).

On a un résultat général qui compare la topologie du lieu des zéros d'une section d'un fibré « positif » à celle de l'espace ambiant.

Théorème. *Soit V le lieu des zéros d'une section d'un fibré vectoriel E de rang e, positif au sens de Griffiths, sur une variété lisse connexe X de dimension r. On a*

$$\pi_i(V) \simeq \pi_i(X) \qquad \textit{pour} \quad i \leq r-e-1.$$

Si $e \leq r$, toute section doit s'annuler quelque part. Si $e < r$, le lieu des zéros est connexe.

Le résultat de Sommese s'en déduit.

Démonstration. On utilise encore une fonction de Morse. Si s est la section et h une métrique sur E à courbure sectionnelle > 0, on montre que les points critiques dans $X - V$ de la fonction $f : x \mapsto \|s(x)\|_h^2$ sont d'indice $\geq r-e+1$.

On conclut comme dans le théorème de Lefschetz : X est obtenu en attachant des cellules de dimension $\geq r-e+1$ à $f^{-1}([0,\varepsilon])$, et $\pi_i(X,V)=0$ pour $i \leq r-e$. $\square$

Si E n'est que ample, on a un énoncé analogue :

$$H^i(X;\mathbf{Z}) \simeq H^i(V;\mathbf{Z}) \qquad \text{pour} \quad i \leq r-e-1.$$

Démonstration. Puisque $X - V$ est lisse, il suffit, par dualité de Lefschetz, de prouver $H_i(X - V;\mathbf{Z}) = 0$ pour $i \geq r+e$. On construit, dans le fibré projectif $\mathbf{P}(E)$ des hyperplans des fibres de E, une hypersurface V^* dont le complémentaire est affine et telle que $\mathbf{P}(E) - V^* \to X - V$ soit un fibré en $\mathbf{C}^{e-1}$. Il suffit alors d'appliquer le théorème d'Andreotti–Frankel à la variété affine $\mathbf{P}(E) - V^*$. $\square$

Sous-variétés d'un fibré vectoriel positif

Premier exemple. Une sous-variété $V \subset \mathbf{P}^r$ de dimension n est une sous-variété d'un fibré vectoriel « positif » sur $\mathbf{P}^n$: un sous-espace linéaire général Λ de $\mathbf{P}^r$ de dimension $r-n-1$ ne rencontre pas V, on peut projeter depuis Λ :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbf{P}^r - \Lambda \arrow[d] \\ & \mathbf{P}^n \end{tikzcd}$$

et $\mathbf{P}^r - \Lambda$ est l'espace total du fibré vectoriel $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{\oplus(r-n)}$ sur $\mathbf{P}^n$, qui est positif au sens de Griffiths.

Une sous-variété (de petite codimension) de l'espace projectif est donc aussi une sous-variété d'un fibré vectoriel positif (de petit rang) sur un espace projectif.

Second exemple. Lazarsfeld a montré que, si $f : V \to \mathbf{P}^n$ est un revêtement (ramifié) de degré d, la variété V est une sous-variété d'un fibré vectoriel E_f de rang $d-1$ qui, si V est lisse connexe, est positif au sens de Griffiths (c'est un quotient d'une somme directe $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{\oplus N}$).

Dans les deux cas, le théorème suivant impose des restrictions sur la cohomologie de V (pour le premier exemple, on retrouve le théorème de Barth–Larsen en cohomologie).

Théorème. *Soit X une variété projective lisse connexe de dimension n, soit E un fibré ample de rang e sur X, et soit V une sous-variété projective lisse de E, de dimension n. On a*

$$H^i(X;\mathbf{Z}) \simeq H^i(V;\mathbf{Z}) \qquad \textit{pour} \quad i \leq n-e.$$

L'énoncé analogue sur les groupes d'homotopie n'est pas connu. Lorsque X et V sont *simplement connexes,* il résulte du théorème de Whitehead. C'est le cas lorsque $X=\mathbf{P}^n$ et que V est un revêtement de degré $d \leq n$.

Peut-on remplacer l'espace projectif par autre chose ?

Pour les sous-variétés, des analogues du théorème de Barth–Larsen ont été montrés lorsqu'on remplace l'espace projectif par un espace homogène rationnel (Sommese, Okonek) ou une variété abélienne (Sommese, Debarre) X. On obtient des résultats du type

$$\pi_i(V) \simeq \pi_i(X) \qquad \text{pour} \quad i \leq \dim(X) - 2\,\mathrm{codim}(V) - \lambda,$$

où λ est un *défaut* explicite qui soit dépend de X (et s'annule pour l'espace projectif), soit des propriétés géométriques (ou numériques) de la sous-variété V.

Il y a aussi des résultats pour les sous-variétés compactes totalement géodésiques d'une variété Riemannienne compacte à courbure positive (Wilking, Fang–Mendonça–Rong).

Pour les revêtements (on ne peut plus passer de l'un à l'autre comme dans l'espace projectif car il n'y a plus de projection !), Kim et Manivel ont montré que le fibré vectoriel associé à un revêtement de certains espaces homogènes

« minimaux » est *ample*. En particulier, les revêtements lisses connexes de petit degré ont même cohomologie que la base.

Le cheminement est le même : on montre que E_f est un quotient d'une somme directe $\mathscr{O}_G(1)^{\oplus N}$.

Il n'est en général pas facile de montrer qu'un fibré vectoriel E sur une variété X est ample. Lorsque E est quotient d'un fibré trivial de fibre un espace vectoriel fixe S, l'amplitude a l'interprétation géométrique suivante : on peut penser à E comme à une famille $(E_x^\vee)_{x\in X}$ de sous-espaces vectoriels de $S^\vee$ qui varient holomorphiquement avec x, et on demande que chaque vecteur non nul de $S^\vee$ ne soit dans $E_x^\vee$ que pour un nombre fini de x.

On a aussi des résultats analogues pour des revêtements $f : V \to A$ d'une *variété abélienne* A. La difficulté est que E_f n'est plus nécessairement quotient d'un fibré vectoriel trivial.

Pareschi et Popa ont donné un critère cohomologique pour qu'un fibré vectoriel E sur A soit tel que, pour tout ouvert U de l'espace des fibrés en droites sur A *numériquement triviaux*, on a une surjection

$$\bigoplus_{\xi\in U} \xi^{\oplus N} \longrightarrow E$$

pour un entier N convenable. J'ai montré que ces fibrés sont amples. On en déduit que si A est *simple* et que f ne se factorise pas par un revêtement (non ramifié) connexe non trivial $A' \to A$, le fibré E_f est ample.