

# Variétés toriques et polytopes

Olivier DEBARRE

---

École Normale Supérieure

---

Novembre 2002

---

# 1 Polytopes et convexes compacts dans $\mathbf{R}^n$

Je voudrais présenter quelques problèmes d'énoncés élémentaires relatifs aux solides convexes dans  $\mathbf{R}^n$ , pour expliquer ensuite comment la géométrie algébrique, via la construction des variétés toriques, permet de les résoudre.

## 1.1 Polytopes simpliciaux

Un polytope est l'enveloppe convexe dans  $\mathbf{R}^n$  d'un ensemble fini qui engendre  $\mathbf{R}^n$ . On note  $f_i$  le nombre de faces de dimension  $i$  et  $f_{-1} = 1$ .

Un polytope étant contractile, on a l'égalité d'Euler

$$f_0 - f_1 + f_2 - \cdots + (-1)^{n-1} f_{n-1} + (-1)^n = 1$$

Pour les polytopes *simpliciaux*, dont les facettes (c'est-à-dire les faces de dimension  $n-1$ ) ont toutes  $n$  sommets, il y a des contraintes supplémentaires : si on pose, pour  $0 \leq k \leq n$ ,

$$h_k = \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{i}{k} f_{n-1-i} \quad (1)$$

on a les relations de Dehn–Sommerville

$$h_k = h_{n-k} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n \quad (2)$$

(on vérifie que  $h_0 = h_n$  est la relation d'Euler), les inégalités

$$h_{k-1} \leq h_k \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n/2 \quad (3)$$

ainsi qu'une autre série d'inégalités que je ne préciserai pas et dont on sait montrer qu'elles caractérisent, avec les relations (2) et (3), tous les  $(f_0, \dots, f_{n-1})$  possibles.

Un des buts de ce cours sera de démontrer les relations (2) et (3), ou plus exactement de les déduire de théorèmes « classiques » de topologie algébrique (la dualité de Poincaré) et de géométrie algébrique (le théorème de Lefschetz « difficile »). Nous obtiendrons ces résultats en 4.1.

**Exemple 1** En dimension 3, la relation d'Euler s'écrit

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2$$

Comme chaque face a trois côtés et que chaque côté est sur deux faces, on a aussi

$$3f_2 = 2f_1$$

Tout est donc déterminé par le nombre de sommets  $f_0$ , qui doit par ailleurs être au moins 4. Comme  $h_0 = f_2 - f_1 + f_0 - 1$ ,  $h_1 = f_1 - 2f_0 + 3$ ,  $h_2 = f_0 - 3$  et  $h_3 = 1$ , ces relations équivalent à  $h_0 = h_3$ ,  $h_1 = h_2$  et  $h_0 \leq h_1$ . Ce sont les seules conditions.

**Exercice 2** Montrer que pour tout polytope de dimension  $n$ , on a les inégalités

$$f_i \leq \begin{cases} \sum_{k=0}^m \frac{f_0}{f_0 - k} \binom{f_0 - k}{k} \binom{k}{i+1-k} & \text{quand } n = 2m \\ \sum_{k=0}^m \frac{i+2}{f_0 - k} \binom{f_0 - k}{k+1} \binom{k+1}{i+1-k} & \text{quand } n = 2m + 1 \end{cases}$$

et qu'il y a égalité pour tout polytope dont les sommets sont situés sur la courbe image de  $t \mapsto (t, t^2, \dots, t^n)$ .

## 1.2 Points entiers dans les polytopes

Soit  $P$  un polytope dans  $\mathbf{R}^n$  à sommets dans  $\mathbf{Z}^n$ . Ehrhart a démontré qu'il existe un polynôme  $f_P$  de degré au plus  $n$  tel que

$$\begin{aligned} \text{Card}(mP \cap \mathbf{Z}^n) &= f_P(m) \\ \text{Card}(\text{Int}(mP) \cap \mathbf{Z}^n) &= (-1)^n f_P(-m) \end{aligned}$$

pour tout entier  $m > 0$ . Le terme dominant de ce polynôme est bien sûr le volume du polytope  $P$ . Nous expliquerons comment déduire ces formules du théorème de Riemann–Roch et de la dualité de Serre. Nous obtiendrons ces résultats respectivement en 4.3 (th. 20) et 4.4.

### 1.3 Volumes mixtes

On considère des convexes compacts  $K_1, \dots, K_n$  dans  $\mathbf{R}^n$  et on pose, pour  $t_1, \dots, t_n$  réels positifs,

$$t_1 K_1 + \dots + t_n K_n = \{t_1 x_1 + \dots + t_n x_n \mid x_i \in K_i\}$$

Nous montrerons que le volume de cet ensemble est un polynôme homogène de degré  $n$  en  $t_1, \dots, t_n$  dont on note  $n! \operatorname{vol}(K_1, \dots, K_n)$  le coefficient de  $t_1 \dots t_n$ ; on appelle ce nombre le *volume mixte* de  $K_1, \dots, K_n$ . C'est un réel positif, et

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(K, \dots, K) &= \operatorname{vol}(K) \\ \operatorname{vol}(K + tK') &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \operatorname{vol}(\overbrace{K', \dots, K'}^{i \text{ fois}}, \overbrace{K, \dots, K}^{n-i \text{ fois}}) t^i \end{aligned} \quad (4)$$

Un des buts de ce cours sera de montrer l'inégalité

$$\operatorname{vol}(K_1, \dots, K_n) \geq \sqrt[n]{\operatorname{vol}(K_1) \cdots \operatorname{vol}(K_n)} \quad (5)$$

Nous obtiendrons ce résultat à la fin de 4.3.

**Exemple 3** Si  $B$  est la boule unité dans  $\mathbf{R}^n$ , il ressort de (4) que le coefficient de  $t$  dans le polynôme  $\operatorname{vol}(K + tB)$ , c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} \operatorname{vol}(K + tB)|_{t=0}$$

est  $n \operatorname{vol}(B, K, \dots, K)$ . Lorsque la frontière  $\partial K$  de  $K$  est lisse, c'est sa mesure; sinon, c'en est une bonne définition. La formule (5) s'écrit

$$\operatorname{vol}(\partial K) \geq n \operatorname{vol}(B)^{1/n} \operatorname{vol}(K)^{1-1/n}$$

C'est l'inégalité isopérimétrique. Il y a égalité si et seulement si  $K$  est une boule.

Soit  $K$  un convexe compact dans  $\mathbf{R}^2$ , de périmètre  $L$  et d'aire  $S$ . On a donc

$$L^2 \geq 4\pi S \quad (6)$$

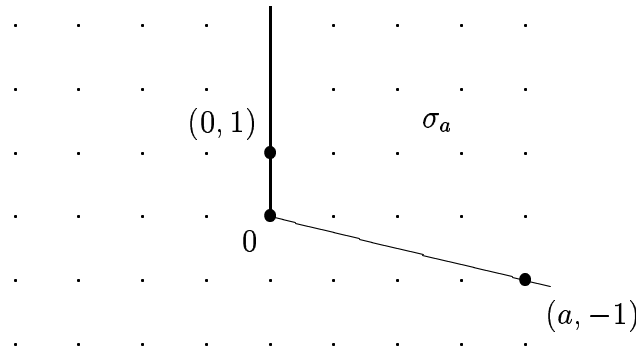
On peut affiner cette inégalité. Soient  $r$  le rayon du plus petit disque inscrit dans  $K$  et  $R$  celui du plus grand disque circonscrit à  $K$ . On a

$$\frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi S}}{2\pi} \geq R \geq r \geq \frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi S}}{2\pi} \quad (7)$$

On retrouve le fait qu'il y a égalité dans (6) si et seulement si  $K$  est une boule. Nous obtiendrons ce résultat à la fin de 4.3.

## 2 Variétés toriques affines

On explique ici comment construire une *variété algébrique affine* (c'est-à-dire une sous-variété d'un  $\mathbf{C}^s$  définie par des équations polynomiales) à partir de la donnée dans  $\mathbf{R}^n$  d'un cône convexe engendré par un nombre fini de vecteurs de  $\mathbf{Z}^n$  et ne contenant aucune droite. Voici un tel cône dans  $\mathbf{R}^2$  :



### 2.1 Cônes polyédraux convexes

Un cône  $\sigma$  dans un espace vectoriel réel  $N_{\mathbf{R}}$  de dimension  $n$  est *polyédral convexe* s'il s'écrit

$$\sigma = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0\}$$

avec  $v_1, \dots, v_r \in N_{\mathbf{R}}$ . On appelle *dimension de  $\sigma$*  la dimension de l'espace vectoriel  $\sigma + (-\sigma)$  qu'il engendre.

On définit le cône dual dans  $M_{\mathbf{R}} = (N_{\mathbf{R}})^*$  par

$$\sigma^\vee = \{u \in M_{\mathbf{R}} \mid \langle u, v \rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in \sigma\}$$

Passons en revue quelques résultats importants quoiqu'élémentaires sur ces cônes.

(a) *Si  $v \notin \sigma$ , il existe  $u \in \sigma^\vee$  tel que  $\langle u, v \rangle < 0$ . On a  $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$ .*

En effet, on peut considérer (après choix d'une structure euclidienne sur  $N_{\mathbf{R}}$ ) la projection orthogonale  $\pi(v)$  de  $v$  sur  $\sigma$  et prendre pour  $u$  l'hyperplan passant par  $\pi(v)$  et orthogonal à  $v - \pi(v)$ .

On appelle *face* de  $\sigma$  toute intersection  $\sigma \cap u^\perp$ , pour  $u \in \sigma^\vee$  (en particulier,  $\sigma$  est une face). Une *facette* est une face de codimension 1.

(b) *Toute face est un cône polyédral convexe et il n'y a qu'un nombre fini de faces.*

Si  $\sigma$  est engendré par  $v_1, \dots, v_r$ , toute face  $\sigma \cap u^\perp$  est engendrée par les  $v_i$  qu'elle contient : en effet, si  $v \in \sigma \cap u^\perp$  s'écrit  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$  avec  $\lambda_i \geq 0$ , on a

$$0 = \langle u, v \rangle = \lambda_1 \langle u, v_1 \rangle + \dots + \lambda_r \langle u, v_r \rangle = \sum_{\langle u, v_i \rangle = 0} \lambda_i \langle u, v_i \rangle$$

puisque  $\lambda_i = 0$  si  $\langle u, v_i \rangle > 0$ .

(c) *Toute intersection de faces est une face. Toute face d'une face est une face. Toute face autre que  $\sigma$  est l'intersection des facettes qui la contiennent.*

On a en effet  $\bigcap_i (\sigma \cap u_i^\perp) = \sigma \cap (\sum_i u_i)^\perp$  (car chaque  $u_i$  est positif sur  $\sigma$ ).

D'autre part, si  $\sigma' = \sigma \cap u^\perp$  (avec  $u \in \sigma^\vee$ ) contient  $v_1, \dots, v_s$  mais pas  $v_{s+1}, \dots, v_r$ , on a  $u(v_{s+1}), \dots, u(v_r) > 0$ . Si  $\sigma'' = \sigma' \cap (u')^\perp$  (avec  $u' \in (\sigma')^\vee$ ), on a  $(\lambda u + u')(v_{s+1}), \dots, (\lambda u + u')(v_r) \geq 0$  pour  $\lambda$  assez grand, de sorte que  $\lambda u + u'$  est dans  $\sigma^\vee$  et  $\sigma'' = \sigma \cap (\lambda u + u')^\perp$ .

Nous admettrons le dernier point.

Si  $\sigma$  engendre  $N_{\mathbf{R}}$ , il existe pour chaque facette  $\tau$  de  $\sigma$  un vecteur  $u_\tau$  de  $\sigma^\vee$ , unique à multiplication par un scalaire près, tel que  $\tau = \sigma \cap u_\tau^\perp$ .

(d) Si  $\sigma$  engendre  $N_{\mathbf{R}}$ , on a

$$\sigma = \bigcap_{\tau \text{ facette}} \{v \in N_{\mathbf{R}} \mid \langle u_{\tau}, v \rangle \geq 0\} \quad (8)$$

Soit  $v$  un point hors de  $\sigma$ . Les générateurs  $v_1, \dots, v_r$  de  $\sigma$  engendrent l'espace vectoriel  $N_{\mathbf{R}}$ , donc on peut supposer que  $(v_1, \dots, v_n)$  en est une base. Le vecteur  $v' = v_1 + \dots + v_n$  est alors dans l'intérieur de  $\sigma$ . Le segment  $vv'$  coupe la frontière de  $\sigma$  en un point  $v''$  qui est limite d'une suite  $(v_n)$  de points de  $vv' - \sigma$ . Par (a), il existe une suite  $(u_n)$  de vecteurs unitaires de  $\sigma^{\vee}$  tels que  $\langle u_n, v_n \rangle < 0$ . Quitte à passer à une suite extraite, on peut supposer que cette suite converge vers un vecteur  $u$  non nul de  $\sigma^{\vee}$  qui vérifie  $\langle u, v'' \rangle \leq 0$ . Comme  $v''$  est dans  $\sigma$ , il y a égalité et  $v''$  est sur la face (propre) de  $\sigma$  définie par  $u$ , donc aussi, par (c), sur une facette  $\tau$ . On a alors  $\langle u_{\tau}, v'' \rangle = 0$  et  $\langle u_{\tau}, v' \rangle > 0$  puisque  $v'$  est dans l'intérieur de  $\sigma$ , donc  $\langle u_{\tau}, v \rangle < 0$  : le point  $v$  n'est pas dans l'intersection.

(e) Le cône  $\sigma^{\vee}$  est aussi polyédral convexe.

