Université Paris Diderot
U.F.R. de Mathématique

9 mars 2010

EXAMEN DE M2
Responsable : Mr O. DEBARRE

Tous les schémas sont de type fini et séparés sur un corps algébriquement clos $\mathbf{k}$. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit $\varepsilon : X' \to X$ l'éclatement d'un schéma projectif X de dimension n en un point lisse x et soit E le diviseur exceptionnel. Déterminer le faisceau inversible $\mathcal{O}_{X'}(E)|_E$ et en déduire (E^n).

Exercice 2. Soit X une courbe projective irréductible (pas nécessairement lisse) et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble fini non vide de points fermés de X. Montrer que $X - Y$ est affine.

Exercice 3. Soient $D_1, \dots, D_n$ des diviseurs de Cartier nefs sur un schéma projectif de dimension n. Montrer

$$(D_1 \cdot \dots \cdot D_n)^n \geq (D_1^n) \cdots (D_n^n).$$

Exercice 4. a) Soit $X \to \mathbf{P}^2$ l'éclatement de deux points distincts. Déterminer le cône des courbes de X.

b) Même question lorsque $X \to \mathbf{P}^2$ est l'éclatement de trois points non alignés.

Exercice 5. Soit X un schéma projectif, soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et soient $H_1, \dots, H_r$ des diviseurs amples sur X. Montrer que l'ensemble

$$\{(m_1, \dots, m_r) \in \mathbf{N}^r \mid \exists i > 0 \quad H^i(X, \mathcal{F}(m_1 H_1 + \dots + m_r H_r)) \neq 0\}$$

est fini.

Exercice 6. Soit X une surface lisse projective et soit C une courbe sur X.

a) Si C est rationnelle lisse et que $(C^2) < 0$, montrer qu'il existe une surface projective Y (peut-être singulière), un point $p \in Y$ et un morphisme $\varepsilon : X \to Y$ tel que $\varepsilon(C) = \{p\}$ et que ε induise un isomorphisme de $X - C$ sur $Y - \{p\}$.

b) S'il existe une surface projective Y (peut-être singulière), un point $p \in Y$ et un morphisme surjectif $\varepsilon : X \to Y$ tel que $\varepsilon(C) = \{p\}$, montrer $(C^2) < 0$.

Exercice 7. Soit X une variété projective. Montrer que tout morphisme surjectif $f : X \to X$ est fini.