Si  $\sigma$  engendre  $N_{\mathbf{R}}$ , on obtient en dualisant l'égalité (8)

$$\begin{aligned} \sigma^{\vee} &= \left( \bigcap_{\tau} \{v \in N_{\mathbf{R}} \mid \langle u_{\tau}, v \rangle \geq 0\} \right)^{\vee} \\ &= \sum_{\tau} (\{v \in N_{\mathbf{R}} \mid \langle u_{\tau}, v \rangle \geq 0\})^{\vee} \\ &= \sum_{\tau} \mathbf{R}^+ u_{\tau} \end{aligned}$$

Le cône  $\sigma^{\vee}$  est donc engendré par les  $u_{\tau}$ .

Si  $\sigma$  engendre un sous-espace vectoriel  $N_{\sigma, \mathbf{R}}$  de  $N_{\mathbf{R}}$ , on a  $\sigma^{\vee} \supset N_{\sigma, \mathbf{R}}^{\perp}$  et  $\sigma^{\vee} / N_{\sigma, \mathbf{R}}^{\perp} \subset N_{\sigma, \mathbf{R}}^*$  est le dual du cône  $\sigma \subset N_{\sigma, \mathbf{R}}$ . On obtient un ensemble de générateurs de  $\sigma$  en prenant des relevés quelconque d'un ensemble (fini) de générateurs de  $\sigma^{\vee}$  dans  $N_{\sigma, \mathbf{R}}^*$  ainsi que les vecteurs d'une base de  $N_{\sigma, \mathbf{R}}^{\perp}$  et leurs inverses.

Lorsque  $\sigma$  engendre  $N_{\mathbf{R}}$ , la démonstration fournit même un algorithme pour trouver des générateurs de  $\sigma^{\vee}$  : pour chaque ensemble de  $n - 1$  vecteurs indépendants parmi les générateurs de  $\sigma$ , qui engendrent un hyperplan  $u^{\perp}$ , on regarde si  $u$  ou  $-u$  est positif sur tous les générateurs de  $\sigma$ . Si ce n'est

pas le cas, on le jette et on passe au sous-ensemble suivant ; si c'est le cas, on garde le vecteur correspondant.

On a aussi le point suivant, que nous admettrons.

- (f) *L'application  $\tau \mapsto \sigma^\vee \cap \tau^\perp$  induit une bijection décroissante entre l'ensemble des faces de  $\sigma$  et celui des faces de  $\sigma^\vee$ . On a  $\dim(\tau) + \dim(\sigma^\vee \cap \tau^\perp) = n$ .*

On demandera ensuite à nos cônes  $\sigma$  d'être *saillants*, c'est-à-dire de vérifier l'une des conditions équivalentes suivantes :

- (i)  $\{0\}$  est une face de  $\sigma$  ;
  - (ii)  $\sigma$  ne contient pas de droite ;
  - (iii)  $\sigma^\vee$  engendre  $M_{\mathbf{R}}$ .
- (g) *Si  $\sigma$  est un cône polyédral convexe saillant, les faces de dimension 1 de  $\sigma$  sont les demi-droites engendrées par les éléments d'un ensemble minimal de générateurs.*

En effet, si  $\tau$  est une telle face, c'est une demi-droite par (ii) et elle est engendrée par les générateurs qu'elle contient (*cf.* la preuve de (b)).

Inversement, si  $\{v_1, \dots, v_r\}$  est un ensemble minimal de générateurs, il existe par (a) un élément  $u$  de  $M_{\mathbf{R}}$  positif sur  $v_2, \dots, v_r$  tel que  $\langle u, v_1 \rangle < 0$ . Il existe par (i) un élément  $u'$  de  $M_{\mathbf{R}}$  tel que  $\langle u', v_i \rangle > 0$  pour tout  $i$ . Pour  $\lambda > 0$  convenable, on a  $\langle u + \lambda u', v_1 \rangle = 0$ . Comme  $\langle u + \lambda u', v_i \rangle > 0$  pour  $2 \leq i \leq r$ , la demi-droite  $\mathbf{R}^+v_1$  est une face de  $\sigma$ .

On ne s'intéressera en fait qu'aux cônes polyédraux convexes *rationnels*, c'est-à-dire aux cônes convexes  $\sigma$  de  $N_{\mathbf{R}}$  engendrés par des vecteurs de  $N$ . L'algorithme ci-dessus montre que  $\sigma^\vee$  est aussi un cône polyédral convexe rationnel.

- (h) *Si  $\sigma$  est un cône polyédral convexe rationnel, le semi-groupe  $\sigma^\vee \cap M$  est de type fini.*

Prenons des générateurs  $u_1, \dots, u_s$  de  $\sigma^\vee$  dans  $M$ . L'intersection

$$K = M \cap \left\{ \sum_{i=1}^s r_i u_i \mid 0 \leq r_i \leq 1 \right\}$$

est finie et engendre le semi-groupe  $\sigma^\vee \cap M$ . En effet, tout  $u$  dans  $\sigma^\vee \cap M$  s'écrit  $u = \sum_{i=1}^s \lambda_i u_i$ , avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  dans  $\mathbf{R}^+$ , de sorte que

$$u = \sum_{i=1}^s \lambda_i u_i = \underbrace{\sum_{i=1}^s [\lambda_i] u_i}_{\substack{\text{dans le semi-} \\ \text{groupe engendré} \\ \text{par } u_1, \dots, u_s}} + \underbrace{\sum_{i=1}^s (\lambda_i - [\lambda_i]) u_i}_{\text{dans } K}$$

## 2.2 Construction de la variété associée à un cône polyédral convexe saillant rationnel

Soit  $\sigma \in N_{\mathbf{R}}$  un cône polyédral convexe saillant rationnel (on dira simplement, à partir de maintenant, « cône »). On peut construire l'algèbre

$$A_\sigma = \mathbf{C}[\sigma^\vee \cap M]$$

de ce semi-groupe : c'est un espace vectoriel de base  $(\chi^u)_{u \in \sigma^\vee \cap M}$ , la multiplication étant définie par  $\chi^u \cdot \chi^{u'} = \chi^{u+u'}$ . Tout ensemble  $(u_i)_{1 \leq i \leq s}$  de générateurs du semi-groupe  $\sigma^\vee \cap M$  (cf. (h)) détermine un ensemble  $(\chi^{u_i})_{1 \leq i \leq s}$  de générateurs de l'algèbre  $A_\sigma$ .

Cette algèbre s'écrit donc comme quotient d'un anneau de polynômes  $\mathbf{C}[Y_1, \dots, Y_s]$  par un idéal. Comme tout idéal de cet anneau, il est engendré par un nombre fini de polynômes  $F_1, \dots, F_m$ . La variété algébrique affine  $X_\sigma$  associée au cône  $\sigma$  est par définition le sous-ensemble de  $\mathbf{C}^s$  défini par les équations  $F_1 = \dots = F_m = 0$ .

Cette définition ne donne une description ni très explicite, ni intrinsèque, de  $X_\sigma$ . Le point de vue de la géométrie algébrique moderne est de considérer un point  $(y_1, \dots, y_s)$  de  $X_\sigma$  comme un idéal maximal  $(Y_1 - y_1, \dots, Y_s - y_s)$  de l'anneau  $\mathbf{C}[Y_1, \dots, Y_s]$  contenant l'idéal  $(F_1, \dots, F_m)$ , c'est-à-dire comme un

idéal maximal de l'algèbre  $A_\sigma$ . Un théorème fameux de Hilbert, le Nullstellensatz, dit que cette correspondance est bijective. Un point de  $X_\sigma$  correspond donc à un morphisme surjectif de  $\mathbf{C}$ -algèbres

$$\mathbf{C}[\sigma^\vee \cap M] \rightarrow \mathbf{C}$$

c'est-à-dire à un morphisme de semi-groupes

$$\sigma^\vee \cap M \rightarrow (\mathbf{C}, \times)$$

(qui envoie donc en particulier 0 sur 1).

La variété  $X_\sigma$  contient un point distingué, que l'on notera  $x_\sigma$ . C'est le point associé à l'application

$$\begin{aligned} \sigma^\vee \cap M &\rightarrow (\mathbf{C}, \times) \\ u &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } u \in \sigma^\perp \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

(si  $\sigma$  engendre  $N_{\mathbf{R}}$ , on a  $\sigma^\perp = \{0\}$ ). C'est bien un morphisme de semi-groupes, car la somme de deux éléments de  $\sigma^\vee$  ne peut être dans  $\sigma^\perp$  que s'il y sont tous les deux.

**Exemples 4** Soient  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $N$  et  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  la base duale de  $M$ .

(1) Si  $\sigma = \{0\}$ , on a  $\sigma^\vee = M_{\mathbf{R}}$ . Le semi-groupe  $\sigma^\vee \cap M = M$  est engendré par  $\pm e_1^*, \dots, \pm e_n^*$ , de sorte que

$$A_\sigma = \mathbf{C}[X_1, X_1^-, \dots, X_n, X_n^-] / (X_1 X_1^- - 1, \dots, X_n X_n^- - 1)$$

où  $X_i = \chi^{e_i^*}$  et  $X_i^- = \chi^{-e_i^*}$ . La variété  $X_\sigma$  est isomorphe à  $(\mathbf{C}^*)^n$ , qui s'appelle le *tore* (algébrique)  $\mathbf{T}^n$  de dimension  $n$ . C'est un groupe.

On écrit aussi souvent

$$A_\sigma = \mathbf{C}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$$

que l'on appelle anneau des polynômes de Laurent. Toutes les algèbres  $\mathbf{C}[\tau^\vee \cap M]$  que l'on considérera sont des sous-algèbres de celle-ci, engendrées par les

« monômes » dont l'exposant est dans  $\sigma^\vee \cap M$ , et on écrira souvent leurs éléments comme des polynômes de Laurent.

Le point  $t = (t_1, \dots, t_n)$  de  $\mathbf{T}^n$  correspond au morphisme de semi-groupes

$$\begin{aligned} M &\rightarrow (\mathbf{C}, \times) \\ (m_1, \dots, m_n) &\mapsto t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n} \end{aligned}$$

qui est en fait un morphisme de groupes  $M \rightarrow \mathbf{C}^*$  (appelé *caractère* de  $M$ ). Le point distingué  $x_{\{0\}}$  est  $(1, \dots, 1)$ .

(2) Pour le cône  $\sigma = \mathbf{R}^+e_1 + \dots + \mathbf{R}^+e_n$ , on a

$$\sigma^\vee = \mathbf{R}^+e_1^* + \dots + \mathbf{R}^+e_n^*$$

Le semi-groupe  $\sigma^\vee \cap M$  est engendré par  $e_1^*, \dots, e_n^*$ , de sorte que

$$A_\sigma = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$$

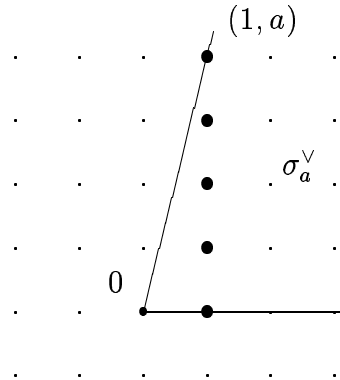
La variété  $X_\sigma$  est  $\mathbf{C}^n$ . Le point distingué  $x_\sigma$  est  $(0, \dots, 0)$ .

(3) Plus généralement, si  $0 \leq m \leq n$  et  $\sigma = \mathbf{R}^+e_1 + \dots + \mathbf{R}^+e_m$ , on a  $\sigma^\vee = \mathbf{R}^+e_1^* + \dots + \mathbf{R}^+e_m^* + \mathbf{R}e_{m+1}^* + \dots + \mathbf{R}e_n^*$ . Le semi-groupe  $\sigma^\vee \cap M$  est engendré par  $e_1^*, \dots, e_m^*, \pm e_{m+1}^*, \dots, \pm e_n^*$ , et

$$A_\sigma = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_m, X_{m+1}^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$$

La variété  $X_\sigma$  est isomorphe à  $\mathbf{C}^m \times (\mathbf{C}^*)^{n-m}$ . Le point distingué est  $x_\sigma = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{m \text{ fois}} \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n-m \text{ fois}}$ .

(4) Le dual du cône  $\sigma_a$  défini au début de cette section est



Le semi-groupe  $\sigma_a^\vee \cap M$  est engendré par  $e_1^*, e_1^* + e_2^*, \dots, e_1^* + ae_2^*$ . On a

$$\begin{aligned} A_{\sigma_a} &= \mathbf{C}[X_1, X_1X_2, X_1X_2^2, \dots, X_1X_2^a] \\ &= \mathbf{C}[Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_a]/(Y_iY_{j+1} - Y_{i+1}Y_j, 0 \leq i < j < a) \end{aligned}$$

La variété  $X_{\sigma_a}$  est définie dans  $\mathbf{C}^{a+1}$  par la condition

$$\text{rang} \begin{pmatrix} Y_0 & Y_1 & \cdots & Y_{a-1} \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_a \end{pmatrix} \leq 1$$

C'est un cône de sommet l'origine de  $\mathbf{C}^{a+1}$  (qui pour  $a = 1$  est isomorphe à  $\mathbf{C}^2$ ). Le point distingué  $x_{\sigma_a}$  est le sommet du cône.

Il est important de remarquer les choses suivantes.

- Si  $\tau$  est une face de  $\sigma$ , la variété  $X_\tau$  s'identifie à l'ouvert complémentaire d'une sous-variété de  $X_\sigma$ . En particulier, chaque  $X_\sigma$  contient  $X_{\{0\}} = \mathbf{T}^n$  comme ouvert. On dira que  $X_\sigma$  est *de dimension* (complexe)  $n$ .

En effet, il existe  $u \in \sigma^\vee \cap M$  tel que  $\tau = \sigma \cap u^\perp$ . On a en dualisant  $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbf{R}^+(-u)$ , de sorte que  $\tau^\vee \cap M = (\sigma^\vee \cap M) + \mathbf{N}(-u)$  et  $A_\tau = A_\sigma[\chi^{-u}]/(\chi^u\chi^{-u} - 1)$ . La variété  $X_\tau$  s'identifie donc au complémentaire dans  $X_\sigma$  de la sous-variété définie par  $\chi^u = 0$ .

Par exemple, la face  $\tau = \mathbf{R}^+e_2$  du cône  $\sigma_a$  est définie dans  $\sigma_a$  par  $e_1^* = 0$  et  $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbf{R}^+(-e_1^*) = \mathbf{R}e_1^* + \mathbf{R}^+e_2^*$ . La variété  $X_\tau \simeq \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$  est définie dans  $X_{\sigma_a}$  par  $X_1 \neq 0$ . Avec les notations précédentes, l'inclusion est donnée par

$$(\lambda_0, \lambda_1) \mapsto (\lambda_0, \lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_1^2, \dots, \lambda_0\lambda_1^a)$$

- Le tore  $\mathbf{T}^n$  agit sur chaque  $X_\sigma$  (d'où le nom de « variété torique ») de la façon suivante : un point  $t$  de  $\mathbf{T}^n$  correspond à un morphisme de groupes  $t : M \rightarrow \mathbf{C}^*$  tandis qu'un point  $x$  de  $X_\sigma$  correspond à un morphisme de semi-groupes  $x : \sigma^\vee \cap M \rightarrow \mathbf{C}$ . Le point  $t \cdot x$  de  $X_\sigma$  correspond au morphisme de semi-groupes

$$\begin{aligned} \sigma^\vee \cap M &\rightarrow \mathbf{C} \\ u &\mapsto t(u)x(u) \end{aligned}$$

Lorsque  $\sigma = \{0\}$ , c'est la loi de groupe de  $\mathbf{T}^n$ . Si  $\tau$  est une face de  $\sigma$ , l'inclusion  $X_\tau \subset X_\sigma$  définie ci-dessus est équivariante pour l'action de  $\mathbf{T}^n$ .

Par exemple, l'action de  $\mathbf{T}^2$  sur la surface  $X_{\sigma_a}$  de l'exemple 4(4) est donnée par

$$(\lambda_0, \lambda_1) \cdot (Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_a) \mapsto (\lambda_0 Y_0, \lambda_0 \lambda_1 Y_1, \lambda_0 \lambda_1^2 Y_2, \dots, \lambda_0 \lambda_1^a Y_a) \quad (9)$$

- L'action de  $\mathbf{T}^n$  sur  $X_\sigma$  a un point fixe si et seulement si  $\sigma$  engendre  $N_{\mathbf{R}}$ ; le point fixe est alors le point distingué  $x_\sigma$ . Plus généralement, l'orbite  $O_\sigma$  de  $x_\sigma$  sous l'action de  $\mathbf{T}^n$  est isomorphe à  $\mathbf{T}^{n-\dim(\sigma)}$ . Si on note  $X'_\sigma$  la variété torique associée au cône  $\sigma$  et au sous-réseau de  $N$  engendré par  $\sigma \cap N$ , on a une décomposition (non canonique)

$$X_\sigma \simeq X'_\sigma \times O_\sigma \quad (10)$$

En effet, le point de  $X_\sigma$  correspondant au morphisme de semi-groupes  $x : \sigma^\vee \cap M \rightarrow \mathbf{C}$  est fixe par l'action de  $\mathbf{T}^n$  si et seulement si on a  $t(u)x(u) = x(u)$  pour tout  $t$  dans  $\mathbf{T}^n$ , c'est-à-dire  $x(u) = 0$  pour  $u \neq 0$ . Si  $\sigma$  engendre  $N_{\mathbf{R}}$ , le point  $x$  est le point distingué  $x_\sigma$ . Si  $\sigma$  n'engendre pas  $N_{\mathbf{R}}$ , le cône  $\sigma^\vee$  contient une droite donc deux points opposés non nuls  $u$  et  $-u$ , pour lesquels  $x(u)x(-u) = x(0) = 1$ , de sorte que  $x$  n'est pas fixe.

Plus généralement, on a une inclusion  $\mathbf{C}[\sigma^\perp \cap M] \subset \mathbf{C}[\sigma^\vee \cap M]$  qui induit un morphisme  $\mathbf{T}^n$ -équivariant canonique

$$X_\sigma \rightarrow O_\sigma = \mathbf{T}^n \cdot x_\sigma \simeq \mathbf{T}^{n-\dim(\sigma)}$$

dont on déduit, après choix d'un supplémentaire dans  $N$  du sous-réseau engendré par  $\sigma$ , la décomposition (10).

## 3 Variétés toriques générales

### 3.1 Éventails et variétés toriques

Un éventail est un ensemble fini  $\Delta$  de cônes (polyédraux saillants rationnels) dans  $N_{\mathbf{R}}$  tel que :

- toute face d'un cône de  $\Delta$  est dans  $\Delta$ ;

- l'intersection de deux cônes de  $\Delta$  est une face de chacun de ces deux cônes.

On lui associe la collection de variétés affines  $(X_\sigma)_{\sigma \in \Delta}$  avec des inclusions  $X_\tau \subset X_\sigma$  chaque fois que  $\tau$  est une face de  $\sigma$ . En particulier, pour chaque paire de cônes  $\sigma$  et  $\sigma'$  de  $\Delta$ , les variétés  $X_\sigma$  et  $X_{\sigma'}$  ont un ouvert commun  $X_{\sigma \cap \sigma'}$  le long duquel on peut les « recoller ». On définit la *variété torique*  $X_\Delta$  associée à  $\Delta$  comme l'union des variétés  $X_\sigma$ , où  $\sigma$  parcourt  $\Delta$ , recollées de la façon précédente. Elle est séparée, connexe, de dimension  $n$  et contient  $X_{\{0\}} = \mathbf{T}^n$ . De plus l'action de  $\mathbf{T}^n$  sur lui-même se prolonge à une action sur  $X_\Delta$ . D'après ce qu'on a vu en 2.2, les points fixes de cette action correspondent aux cônes de  $\Delta$  qui engendrent  $N_{\mathbf{R}}$ .

Si  $\sigma$  est un cône, l'ensemble de ses faces est un éventail et la variété torique associée n'est autre que  $X_\sigma$ .

**Exemples 5** (1) Considérons l'éventail  $\Delta_1 = \{\{0\}, \mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-\}$  dans  $\mathbf{R}$ . Les variétés  $X_{\mathbf{R}^+}$  et  $X_{\mathbf{R}^-}$  sont isomorphes à  $\mathbf{C}$ . On les recolle le long de  $X_{\{0\}} = \mathbf{C}^*$ , obtenant ainsi la droite projective  $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ .

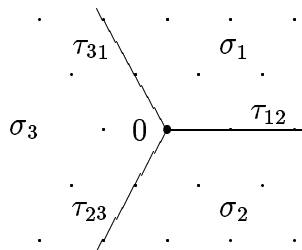
(2) Plus généralement, étant donnée une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $N$ , on pose  $e_0 = -(e_1 + \dots + e_n)$  et on considère l'éventail  $\Delta_n$  des cônes engendrés par les parties propres de  $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ . Il a  $n + 1$  cônes de dimension  $n$ , chacun donnant lieu à une variété affine isomorphe à  $\mathbf{C}^n$  (cf. Exemple 4(1)). La variété  $X_{\Delta_n}$  est l'espace projectif  $\mathbf{P}^n$ . L'action du tore  $\mathbf{T}^n$  est donnée par

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (x_0, \dots, x_n) = (x_0, x_1 t_1, \dots, x_n t_n)$$

Les points fixes de l'action sont les  $n + 1$  points de coordonnées

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$$

Voici une représentation de  $\Delta_2$  dans un réseau hexagonal :



Bien que ce ne soit pas indiqué dans la notation, la variété  $X_\Delta$  dépend du réseau  $N$ . Si on prend un autre réseau  $N' \subset N_{\mathbf{R}}$  contenant  $N$ , on obtient une autre variété torique  $X_{\Delta, N'}$  avec un morphisme  $X_{\Delta, N} \rightarrow X_{\Delta, N'}$  (qui correspond au quotient par l'action du sous-groupe fini  $M/M'$  de  $\mathbf{T}^n$ ). Plus généralement, si  $\Delta$  est un éventail pour le réseau  $N$  et  $\Delta'$  un éventail pour un réseau  $N' \supset N$  tel que chaque cône de  $\Delta$  est contenu dans un cône de  $\Delta'$ , on a un morphisme  $X_{\Delta, N} \rightarrow X_{\Delta', N'}$ .

Encore plus généralement, tout morphisme  $f : N \rightarrow N'$  entre réseaux tel que l'image de chaque cône de  $\Delta$  est contenue dans un cône de  $\Delta'$  induit aussi un morphisme  $\tilde{f} : X_{\Delta, N} \rightarrow X_{\Delta', N'}$ . Le morphisme  $f$  induit un morphisme de groupes  $\mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^{n'}$  et  $\tilde{f}$  est équivariant.

**Exemple 6** On se donne des entiers strictement positifs  $d_0, \dots, d_n$ . En gardant le même éventail  $\Delta_n$  que dans l'exemple 5(2) mais en prenant comme réseau

$$N' = \mathbf{Z} \frac{1}{d_0} e_0 + \mathbf{Z} \frac{1}{d_1} e_1 + \dots + \mathbf{Z} \frac{1}{d_n} e_n \supset \mathbf{Z}^n$$

on obtient comme variété torique l'espace projectif à poids  $\mathbf{P}(d_0, \dots, d_n)$  quotient de  $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$  par l'action

$$\lambda \cdot (x_0, \dots, x_n) = (\lambda^{d_0} x_0, \dots, \lambda^{d_n} x_n)$$

de  $\mathbf{C}^*$ . Le morphisme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^n &\rightarrow \mathbf{P}(d_0, \dots, d_n) \\ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) &\mapsto (\lambda_0^{d_0}, \dots, \lambda_n^{d_n}) \end{aligned}$$

est le quotient par l'action du groupe fini  $\mu_{d_0} \times \dots \times \mu_{d_n}$  (où  $\mu_d$  désigne le groupe des racines  $d^{\text{ièmes}}$  de l'unité).

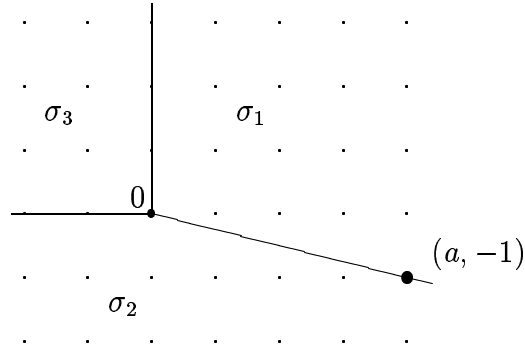
On montre que  $X_\Delta$  est compacte si et seulement si  $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = N_{\mathbf{R}}$ . On dit dans ce cas que l'éventail  $\Delta$  est *complet*. Plus généralement, un morphisme  $\tilde{f} : X_{\Delta, N} \rightarrow X_{\Delta', N'}$  comme ci-dessus est *propre* si et seulement si  $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = \bigcup_{\sigma' \in \Delta'} f^{-1}(\sigma')$ .

Étant donné un éventail  $\Delta$  et un point  $v$  de  $N$ , on peut subdiviser  $\Delta$  de la façon suivante : tout cône de  $\Delta$  contenant  $v$  est remplacé par les cônes engendrés par ses faces propres et  $v$  ; les autres cônes sont laissés inchangés.

On obtient ainsi un éventail  $\Delta'$  et un morphisme propre  $\mathbf{T}^n$ -équivariant  $X_{\Delta'} \rightarrow X_{\Delta}$ .

On appellera *subdivision de  $\Delta$*  toute succession d'opérations de ce type.

**Exemples 7** (1) Considérons l'éventail  $\Delta_a$  constitué des cônes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ci-dessous et de leurs faces



Les variétés  $X_{\sigma_2}$  et  $X_{\sigma_3}$  sont toutes deux isomorphes à  $\mathbf{C}^2$ , tandis que  $X_{\sigma_1} \subset \mathbf{C}^{a+1}$  est le cône étudié dans l'exemple 4(4). La variété torique  $X_{\Delta_a}$  est compacte; c'est le cône dans  $\mathbf{P}^{a+1}$  de sommet  $(0, \dots, 0, 1)$  défini par la condition

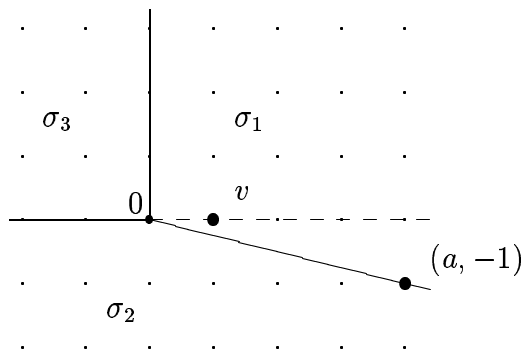
$$\text{rang} \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{a-1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_a \end{pmatrix} \leq 1$$

et dont la base est la courbe image de

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^1 & \rightarrow & \mathbf{P}^{a+1} \\ (\lambda_0, \lambda_1) & \mapsto & (\lambda_0^a, \lambda_0^{a-1}\lambda_1, \dots, \lambda_1^a, 0) \end{array}$$

L'ouvert  $X_{\sigma_1}$  est défini par  $y_{a+1} \neq 0$ , l'ouvert  $X_{\sigma_2}$  par  $y_a \neq 0$  et l'ouvert  $X_{\sigma_3}$  par  $y_0 \neq 0$ .

(2) On peut subdiviser ainsi l'éventail  $\Delta_a$  :

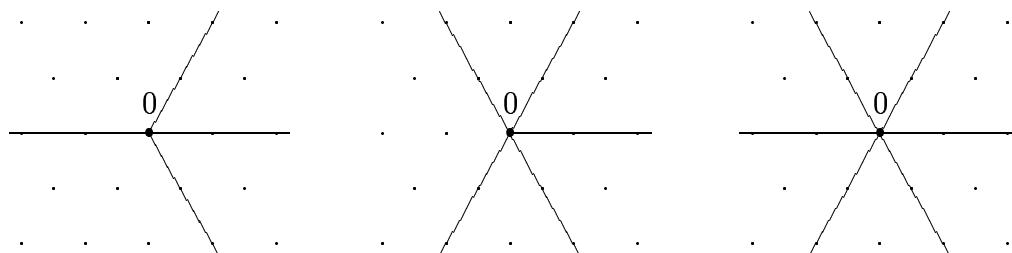


L'application  $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2/\mathbf{R}e_1$  envoie l'éventail subdivisé  $\tilde{\Delta}_a$  sur l'éventail  $\Delta_1$  de l'exemple 5(1). On obtient donc des morphismes

$$\begin{array}{ccc} X_{\tilde{\Delta}_a} & \xrightarrow{f} & \mathbf{P}^1 \\ \downarrow & & \\ X_{\Delta_a} & & \end{array}$$

Le morphisme  $f$  est un fibré en droites projectives. La flèche verticale contracte une section de  $f$  sur le sommet du cône  $X_{\Delta_a}$ .

(3) Reprenons l'exemple 4(2), où  $\sigma = \mathbf{R}^+e_1 + \dots + \mathbf{R}^+e_n$ . Si  $v = e_1 + \dots + e_n$ , la subdivision  $\Delta$  consiste en tous les cônes engendrés par les parties de  $\{e_1, \dots, e_n, v\}$  ne contenant pas  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Le morphisme induit  $X_\Delta \rightarrow X_\sigma = \mathbf{C}^n$  est l'éclatement de l'origine. Les éventails suivants correspondent aux éclatements du plan projectif en 1, 2 et 3 points respectivement :



## 3.2 Désingularisation des variétés toriques

Il y a différentes façons de définir la lissité d'une variété algébrique de dimension  $n$  en un point  $x$ . Si on considère la présentation de  $X_\sigma$  par les équations  $F_1 = \dots = F_m = 0$  dans  $\mathbf{C}^s$ , on dit que  $X_\sigma$  est *lisse en  $x$*  si la matrice jacobienne

$$\left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq s}}$$

est de rang  $s - n$ .

De nouveau, cette définition n'est pas intrinsèque. On peut démontrer qu'elle est équivalente à dire que l'idéal maximal  $\mathfrak{m}_x$  de  $A_\sigma$  correspondant à  $x$  (cf. 2.2) vérifie

$$\dim_{\mathbf{C}}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) = n$$

La première version de cette définition entraîne immédiatement que tout ouvert de  $\mathbf{C}^n$  est lisse. En particulier, il ressort de l'exemple 4(3) que *si  $\sigma$  est engendré par une partie d'une base de  $N$ , la variété  $X_\sigma$  est lisse*. On peut montrer que la réciproque est vraie (on peut le constater sur l'exemple 4(4)).

Lorsque  $\sigma$  est *simplicial*, c'est-à-dire qu'il est engendré par  $\dim(\sigma)$  éléments de  $N$ , on considère le sous-réseau  $N'$  de  $N$  engendré par les générateurs de  $\sigma$  et les éléments de  $N$  dans un supplémentaire dans  $N_{\mathbf{Q}}$  de l'espace vectoriel engendré par  $\sigma$ . La variété torique  $X_{\sigma, N'}$  est alors lisse et le morphisme induit  $X_{\sigma, N'} \rightarrow X_{\sigma, N}$  comme en 3.1 est un quotient par le groupe fini  $M'/M$ . On dit que  $X_\sigma$  a des *singularités quotient*.

Étant donné un éventail  $\Delta$ , *la variété  $X_\Delta$  est lisse si et seulement si chaque cône de  $\Delta$  est engendré par une partie d'une base de  $N$* .

Il n'est pas très difficile de montrer qu'on peut toujours subdiviser un éventail en un éventail simplicial (c'est-à-dire que tout cône de dimension  $k$  est engendré par  $k$  vecteurs).

Soient  $\sigma$  un cône simplicial et  $v_1, \dots, v_k$  les premiers points de  $N$  le long des arêtes de  $\sigma$ . On note  $N_\sigma$  le sous-réseau de  $N$  qu'ils engendrent. La variété  $X_\sigma$  est lisse si et seulement si l'entier  $m_\sigma = [N : N_\sigma]$  vaut 1. Si  $m_\sigma > 1$ , tout élément  $v = \sum_i t_i v_i$  de  $N$  (où  $t_i \in \mathbf{Q}^+$ ) avec  $\sum t_i$  *minimal non nul* vérifie

$0 \leq t_i < 1$  pour chaque  $i$ . Si on effectue la subdivision correspondant à  $v$ , on obtient un cône  $\sigma_i$  pour chaque  $t_i$  non nul et  $m_{\sigma_i} = t_i m_\sigma$ . On a ainsi un algorithme pour résoudre les singularités d'une variété torique.

**Théorème 8** *Pour chaque variété torique  $X_\Delta$ , il existe une subdivision  $\Delta'$  de  $\Delta$  et une résolution des singularités  $X_{\Delta'} \rightarrow X_\Delta$ .*

Par exemple, dans l'exemple 7(2), la subdivision  $\tilde{\Delta}_a$  de  $\Delta_a$  fournit une désingularisation du cône  $X_{\Delta_a}$ .

### 3.3 Topologie des variétés toriques

Commençons par étudier la topologie des variétés toriques affines.

**Proposition 9** *Pour chaque cône  $\sigma$ , la variété  $X_\sigma$  se rétracte par déformation sur l'orbite  $O_\sigma$ . En particulier, on a*

$$\chi(X_\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ engendre } N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Si  $\sigma$  est un cône de dimension  $n$ , on va définir une homotopie

$$h : X_\sigma \times [0, 1] \rightarrow X_\sigma$$

de façon que  $h_1$  soit l'identité de  $X_\sigma$ , que  $h_0$  soit l'application constante d'image  $x_\sigma$  et que  $h|_{\{x_\sigma\} \times [0, 1]} = x_\sigma$ . Soit  $v$  un point de  $N$  à l'intérieur de  $\sigma$ , de sorte que  $\langle \cdot, v \rangle$  est strictement positif sur  $\sigma^\vee - \{0\}$ . Considérant les points de  $X_\sigma$  comme des morphismes de semi-groupes  $\sigma^\vee \cap M \rightarrow \mathbf{C}$ , on définit  $h$  par

$$h(x, t)(u) = \begin{cases} t^{\langle u, v \rangle} x(u) & \text{si } t > 0 \\ x_\sigma & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On a bien  $h(x_\sigma, t) = x_\sigma$ . Si  $u \in (\sigma^\vee \cap M) - \{0\}$ , on a  $\langle u, v \rangle > 0$  et  $h(x, t)(u)$  tend vers  $0 = x_\sigma(u)$  quand  $t$  tend vers 0. Comme des générateurs  $u_1, \dots, u_s$  de  $\sigma^\vee \cap M$  définissent des coordonnées sur  $X_\sigma \subset \mathbf{C}^s$ , l'application  $h$  est bien continue. Ceci montre que  $X_\sigma$  est contractile dans ce cas.

Dans le cas général, on utilise la décomposition (10) pour en déduire que  $X_\sigma$  se rétracte par déformation sur  $O_\sigma$ . Cela entraîne

$$\chi(X_\sigma) = \chi(O_\sigma) = \chi(\mathbf{T}^{n-\dim(\sigma)}) = \chi(\mathbf{S}^1)^{n-\dim(\sigma)} = 0$$

si  $n - \dim(\sigma) > 0$  et 1 sinon. □

Passons maintenant aux variétés toriques générales.

**Corollaire 10** *Pour tout éventail  $\Delta$ , on a*

$$\chi(X_\Delta) = \text{Card}\{\text{cônes de dimension } n \text{ dans } \Delta\}$$

*Si  $\Delta$  contient un tel cône, la variété  $X_\Delta$  est simplement connexe.*

**DÉMONSTRATION.** Pour tout espace topologique  $X$  recouvert par des ouverts  $X_1, \dots, X_s$ , on a

$$\chi(X) = \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_k \leq s} (-1)^k \chi(X_{i_0} \cap \dots \cap X_{i_k})$$

Dans notre cas, on recouvre  $X_\Delta$  par les ouverts  $X_\sigma$  correspondants aux cônes de  $\Delta$ . Chaque intersection est encore du même type. Il suffit alors d'utiliser la proposition 9 : seuls les cônes de dimension  $n$  (correspondant obligatoirement à  $k = 0$ ) « comptent ».

C'est un fait général que pour toute sous-variété fermée stricte  $Y$  d'une variété normale  $X$ , on a une surjection  $\pi_1(X - Y) \twoheadrightarrow \pi_1(X)$ . Dans notre cas, si  $\sigma$  est un cône dans  $\Delta$  qui engendre  $N_{\mathbf{R}}$ , on a donc surjection  $\pi_1(X_\sigma) \twoheadrightarrow \pi_1(X_\Delta)$ , et la proposition 9 permet de conclure. □

Soit  $\Delta$  un éventail. On veut maintenant calculer les *nombre de Betti* de  $X_\Delta$ , définis par  $b_i(X_\Delta) = \dim(H^i(X_\Delta, \mathbf{R}))$ . On notera  $d_j$  le nombre de cônes de dimension  $j$  dans  $\Delta$ .

**Théorème 11** *Pour tout éventail  $\Delta$  simplicial et complet, on a*

$$b_{2k}(X_\Delta) = \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{i}{k} d_{n-i}$$

*les nombres de Betti impairs étant nuls.*

On retrouve le corollaire 10 :

$$\chi(X_\Delta) = \sum_j (-1)^j b_j(X_\Delta) = \sum_k b_{2k}(X_\Delta) = \sum_{0 \leq k \leq i \leq n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} d_{n-i} = d_n$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Il y a plusieurs façons de démontrer ce théorème, toutes basées sur le fait que comme tout ensemble sur lequel un groupe agit, la variété  $X_\Delta$  est réunion disjointe de ses orbites sous le groupe  $\mathbf{T}^n$ . D'après ce qu'on a vu en 2.2, les points fixes de l'action du tore  $\mathbf{T}^n$  sur la variété  $X_\Delta$  correspondent aux cônes de  $\Delta$  qui engendrent  $N_{\mathbf{R}}$ . Plus généralement, à chaque cône  $\sigma$  de  $\Delta$  est associé un point distingué  $x_\sigma$  de  $X_\Delta$ , dont l'orbite  $O_\sigma$  est isomorphe à  $\mathbf{T}^{n-\dim(\sigma)}$  et on obtient ainsi toutes les orbites de  $\mathbf{T}^n$  dans  $X_\Delta$ .

On peut tout d'abord utiliser le fait qu'il existe, pour toute variété algébrique complexe  $X$ , un polynôme  $P_X$  qui vérifie :

- si  $X$  est lisse et compacte,  $P_X(t) = \sum_i b_i(X)t^i$  ;
- si  $Y$  est une sous-variété fermée de  $X$ , on a  $P_X(t) = P_Y(t) + P_{X-Y}(t)$  ;
- si  $X$  et  $Y$  sont des variétés, on a  $P_{X \times Y}(t) = P_X(t)P_Y(t)$ .

On a par exemple

$$P_{\mathbf{C}^*}(t) = P_{\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}}(t) = P_{\mathbf{P}^1}(t) - P_{\{0, \infty\}}(t) = t^2 + 1 - 2 = t^2 - 1$$

On en déduit

$$P_{X_\Delta}(t) = \sum_{\sigma \in \Delta} P_{O_\sigma}(t) = \sum_{\sigma \in \Delta} P_{\mathbf{T}^{n-\dim(\sigma)}}(t) = \sum_{\sigma \in \Delta} (t^2 - 1)^{n-\dim(\sigma)}$$

d'où le théorème lorsque la variété  $X_\Delta$  est *lisse et compacte*.

On peut aussi, de façon plus exotique, utiliser le fait que les variétés toriques sont définies par des équations à coefficients entiers, qui peuvent être réduites modulo tout nombre premier  $p$ . On en déduit que pour tout  $r > 0$ , on a

$$\text{Card}(X_\Delta(\mathbf{F}_{p^r})) = \sum_{\sigma \in \Delta} \text{Card}(O_\sigma(\mathbf{F}_{p^r})) = \sum_{\sigma \in \Delta} (p^r - 1)^{n-\dim(\sigma)}$$

On utilise ensuite (lorsque  $X_\Delta$  est projective et lisse) les conjectures de Weil démontrées par Deligne, qui disent qu'il existe des nombres complexes  $\lambda_{ij}$  uniquement déterminés, de module  $p^{i/2}$ , tels que

$$\text{Card}(X_\Delta(\mathbf{F}_{p^r})) = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{b_i(X_\Delta)} \lambda_{ij}^r$$

pour conclure (exercice!).

Lorsque  $\Delta$  n'est que simplicial, on a vu en 3.2 que la variété  $X_\Delta$  n'a que des singularités quotient. Le premier des deux arguments ci-dessus reste valable si l'on remplace la cohomologie ordinaire par la cohomologie d'intersection et que l'on remarque que pour les variétés compactes à singularités quotient, ces deux cohomologies coïncident. On peut aussi trouver une base explicite de la cohomologie formée de classes d'adhérences d'orbites.  $\square$

## 4 Retour aux polytopes

On a maintenant tout ce qu'il nous faut pour démontrer les relations (2) et (3). La méthode est simplement d'associer à un polytope l'éventail construit sur ses faces, d'appliquer le théorème 11 puis d'utiliser des résultats généraux sur la topologie des variétés compactes à singularités quotient.

### 4.1 Variété torique associée à un polytope

Soit  $Q$  un polytope dans  $N_{\mathbf{R}}$ . Une *face* (propre) de  $Q$  est un sous-ensemble de  $Q$  du type

$$\{v \in Q \mid \langle u, v \rangle = c\}$$

où  $u \in M_{\mathbf{R}}$  et  $c \in \mathbf{R}$  sont tels que  $\langle u, v \rangle \geq c$  sur  $Q$  (en particulier,  $\emptyset$  est une face de  $Q$ ). Lorsque l'origine est dans l'intérieur de  $Q$ , on définit le *dual* de  $Q$  par

$$Q^\vee = \{u \in M_{\mathbf{R}} \mid \langle u, v \rangle \leq 1 \text{ pour tout } v \in Q\}$$

Par exemple, le dual de l'octaèdre de sommets  $(\pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0)$  dans  $\mathbf{R}^3$  et  $(0, 0, \pm 1)$  est le cube de sommets  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ .

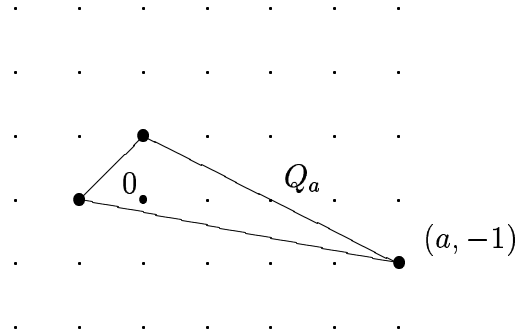
**Proposition 12** *L'ensemble  $Q^\vee$  est un polytope dans  $M_{\mathbf{R}}$  à sommets dans  $M_{\mathbf{Q}}$  et  $(Q^\vee)^\vee = Q$ . Si  $F$  est une face de  $Q$ ,*

$$F^0 = \{u \in Q^\vee \mid \langle u, v \rangle = 1 \text{ pour tout } v \in F\}$$

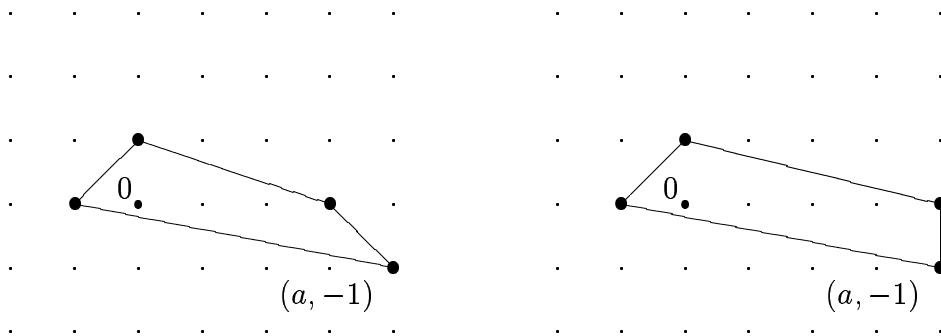
*est une face de  $Q^\vee$  et  $\dim(F) + \dim(F^0) = n - 1$ . En particulier, les facettes de  $Q$  correspondent aux sommets de  $Q^\vee$  et viceversa.*

DÉMONSTRATION. Plutôt que de refaire toutes les démonstrations, une astuce permet de se ramener aux résultats déjà vus sur les cônes : étant donné un polytope  $Q$ , on considère le cône  $\sigma$  engendré par  $(-Q) \times \{1\}$  dans l'espace vectoriel  $N_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}$ . On a alors  $\sigma^\vee \cap (M_{\mathbf{R}} \times \{1\}) = Q^\vee \times \{1\}$  et, pour toute face  $F$  de  $Q$  définie par  $\langle u, v \rangle = c$ , l'élément  $(-u, -c)$  de  $M_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}$  définit une face de  $\sigma$ . □

Étant donné un polytope  $Q$  dans  $N_{\mathbf{R}}$  contenant l'origine dans son intérieur, on note  $\Delta_Q$  l'éventail des cônes engendrés par les faces de  $Q$ . Par exemple, le polytope  $Q_a$



engendre l'éventail  $\Delta_a$  de l'exemple 7(2) et chacun des polytopes



engendre l'éventail  $\tilde{\Delta}_a$ .

Lorsque  $Q$  est à sommets dans  $N_{\mathbf{Q}}$ , on note  $X_Q$  la variété torique associée à l'éventail  $\Delta_Q$ ; elle est *compacte* (cf. 3.1). On peut aussi définir, à partir d'un polytope  $P$  dans  $M_{\mathbf{R}}$  d'intérieur non vide, un éventail  $\Delta_P$  de la façon suivante : pour toute face (propre)  $F$  de  $P$ , on définit le cône

$$\sigma_F = \{v \in N_{\mathbf{R}} \mid \langle u, v \rangle \geq \langle u', v \rangle \text{ pour tout } u \in F \text{ et tout } u' \in P\}$$

Ces cônes forment un éventail  $\Delta_P$  qui vérifie  $\Delta_{\lambda P+u} = \Delta_P$  pour tout  $\lambda > 0$  et tout  $u$  dans  $M_{\mathbf{R}}$ . Lorsque  $P$  contient l'origine dans son intérieur, c'est l'éventail construit sur les faces de son dual. Lorsque  $P$  est à sommets dans  $M_{\mathbf{Q}}$ , on note  $X_P$  la variété torique associée.

Tout polytope simplicial dans  $\mathbf{N}_{\mathbf{R}}$  peut être approximé<sup>1</sup> (sans changer sa combinatoire) par un polytope simplicial  $Q$  à sommets dans  $\mathbf{N}_{\mathbf{Q}}$ . S'il contient l'origine dans son intérieur, on lui associe, selon la procédure décrite ci-dessus, une variété torique compacte  $X_Q$  de dimension complexe  $n$  à singularités quotient (cf. 3.2). Le nombre  $d_i$  de cônes de dimension  $i$  dans  $\Delta$  est, avec les notations de 1.1, le nombre  $f_{i-1}$  de faces de dimension  $i-1$  de  $Q$  (y compris pour  $i=0$ !). Les nombres de Betti  $b_{2k}(X_Q) = \dim(H^{2k}(X_Q, \mathbf{R}))$  sont donc, par le théorème 11, les nombres  $h_k$  définis en 1.1.

Pour toute variété complexe compacte  $X$  (qu'elle soit torique ou non), il existe pour chaque entier  $i$  et chaque entier  $j$  une opération

$$\smile_{i,j} : H^i(X, \mathbf{R}) \times H^j(X, \mathbf{R}) \rightarrow H^{i+j}(X, \mathbf{R})$$

dite *cup-produit*. On utilise maintenant deux théorèmes fondamentaux (et difficiles) valables lorsque  $X$  est à singularités quotient.

- Tout d'abord, la *dualité de Poincaré* dit que si  $n$  est la dimension (complexe) de  $X$ , pour tout entier  $i$ , le cup-produit

$$\smile_{i,2n-i} : H^i(X, \mathbf{R}) \times H^{2n-i}(X, \mathbf{R}) \rightarrow H^{2n}(X, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}$$

est une forme bilinéaire non dégénérée. Cela entraîne, avec le théorème 11, les relations de Dehn–Sommerville (2) pour les polytopes simpliciaux.

---

<sup>1</sup>Ce n'est plus vrai pour les polytopes non simpliciaux!

- Ensuite, le *théorème de Lefschetz difficile* dit qu'il existe une classe  $h$  dans  $H^2(X, \mathbf{R})$  tel que les cup-produits par  $h$

$$\cdot \smile_{i-2,2} h : H^{i-2}(X, \mathbf{R}) \rightarrow H^i(X, \mathbf{R})$$

soient injectifs pour  $2i \leq n$ . On en déduit, avec le théorème 11, les relations (3) pour les polytopes simpliciaux.

## 4.2 Diviseurs sur une variété torique

À un polytope  $P$  dans  $M_{\mathbf{R}}$  à sommets dans  $M_{\mathbf{Q}}$  et d'intérieur non vide, on a associé un éventail  $\Delta_P$  et une variété torique compacte  $X_P$ . Il est clair que des polytopes différents peuvent donner lieu au même éventail. On peut donc soupçonner que la donnée de  $P$  correspond à celle d'un objet supplémentaire attaché à  $X_P$ .

C'est en effet le cas (voir exemple 14(2) ci-dessous). Pour pouvoir définir et étudier cet objet, nous aurons besoin de la notion de *diviseur* sur une variété (torique) complexe.

Revenons à un éventail  $\Delta$  dans  $N_{\mathbf{R}}$  et considérons une sous-variété  $V$  de  $X_{\Delta}$  invariante par l'action de  $\mathbf{T}^n$  et irréductible (c'est-à-dire qui n'est pas réunion de deux sous-variétés fermées strictes). La variété  $V$  est réunion disjointe d'orbites et comme celles-ci sont en nombre fini, l'une d'elles est dense, c'est-à-dire que  $V$  est son adhérence. Rappelons que, pour tout cône  $\sigma$  dans  $\Delta$ , nous avons noté  $O_{\sigma}$  l'orbite du point distingué  $x_{\sigma}$  de  $X_{\sigma}$ ; nous admettrons le résultat suivant.

**Proposition 13** *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \rightarrow & \{ \text{sous-variétés invariantes irréductibles de } X_{\Delta} \} \\ \sigma & \mapsto & \overline{O}_{\sigma} \end{array}$$

*est une bijection décroissante. De plus, pour tout  $\sigma$  dans  $\Delta$ ,*

$$\overline{O}_{\sigma} = \coprod_{\tau \in \Delta, \sigma \text{ face de } \tau} O_{\tau}$$

Comme  $O_\sigma \simeq \mathbf{T}^{n-\dim(\sigma)}$  (cf. 2.2), les *hypersurfaces* invariantes irréductibles de  $X_\Delta$ , qui sont les objets qui nous intéresseront ici, correspondent donc aux cônes de dimension 1 (les *rayons*) de  $\Delta$ . Remarquons que le complémentaire de l'orbite dense  $O_{\{0\}}$  dans  $X_\Delta$  est la réunion de ces hypersurfaces.

Un *diviseur* ( $\mathbf{T}^n$ -invariant) sur  $X_\Delta$  est une combinaison linéaire formelle

$$\sum_{\tau \text{ rayon de } \Delta} m_\tau D_\tau$$

à coefficients rationnels de ces hypersurfaces.

**Exemples 14** (1) Le polytope  $\Delta_n$  étudié dans l'exemple 5(2) est associé à la variété torique  $\mathbf{P}^n$ . Il a  $n + 1$  rayons  $D_0, \dots, D_n$ , qui correspondent aux diviseurs invariants d'équations respectives  $x_0 = 0, \dots, x_n = 0$ . Le complémentaire de leur réunion est l'orbite dense définie par  $x_i \neq 0$  pour tout  $i$ .

(2) À un polytope  $P$  dans  $M_{\mathbf{R}}$  à sommets dans  $M_{\mathbf{Q}}$  et d'intérieur non vide, on a associé un éventail  $\Delta_P$  et une variété torique compacte  $X_P$ . Pour chaque rayon  $\tau$  de  $\Delta_P$ , on note  $v_\tau$  le premier vecteur non nul de  $N$  sur  $\tau$  et on définit un diviseur (rationnel)  $D_P$  sur la variété  $X_P$  en posant

$$D_P = \sum_{\tau \text{ rayon de } \Delta} \max_{u \in P} \langle u, v_\tau \rangle D_\tau$$

Soit  $\sigma$  un cône. À tout élément  $u$  de  $\sigma^\vee \cap M$  correspond (cf. 2.2) une fonction « coordonnée »  $\chi^u$  sur  $X_\sigma$ . Comme  $\sigma^\vee \cap M$  engendre le groupe  $M$ , tout élément  $u$  de  $M$  est différence de deux éléments  $u'$  et  $u''$  de  $\sigma^\vee \cap M$ . La fonction  $\chi^u$ , définie sur l'orbite dense  $O_{\{0\}}$ , s'écrit globalement comme un quotient  $\chi^{u'}/\chi^{u''}$  de fonctions définies sur  $X_\sigma$ . On l'appelle une *fonction rationnelle sur  $X_\sigma$* . Le long d'une hypersurface  $D_\tau$ , elle peut soit s'annuler à l'ordre  $m_\tau$ , soit avoir un pôle dont on note l'ordre  $-m_\tau$ ; en d'autres termes, on a  $m_\tau = \text{ord}_{D_\tau}(\chi^{u'}) - \text{ord}_{D_\tau}(\chi^{u''})$ .

Le *diviseur de  $\chi^u$*  est par définition le diviseur entier

$$\text{div}(\chi^u) = \sum_{\tau \text{ rayon de } \sigma} m_\tau D_\tau$$

Les diviseurs obtenus de cette façon sont appelés *diviseurs de Cartier* ( $\mathbf{T}^n$ -invariants) sur  $X_\sigma$  ; ils forment un sous-groupe du groupe (abélien libre) des diviseurs entiers ( $\mathbf{T}^n$ -invariants) sur  $X_\sigma$ .

**Exemple 15** Reprenons la surface torique affine  $X_{\sigma_a}$  étudiée dans l'exemple 4(4), dont on garde les notations. On a deux hypersurfaces invariantes irréductibles :  $D_1$ , définie par  $Y_1 = \cdots = Y_a = 0$ , et  $D_2$ , définie par  $Y_0 = \cdots = Y_{a-1} = 0$ , correspondant aux rayons engendrés par  $ae_1 - e_2$  et  $e_2$  respectivement (cf. l'action de  $\mathbf{T}^2$  donnée dans (9)).

La surface  $X_{\sigma_a}$  est paramétrée (cf. exemple 7(1)) par

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^2 &\rightarrow X_{\sigma_a} \subset \mathbf{C}^{a+1} \\ (\lambda_0, \lambda_1) &\mapsto (\lambda_0^a, \lambda_0^{a-1}\lambda_1, \dots, \lambda_1^a) \end{aligned}$$

On voit ainsi que la fonction coordonnée  $X_1 = Y_0 = \chi^{e_1^*}$  s'annule le long de  $D_1$  à l'ordre  $a$ , tandis que la fonction  $X_1 X_2^a = Y_a = \chi^{e_1^* + ae_2^*}$  s'annule le long de  $D_2$  à l'ordre  $a$ . Un élément  $u = pe_1^* + qe_2^*$  de  $M$  définit la fonction  $\chi^u = X_1^p X_2^q$  et

$$\operatorname{div}(\chi^u) = apD_1 + q(D_2 - D_1) = (ap - q)D_1 + qD_2$$

On remarque en particulier que lorsque  $a > 1$ , ni  $D_1$ , ni  $D_2$  ne sont des diviseurs de Cartier. C'est dû à la présence d'une singularité sur  $X_{\sigma_a}$ .

Lorsqu'on se place dans la situation plus générale d'un éventail  $\Delta$ , tout élément  $u$  de  $M$  définit encore une fonction rationnelle  $\chi^u$  sur la variété  $X_\Delta$ , bien définie et ne s'annulant pas sur l'orbite dense, avec des pôles et des zéros le long des hypersurfaces  $D_\tau$ . Le lemme ci-dessous détermine son diviseur.

**Lemme 16** *Pour chaque rayon  $\tau$  de  $\Delta$ , on note  $v_\tau$  le premier vecteur non nul de  $N$  sur  $\tau$ . Pour tout  $u$  dans  $M$ , on a*

$$\operatorname{div}(\chi^u) = \sum_{\tau \text{ rayon de } \Delta} \langle u, v_\tau \rangle D_\tau$$

**DÉMONSTRATION.** Pour calculer l'ordre de  $\chi^u$  sur  $D_\tau$ , on peut se placer dans l'ouvert  $X_\tau$ . Celui-ci est lisse car  $\tau$  est de dimension 1, et même, plus

précisément, isomorphe à  $\mathbf{C} \times (\mathbf{C}^*)^{n-1}$ , l'hypersurface  $D_\tau$  correspondant à  $\{0\} \times (\mathbf{C}^*)^{n-1}$  (cf. (10)). On est donc ramené au cas de la dimension 1, où  $N = \mathbf{Z}$ ,  $X_\tau = \mathbf{C}$  et  $v_\tau = 1$ . La fonction  $\chi^u$  correspondant à  $u \in M = \mathbf{Z}$  est  $X_1^u$  et son ordre d'annulation en 0 est  $u$ .  $\square$

Supposons  $\Delta$  *complet*, de sorte que  $X_\Delta$  est compacte. Le lemme montre que toute fonction  $\chi^u$  non constante a obligatoirement des pôles : c'est le principe du maximum !

Un diviseur  $D = \sum_\tau m_\tau D_\tau$  sur  $X_\Delta$  est un *diviseur de Cartier* s'il est entier et si c'est localement le diviseur d'une fonction rationnelle. Plus précisément, on demande que pour tout  $\sigma$  dans  $\Delta$ , il existe  $u_\sigma \in M$  tel que  $\text{div}(\chi^{u_\sigma}) = D$  dans  $X_\sigma$  (en particulier,  $\chi^{u_\sigma}$  ne s'annule pas ; on peut la prendre constante égale à 1). Grâce au lemme 16, appliqué à l'éventail des faces de  $\sigma$ , cela signifie exactement que, *pour tout cône  $\sigma$  de  $\Delta$  de dimension  $n$ , il existe un élément  $u_\sigma$  de  $M$  tel que  $\langle u_\sigma, v_\tau \rangle = m_\tau$  pour tout rayon  $\tau$  de  $\Delta$  contenu dans  $\sigma$ .*

Comme le montre l'exemple 15, il peut exister sur  $X_\Delta$  des diviseurs entiers qui ne sont pas des diviseurs de Cartier. En revanche, si  $X_\Delta$  est *lisse*, il ressort de 3.2 que tout diviseur entier est un diviseur de Cartier.

On associe à un diviseur de Cartier  $D$  sur  $X_\Delta$  la fonction  $\psi_D : N_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

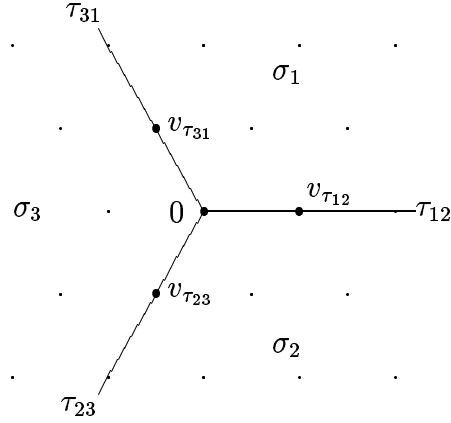
$$\psi_D(v) = \langle u_\sigma, v \rangle \quad \text{si } v \in \sigma$$

On vérifie qu'elle est bien définie et *continue* sur  $N_{\mathbf{R}}$ . Elle est déterminée par le fait qu'elle est linéaire sur chaque cône de  $\Delta$  et vérifie  $\psi_D(v_\tau) = m_\tau$  pour tout rayon  $\tau$  de  $\Delta$ . On a  $\psi_{\text{div}(\chi^u)} = \langle u, \cdot \rangle$  et, pour tous diviseurs de Cartier  $D$  et  $E$  sur  $X_\Delta$ ,

$$\psi_{D+E} = \psi_D + \psi_E \tag{11}$$

Inversement, toute fonction continue  $\psi : N_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$  qui est linéaire et entière (c'est-à-dire définie par un élément de  $N$ ) sur chaque cône de  $\Delta$  définit un diviseur de Cartier  $D$  sur  $X_\Delta$  par la formule  $D = \sum_\tau \psi(v_\tau) D_\tau$ , et  $\psi = \psi_D$ .

**Exemples 17** (1) Reprenons l'éventail  $\Delta_2$



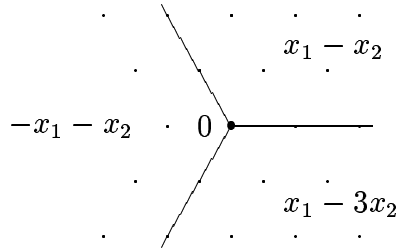
étudié dans l'exemple 5(2), dont la variété torique associée est  $\mathbf{P}^2$ . Pour le diviseur

$$D = D_{\tau_{12}} + 2D_{\tau_{23}} - D_{\tau_{31}}$$

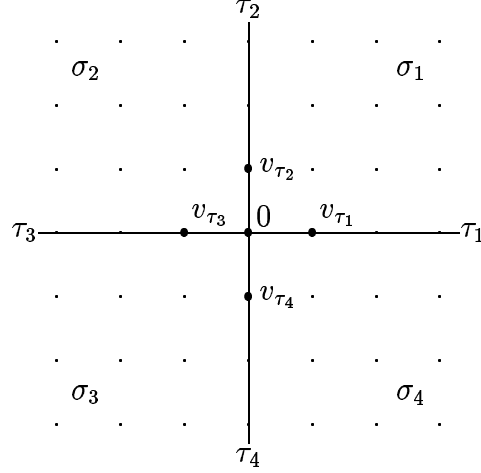
le lemme 16 donne les valeurs suivantes

$$\begin{array}{lll} \langle u_{\sigma_1}, v_{\tau_{12}} \rangle = 1 & \langle u_{\sigma_1}, v_{\tau_{31}} \rangle = -1 & \text{donc } u_{\sigma_1} = e_1^* - e_2^* \\ \langle u_{\sigma_2}, v_{\tau_{23}} \rangle = 2 & \langle u_{\sigma_2}, v_{\tau_{12}} \rangle = 1 & \text{donc } u_{\sigma_2} = e_1^* - 3e_2^* \\ \langle u_{\sigma_3}, v_{\tau_{31}} \rangle = -1 & \langle u_{\sigma_3}, v_{\tau_{23}} \rangle = 2 & \text{donc } u_{\sigma_3} = -e_1^* - e_2^* \end{array}$$

La fonction  $\psi_D$  est donnée par



(2) Considérons l'éventail



et le diviseur

$$D = D_{\tau_1} - D_{\tau_2} + 2D_{\tau_3}$$

Le lemme 16 donne les valeurs suivantes

$$u_{\sigma_1} = e_1^* - e_2^* \quad u_{\sigma_2} = -2e_1^* - e_2^* \quad u_{\sigma_3} = -2e_1^* \quad u_{\sigma_4} = e_1^*$$

de sorte que

$$\psi_D(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 - x_2 & \text{dans } \sigma_1 \\ -2x_1 - x_2 & \text{dans } \sigma_2 \\ -2x_1 & \text{dans } \sigma_3 \\ x_1 & \text{dans } \sigma_4 \end{cases}$$

(3) Le polytope  $\Delta_n$  étudié dans les exemples 5(2) et 14(1) est associé à la variété torique  $\mathbf{P}^n$ . Il a  $n+1$  rayons  $D_0, \dots, D_n$  et  $n+1$  cônes de dimension  $n$  définis par  $\sigma_i = \langle e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n \rangle$ , pour  $i = 0, \dots, n$ . Pour le diviseur  $D_0$ , on a  $u_{\sigma_0} = 0$  et  $u_{\sigma_i} = -e_i^*$  pour  $i = 1, \dots, n$ , de sorte que  $\psi_{D_0}(x_1, \dots, x_n) = -x_i$  dans  $\sigma_i$  et 0 dans  $\sigma_0$ .

(4) Soit  $P$  un polytope dans  $M_{\mathbf{R}}$ , à sommets dans  $M$  et d'intérieur non vide. Dans l'exemple 14(2), on a défini un diviseur  $D_P$  sur la variété torique associée  $X_P$  par la formule

$$D_P = \sum_{\tau \text{ rayon de } \Delta} \max_{u \in P} \langle u, v_\tau \rangle D_\tau$$

C'est un diviseur de Cartier, la fonction  $\psi$  associée étant donnée par

$$\psi_P(v) = \max_{u \in P} \langle u, v \rangle$$

On l'appelle parfois la *fonction d'appui* du convexe compact  $P$ . Elle permet de retrouver  $P$  par la formule

$$P = \{u \in M_{\mathbf{R}} \mid \langle u, \cdot \rangle \leq \psi_P \text{ comme fonctions sur } N_{\mathbf{R}}\} \quad (12)$$

On a, pour tout entier  $m > 0$  et tout  $u \in M$ ,

$$D_{mP+u} = mD_P + \text{div}(\chi^u)$$

Lorsque l'origine est dans l'intérieur de  $P$ , le diviseur  $D_P$  est *effectif* (c'est-à-dire que ses coefficients sont positifs) et la fonction  $\psi_P$  est la seule fonction  $N_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$  convexe continue, linéaire sur chaque cône de  $\Delta$  et qui vaut 1 sur chaque facette du polytope dual  $P^\vee$ .

### 4.3 Sections et caractéristique d'Euler des fibrés en droites

Étant donné un éventail complet  $\Delta$  et un diviseur de Cartier  $D$  sur  $X_\Delta$ , on définit un *fibré en droites*  $L_D$  sur  $X_\Delta$  à l'aide des fonctions de transition  $g_{\sigma\sigma'} = \chi^{u_{\sigma'}} / \chi^{u_\sigma}$  (définie sur  $X_\sigma \cap X_{\sigma'} = X_{\sigma \cap \sigma'}$ ). Les sections de ce fibré correspondent aux familles  $(s_\sigma)_{\sigma \in \Delta}$ , avec  $s_\sigma \in A_\sigma$ , telles que  $s_\sigma \chi^{u_{\sigma'}} = s_{\sigma'} \chi^{u_\sigma}$  sur  $X_\sigma \cap X_{\sigma'}$ , soit  $s_{\{0\}} \chi^{u_\sigma} = s_\sigma$ . En d'autres termes, la fonction rationnelle  $s_{\{0\}}$  doit vérifier

$$0 \leq \text{div}(s_{\{0\}}) + \text{div}(\chi^{u_\sigma}) = \text{div}(s_{\{0\}}) + D$$

Notons  $E_D$  l'ensemble des  $u \in M$  tels que

$$\text{div}(\chi^u) + D \geq 0$$

c'est-à-dire, d'après le lemme 16, vérifiant

$$\langle -u, v_\tau \rangle \leq m_\tau \quad (13)$$

pour tout rayon  $\tau$  de  $\Delta$ . Les  $(\chi^u)_{u \in E_D}$  forment une base de l'espace vectoriel  $\Gamma(X_\Delta, L_D)$  des sections de  $L_D$ . La condition (13) dit que  $-u$  est dans le polytope

$$P_D = \{u \in M_{\mathbf{R}} \mid \langle u, v_\tau \rangle \leq m_\tau \text{ pour tout rayon } \tau \text{ de } \Delta\}$$

(il est borné car les  $v_\tau$  engendrent  $N_{\mathbf{R}}$ , mais peut être vide) donc

$$\dim(\Gamma(X_\Delta, L_D)) = \text{Card}(P_D \cap M)$$

On peut aussi retrouver le polytope  $P_D$  à partir de la fonction  $\psi_D$  introduite en 4.2 par la formule

$$P_D = \{u \in M_{\mathbf{R}} \mid \langle u, \cdot \rangle \leq \psi_D \text{ comme fonctions sur } N_{\mathbf{R}}\} \quad (14)$$

Remarquons que, pour tout entier  $m$  positif et tout  $u$  dans  $M$ , on a

$$P_{mD + \text{div}(\chi^u)} = mP_D + u$$

Un point  $u$  de  $-P_D \cap M$  correspond ainsi à une section  $s^u$  de  $L_D$  qui est définie sur  $X_\sigma$  par  $s_\sigma^u = s_{\{0\}}^u \chi^{u_\sigma} = \chi^{u+u_\sigma}$ . En particulier, si  $u_\sigma \in P_D$ , la section  $s^{u_\sigma}$  de  $L_D$  ne s'annule pas sur l'ouvert  $X_\sigma$  de  $X_\Delta$ . Il s'ensuit que *si, pour tout cône  $\sigma$  de  $\Delta$  de dimension  $n$ , on a  $u_\sigma \in P_D$ , les sections de  $L_D$  ne s'annulent simultanément en aucun point de  $X_\Delta$* . Cette condition, à savoir

- (i)  $\langle u_\sigma, v_\tau \rangle \leq m_\tau$  pour tout rayon  $\tau$  de  $\Delta$  et tout cône  $\sigma$  de  $\Delta$  de dimension  $n$ ;

est équivalente à chacune des conditions suivantes :

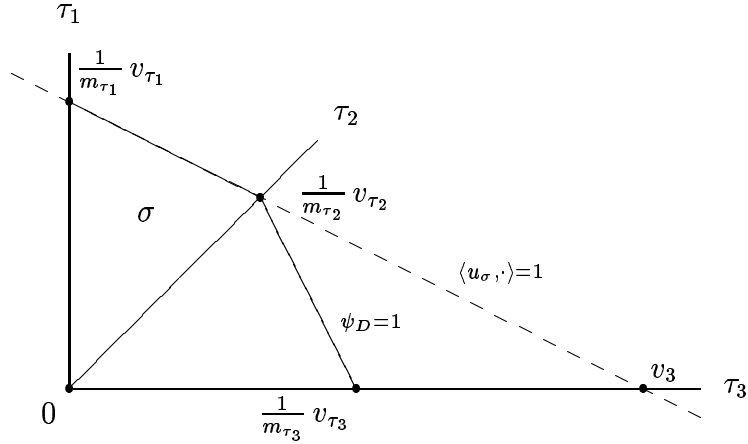
- (ii)  $P_D$  est l'enveloppe convexe des  $u_\sigma$ ;
- (iii) la fonction  $\psi_D$  est convexe;
- (iv) la fonction  $\psi_D$  est la fonction d'appui de  $P_D$ , c'est-à-dire

$$\psi_D(v) = \max_{u \in P_D} \langle u, v \rangle$$

Lorsque tous les coefficients  $m_\tau$  de  $D$  sont positifs (c'est-à-dire que l'origine est dans  $P_D$ ), le polytope  $P_D$  est le polytope dual de l'enveloppe convexe  $Q_D$  des  $\frac{1}{m_\tau} v_\tau$ , pour  $\tau$  décrivant l'ensemble des rayons de  $\Delta$ , et la convexité de  $\psi_D$  est alors aussi équivalente à

- (v) chacun des  $\frac{1}{m_\tau} v_\tau$  est sur la frontière de  $Q_D$ .

Pour comprendre l'équivalence de (i) et (iii), par exemple, il suffit de regarder la figure suivante :



et de remarquer que

$$\psi_D(v_3) \geq 1 \iff \frac{1}{m_{\tau_3}} v_{\tau_3} \in [0, v_3] \iff \langle u_\sigma, \frac{1}{m_{\tau_3}} v_{\tau_3} \rangle \leq 1$$

**Remarques 18** (1) Si  $\Delta'$  est un éventail qui subdivise l'éventail  $\Delta$ , induisant une application propre  $X_{\Delta'} \rightarrow X_\Delta$ , la fonction  $\psi_D$  est encore linéaire et entière sur les cônes de  $\Delta'$ . Elle définit donc un diviseur de Cartier  $D'$  sur  $X_{\Delta'}$  et  $\psi_{D'} = \psi_D$ , donc  $P_{D'} = P_D$  (cf. (14)). Lorsque  $\psi_D$  est convexe, on a

$$\chi(X_{\Delta'}, L_{D'}) = \chi(X_\Delta, L_D) = \text{Card}(P_D \cap M)$$

(2) Si  $D$  et  $E$  sont des diviseurs de Cartier sur  $X_\Delta$  tels que  $\psi_D$  et  $\psi_E$  sont convexes, on déduit de (iv) et de (11) l'égalité

$$P_D + P_E = P_{D+E}$$

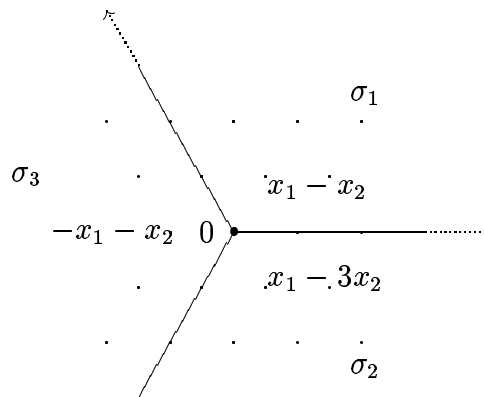
(3) Si le diviseur  $D$  vérifie les conditions ci-dessus, on peut utiliser les  $\chi^u$ , pour  $-u$  dans  $P_D \cap M$ , pour construire une application

$$\begin{aligned} \varphi_D : X_\Delta &\rightarrow \mathbf{P}^{m-1} \\ x &\mapsto (\chi^u(x))_{-u \in P_D \cap M} \end{aligned}$$

avec  $m = \text{Card}(P_D \cap M)$  (elle est bien définie justement parce que les  $\chi^u$  ne s'annulent simultanément en aucun point). Sous certaines conditions (par exemple lorsque  $\psi_D$  est *strictement convexe*<sup>2</sup> et que  $X_\Delta$  est lisse), l'application  $\varphi_D$  réalise un isomorphisme de  $X_\Delta$  sur son image. On a ainsi un modèle projectif explicite pour la variété  $X_\Delta$  : après choix d'une base de  $M$ , elle se réalise comme l'adhérence de l'image de l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^n &\rightarrow \mathbf{P}^{m-1} \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto (t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n})_{(m_1, \dots, m_n) \in -P_D \cap M} \end{aligned}$$

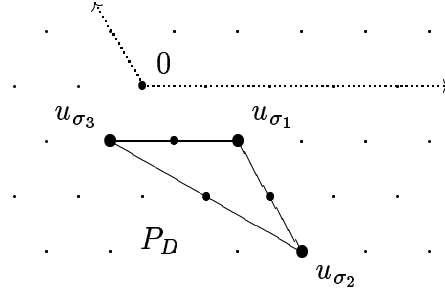
**Exemples 19** (1) Reprenons le diviseur  $D = D_{\tau_{12}} + 2D_{\tau_{23}} - D_{\tau_{31}}$  sur  $\mathbf{P}^2$  étudié dans l'exemple 17(1). La fonction  $\psi_D$  est donnée par



L'espace vectoriel des sections de  $L_D$  a pour base les  $\chi^{-u}$ , où  $u$  est un point

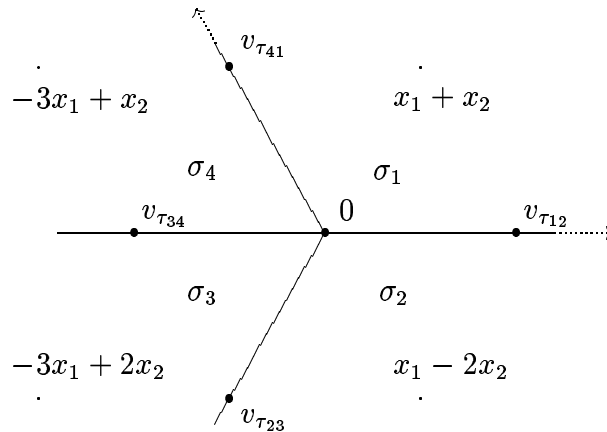
<sup>2</sup>C'est-à-dire que  $\psi_D$  est convexe et que les points  $u_\sigma$  de  $M$  définissant  $\psi_D$  dans chaque cône  $\sigma$  de dimension  $n$  sont tous distincts, ou encore que les  $u_\sigma$  sont exactement les sommets du polytope  $P_D$ .

entier du triangle

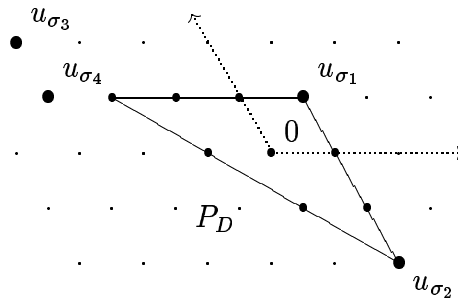


Il est de dimension 6.

(2) Reprenons l'éventail étudié dans l'exemple 7(3), dont la variété torique associée est l'éclaté de  $\mathbf{P}^2$  en un point, et considérons le diviseur  $D = D_{\tau_1} + D_{\tau_2} + 3D_{\tau_3} + D_{\tau_4}$ . La fonction  $\psi_D$  est donnée par



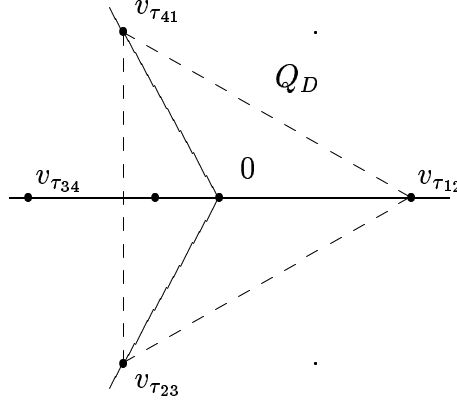
L'espace vectoriel des sections de  $L_D$  a pour base les  $\chi^{-u}$ , où  $u$  est un point entier du triangle



Il est de dimension 10. On constate que les  $u_{\sigma_i}$  ne sont pas tous dans  $P_D$ . La fonction  $\psi_D$  n'est par ailleurs pas convexe car

$$3 = \psi_D(-1, 0) < \frac{1}{2}(\psi_D(-1, 1) + \psi_D(-1, -1)) = 4$$

On le voit aussi sur la figure suivante :



où l'on constate que  $\frac{1}{3}v_{\tau_{34}}$  n'est pas sur la frontière de  $Q_D$ . Le polytope  $P_D$  ne permet pas de reconstruire  $\psi_D$ .

(3) Reprenons le diviseur  $D_0$  sur  $\mathbf{P}^n$  étudié dans l'exemple 17(3). On a  $\psi_{D_0}(x_1, \dots, x_n) = -x_i$  dans  $\sigma_i$  et  $\psi_{D_0}(x_1, \dots, x_n) = 0$  dans  $\sigma_0$ , de sorte que  $u_{\sigma_i} = -e_i^*$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $u_{\sigma_0} = 0$ . Le polytope  $P_{D_0}$  est

$$\{(u_1, \dots, u_n) \in M_{\mathbf{R}} \mid u_i \leq 0, u_1 + \dots + u_n \geq -1\}$$

et ses sommets sont les  $u_{\sigma_i}$ . La fonction  $\psi_{D_0}$  est donc strictement convexe (*cf.* note 2). L'espace vectoriel des sections de  $L_{D_0}$  a pour base  $(\chi^0, \chi^{e_1^*}, \dots, \chi^{e_n^*})$ . Il est de dimension  $n + 1$ .

(4) Soit  $P$  un polytope dans  $M_{\mathbf{R}}$ , à sommets dans  $M$  et d'intérieur non vide. Dans les exemples 14(2) et 17(4), on a défini un diviseur de Cartier  $D_P$  sur la variété torique associée  $X_P$ . On a  $P_{D_P} = P$ ; en effet, quitte à remplacer  $P$  par  $mP + u$ , avec  $m \in \mathbf{N}^*$  et  $u \in M$ , on peut supposer que l'origine est dans l'intérieur de  $P$ . Les coefficients  $m_\tau$  sont alors strictement positifs et  $P$  et  $P_{D_P}$  sont tous les deux les polytopes duaux de l'enveloppe convexe des  $\frac{1}{m_\tau}v_\tau$ , pour  $\tau$  décrivant l'ensemble des rayons de  $\Delta_P$ . Comme on l'a vu dans l'exemple 17(4), la fonction  $\psi_{D_P}$  est la fonction d'appui de  $P$ ; elle est donc convexe (et même strictement convexe; *cf.* note 2).

On peut définir la *caractéristique d'Euler*  $\chi(X, L)$  d'un fibré en droites  $L$  sur une variété algébrique  $X$  complexe compacte. Le *théorème de Riemann–Roch* (valable pour tout diviseur de Cartier sur une variété algébrique complexe compacte) affirme que *la fonction*  $m \mapsto \chi(X, L_{mD})$  *est un polynôme en*  $m$  *que l'on notera*  $f_D$ .

Reste à relier cette caractéristique d'Euler avec la dimension de l'espace des sections. Elle est définie comme la somme alternée des dimensions de certains espaces vectoriels attachés à  $X$  et  $L$ , dont le premier est  $\Gamma(X, L)$ . Dans certains cas favorables, les autres termes sont nuls. Pour les variétés toriques, c'est le cas lorsque la fonction  $\psi_D$  associée est *convexe*. On en déduit le résultat suivant.

**Théorème 20** *Soit*  $D$  *un diviseur de Cartier sur la variété torique compacte*  $X_\Delta$ . *Si la fonction*  $\psi_D$  *définie en 4.1 est convexe, l'application*

$$f_D : m \mapsto \dim(\Gamma(X_\Delta, L_{mD})) = \text{Card}(mP_D \cap M)$$

*est polynomiale pour*  $m \geq 0$ .

On a associé dans l'exemple 17(4), à tout polytope  $P$  dans  $M_{\mathbf{R}}$  à sommets dans  $M$ , d'intérieur non vide, un diviseur de Cartier  $D_P$  sur une variété torique  $X_P$ . La fonction associée  $\psi_P$  est convexe; on en déduit la première formule d'Ehrhart (*cf.* 1.2).

Une version plus précise du théorème de Riemann–Roch dit qu'étant donnés des diviseurs de Cartier  $D_1, \dots, D_r$  sur une variété complexe compacte  $X$  de dimension  $n$ , l'application

$$(m_1, \dots, m_r) \mapsto \chi(X, L_{m_1 D_1} \otimes \dots \otimes L_{m_r D_r})$$

est polynomiale de degré total au plus  $n$ . Si  $r = n$ , on note  $D_1 \cdot \dots \cdot D_n$  le coefficient de  $m_1 \dots m_n$  dans ce polynôme. On définit ainsi une forme  $\mathbf{Z}$ -multilinéaire et symétrique, à *valeurs entières*, sur le groupe des diviseurs de Cartier sur  $X$ .

Considérons maintenant des polytopes  $P_1, \dots, P_n$  dans  $\mathbf{R}^n$  à sommets dans  $\mathbf{Q}^n$ , tous d'intérieur non vide. On peut trouver un réseau  $M$  dans  $\mathbf{R}^n$  tel que les sommets de tous les  $P_i$  soient dans  $M$  et un éventail  $\Delta$  qui subdivise

chacun des éventails  $\Delta_{P_i}$ . Les diviseurs associés  $D_1, \dots, D_n$  sur  $X_\Delta$  vérifient (remarques 18(1) et (2))

$$\chi(X_\Delta, L_{mD_i}) = \text{Card}(mP_i \cap M)$$

Cette expression est pour  $m$  positif un polynôme en  $m$  de degré  $n$  dont le coefficient dominant est  $\text{vol}(P_i) = \frac{1}{n!}(D_i)^n$ , d'après ce qui précède.

Pour tous entiers positifs  $m_1, \dots, m_n$ , l'expression

$$\begin{aligned} \text{vol}(m_1P_1 + \dots + m_nP_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m^n} \text{Card}(m(m_1P_1 + \dots + m_nP_n) \cap M) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m^n} \chi(X_\Delta, L_{mm_1D_1} \otimes \dots \otimes L_{mm_nD_n}) \end{aligned}$$

est un polynôme en  $m_1, \dots, m_n$  dont le coefficient de  $m_1 \dots m_n$  est  $D_1 \dots D_n$ . On a donc démontré une partie des affirmations de 1.3, avec

$$\text{vol}(P_1, \dots, P_n) = \frac{1}{n!} (D_1 \dots D_n)$$

L'inégalité (5) pour les polytopes à sommets rationnels est donc équivalente à l'inégalité

$$D_1 \dots D_n \geq \sqrt[n]{D_1^n \dots D_n^n}$$

Pour  $n = 2$ , cette inégalité (qui l'opposé de l'inégalité de Cauchy–Schwarz) résulte du fait que la forme quadratique  $(D_1, D_2) \mapsto D_1 \cdot D_2$  a une seule valeur propre positive. C'est un résultat connu sous le nom « théorème de l'indice de Hodge », valable pour toute surface complexe compacte. Le cas général s'en déduit en utilisant des manipulations élémentaires et le théorème de Bertini, qui dit dans notre cas essentiellement que si  $D$  est effectif et que  $\psi_D$  est strictement convexe (cf. note 2), on peut calculer le produit  $D \cdot D_2 \dots D_n$  comme le produit  $(D \cap D_2) \dots (D \cap D_n)$  sur l'hypersurface  $D$  (on procède alors par récurrence sur la dimension).

Le cas des convexes compacts généraux s'en déduit en les approximant par des polytopes à sommets rationnels.

Considérons maintenant deux polytopes  $P_1$  et  $P_2$  dans  $M_{\mathbf{R}}$ , à sommets dans  $M$  et d'intérieur non vide, et  $\Delta$  un éventail adapté à  $P_1$  et  $P_2$ . Il ressort de (12) que l'on a

$$P_1 \subset P_2 \iff \psi_{P_1} \leq \psi_{P_2}$$

de sorte que, pour tout  $u$  dans  $M$ , on a

$$\begin{aligned} P_1 + u \subset P_2 &\iff \psi_{P_1} + \langle u, \cdot \rangle \leq \psi_{P_2} \\ &\iff \langle u, \cdot \rangle \leq \psi_{P_2 - P_1} \\ &\iff \chi^{-u} \in \Gamma(X_\Delta, L_{D_2 - D_1}) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\text{Card}\{u \in \frac{1}{m}M \mid m_1 P_1 + u \subset m_2 P_2\} = \dim(\Gamma(X_\Delta, L_{mm_2 D_2 - mm_1 D_1}))$$

Soient  $K_1$  et  $K_2$  des convexes compacts dans  $M_{\mathbf{R}}$ , d'intérieur non vide. On pose

$$\begin{aligned} r(K_2, K_1) &= \sup\{\lambda \in \mathbf{R}^+ \mid \text{un translaté de } \lambda K_1 \text{ est contenu dans } K_2\} \\ &= \sup\left\{\frac{m_1}{m_2} \in \mathbf{Q}^+ \mid \text{un translaté de } m_1 K_1 \text{ est contenu dans } m_2 K_2\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{m_1}{m_2} \in \mathbf{Q}^+ \mid \exists m \in \mathbf{N}^* \exists u \in \frac{1}{m}M \quad m_1 K_1 + u \subset m_2 K_2\right\} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} r(P_2, P_1) &= \sup\left\{\frac{m_1}{m_2} \in \mathbf{Q}^+ \mid \exists m \in \mathbf{N}^* \Gamma(X_\Delta, L_{mm_2 D_2 - mm_1 D_1}) \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{m_1}{m_2} \in \mathbf{Q}^+ \mid \Gamma(X_\Delta, L_{m_2 D_2 - m_1 D_1}) \neq 0\right\} \end{aligned}$$

Ce dernier nombre, que l'on peut noter  $r(D_1, D_2)$ , a un sens pour tous diviseurs de Cartier  $D_1$  et  $D_2$  sur une variété algébrique complexe compacte  $X$ .

Plaçons-nous dans ce cadre et posons  $D_{m_1, m_2} = m_2 D_2 - m_1 D_1$ . On peut montrer que si  $X$  est une surface algébrique compacte munie d'un diviseur ample  $H$ , et si  $D$  est un diviseur de Cartier sur  $X$  qui vérifie  $D^2 > 0$  et  $D \cdot H > 0$ , alors on a  $\Gamma(X, L_{mD}) \neq 0$  pour tout entier  $m$  assez grand. On a

$$D_{m_1, m_2}^2 = m_2^2 D_2^2 - 2m_1 m_2 D_1 \cdot D_2 + m_1^2 D_1^2$$

Les racines du polynôme

$$P(t) = t^2 D_1^2 - 2t D_1 \cdot D_2 + D_2^2$$

sont réelles par le théorème de l'indice de Hodge. Si on note  $\alpha < \beta$  ses racines (positives), on aura donc  $D_{m_1, m_2}^2 > 0$  pour  $m_1/m_2 < \alpha$ .

En prenant pour  $\Delta$  l'éventail le plus petit adapté à  $P_1$  et  $P_2$ , on peut aussi supposer que  $D_{1,1} = D_1 + D_2$  est ample (c'est-à-dire ici que la fonction  $\psi_{D_1+D_2}$  est strictement convexe; cf. note 2). On a alors

$$D_{m_1, m_2} \cdot D_{1,1} = -m_1 D_1^2 + (m_2 - m_1) D_1 \cdot D_2 + m_2 D_2^2$$

qui est strictement positif dès que

$$\frac{m_1}{m_2} < \frac{D_2^2 + D_1 \cdot D_2}{D_1^2 + D_1 \cdot D_2}$$

Comme cette fraction est supérieure à  $\alpha$ , on en déduit que pour  $m_1/m_2 < \alpha$ , on a  $r(D_1, D_2) > m_1/m_2$ , de sorte que  $r(D_1, D_2) \geq \alpha$ . On a ainsi montré l'une des inégalités (7) pour les polytopes à sommets dans  $M$  et l'autre se montre de façon analogue. On en déduit le cas des convexes compacts généraux par un argument de continuité.

## 4.4 Dualité de Serre

Soit  $\Delta$  un éventail complet et lisse dans  $\mathbf{N}_{\mathbf{R}}$ . La *dualité de Serre* sur la variété compacte et lisse  $X_{\Delta}$  dit que pour tout diviseur de Cartier  $D = \sum_{\tau} m_{\tau} D_{\tau}$  sur  $X_{\Delta}$ , on a

$$\chi(X_{\Delta}, L_{D - \sum_{\tau} D_{\tau}}) = (-1)^n \chi(X_{\Delta}, L_{-D})$$

En appliquant cette formule à  $mD$ , on obtient

$$\chi(X_{\Delta}, L_{mD - \sum_{\tau} D_{\tau}}) = (-1)^n \chi(X_{\Delta}, L_{-mD}) = (-1)^n f_D(-m)$$

Le problème est maintenant d'identifier le membre de gauche. Les sections de  $L_{D - \sum_{\tau} D_{\tau}}$  sont les sections de  $L_D$  qui s'annulent sur l'hypersurface  $\bigcup_{\tau} D_{\tau}$ . Si  $-u \in P_D \cap M$ , la section correspondante de  $L_D$  a cette propriété si et seulement si (lemme 16)

$$\langle u + u_{\sigma}, v_{\tau} \rangle > 0$$

pour tout cône  $\sigma$  de dimension  $n$  et tout rayon  $\tau$  de  $\sigma$ , c'est-à-dire

$$\langle -u, v_{\tau} \rangle < m_{\tau}$$

pour tout rayon  $\tau$  de  $\Delta$  (comparer avec le début de 4.3). Cela signifie exactement que  $-u$  est dans l'intérieur de  $P_D$ .

Supposons  $\psi_D$  convexe. On sait qu'on a  $\chi(X_\Delta, L_D) = \dim(\Gamma(X_\Delta, L_D))$ . On peut montrer que bien que  $\psi_{D-\sum_\tau D_\tau}$  ne soit en général plus convexe, on a encore

$$\chi(X_\Delta, L_{D-\sum_\tau D_\tau}) = \dim(\Gamma(X_\Delta, L_{D-\sum_\tau D_\tau}))$$

Dans cette situation, on en déduit que pour tout  $m \in \mathbf{N}^*$ , on a

$$\text{Card}(\text{Int}(mP_D \cap M)) = (-1)^n f_D(-m)$$

Si on part maintenant d'un polytope  $P$  à sommets dans  $M$ , il suffit d'appliquer ce qui précède à un raffinement lisse  $\Delta$  de  $\Delta_P$  (cf. 3.2). On obtient ainsi la seconde formule d'Ehrhart (cf. 1.2).

## Références

- [A] Alexandrov, A., Theory of mixed volumes, *Mat. Sbornik* **44** (1937), 947–972 and 1205–1238, and **45** (1937), 27–46 and 227–251.
- [D] Demazure, M., Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **3** (1970), 507–588.
- [Di] Dinghas, A., Bemerkung zu einer Vershärkung der isoperimetrischen Ungleichung durch H. Hadwiger, *Math. Nachr.* **1** (1948), 284–286.
- [Ei] Ehrhart, E., Démonstration de la loi de réciprocité pour un polydre entier, *C. R. Acad. Sci. Paris* **265** (1967), 5–7.
- [F] Flanders, H., A proof of Minkowski's inequality for convex curves, *Amer. Math. Monthly* **75** (1968), 581–593.
- [Fu] Fulton, W., *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, **131**. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [H] Hadwiger, H., Die isoperimetrische Ungleichung im Raum, *Elemente Math.* **3** (1948), 25–38.
- [O] Osserman, R., Bonnesen-style isoperimetric inequalities, *Amer. Math. Monthly* **86** (1979), 1–29.

- [T1] Teissier, Du théorème de l'index de Hodge aux inégalités isopérimétriques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **288** (1979), 287–289.
- [T2] Teissier, B. Bonnesen-type inequalities in algebraic geometry. I. Introduction to the problem. *Seminar on Differential Geometry*, pp. 85–105, Ann. of Math. Stud. **102**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982.