Université Paris Diderot
U.F.R. de Mathématique

4 mai 2010

EXAMEN DE M2

Responsable : Mr O. DEBARRE

Les exercices sont indépendants. On pourra utiliser sans démonstration tous les résultats des notes de cours.

Exercice 1. Soit X une variété projective lisse de dimension n et soient $M_1, \dots, M_r$ des diviseurs amples sur X. Montrer que $K_X + M_1 + \cdots + M_r$ est nef lorsque $r \geq n+1$. (*Indication :* utiliser le théorème du cône.)

Exercice 2. Soit $X \to \mathbf{P}^2$ l'éclatement de deux points distincts. Déterminer toutes les faces extrémales du cône des courbes de X et décrire les contractions associées.

Exercice 3. Soit X une variété projective et lisse avec $-K_X$ gros. Montrer que X est uniréglée.

Exercice 4. Soit V un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension n et soit $r \in \{1, \dots, n-1\}$. On note $G_r(V)$ l'ensemble[1] des sous-espaces vectoriels de V de codimension r et

$$X = \{(W, [u]) \in G_r(V) \times \mathbf{P}(\mathrm{End}(V)) \mid u(W) = 0\}.$$

a) Montrer que X est lisse irréductible de dimension $r(2n-r)-1$, que $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbf{Z}^2$, et que la projection $X \to G_r(V)$ est une contraction K_X-négative extrémale.

b) Montrer que

$$Y = \{[u] \in \mathbf{P}(\mathrm{End}(V)) \mid \mathrm{rang}(u) \leq r\}$$

est irréductible de dimension $r(2n-r)-1$. On admettra que Y est normal. Si $r \geq 2$, montrer que Y n'est pas localement $\mathbf{Q}$-factoriel et que $\mathrm{Pic}(Y) \simeq \mathbf{Z}[\mathcal{O}_Y(1)]$. Que se passe-t-il si $r = 1$?

Exercice 5. Soit X une variété complexe projective lisse de Fano[2] de nombre de Picard ≥ 2. On suppose que X possède un rayon extrémal R dont la contraction $c : X \to Y$

[1] On admettra que $G_r(V)$ est une variété projective lisse irréductible de dimension $r(n-r)$ et que $\mathrm{Pic}(G_r(V)) \simeq \mathbf{Z}$.

[2] C'est-à-dire que $-K_X$ est ample. En particulier, tous les rayons extrémaux sont K_X-négatifs.

envoie une hypersurface E de X sur un point. Montrer que X a aussi une contraction extrémale dont toutes les fibres sont de dimension ≤ 1. (*Indication :* introduire un rayon R' tel que $(E \cdot R') > 0$.)

Exercice 6. Soit X une variété complexe projective lisse de dimension n et soient $\mathbf{R}^+ r_1, \ldots, \mathbf{R}^+ r_s$ des rayons extrémaux K_X-négatifs deux à deux distincts, tous de type fibre. Montrer $s \leq n$. (*Indication :* montrer que chaque forme linéaire $\ell_i(z) = z \cdot r_i$ sur $N^1(X)_{\mathbf{R}}$ divise le polynôme $P(z) = (z^n)$.)

Exercice 7. Soit X une variété projective lisse, soit C une courbe projective lisse et soit $f : C \to X$ un morphisme birationnel sur son image. Soit $g : \mathbf{P}^1 \to X$ une courbe rationnelle libre dont l'image rencontre $f(C)$. Montrer qu'il existe un morphisme $f' : C \to X$ birationnel sur son image tel que $(K_X \cdot f'(C)) < 0$. (*Indication :* former un peigne.)

Université Paris Diderot
U.F.R. de Mathématique 4 mai 2010

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE M2
Responsable : Mr O. DEBARRE

Exercice 1. *Soit X une variété projective lisse de dimension n et soient $M_1, \dots, M_r$ des diviseurs amples sur X. Montrer que $K_X + M_1 + \cdots + M_r$ est nef lorsque $r \geq n+1$.*

Pour toute courbe C sur X telle que $(-K_X \cdot C) \leq n+1$, on a $(M_i \cdot C) \geq 1$ donc

$$((K_X + M_1 + \cdots + M_r) \cdot C) \geq -n - 1 + r.$$

Cela résulte donc du théorème du cône.

Exercice 2. *Soit $X \to \mathbf{P}^2$ l'éclatement de deux points distincts. Déterminer toutes les faces extrémales du cône des courbes de X et décrire les contractions associées.*

L'espace vectoriel $N_1(X)$ est engendré par les classes e_1 et e_2 des diviseurs exceptionnels au-dessus des points éclatés p_1 et p_2, et par la classe h de l'image inverse d'une droite de $\mathbf{P}^2$. La classe $\ell = h - e_1 - e_2$ est effective, et on a vu pendant le premier examen que

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \mathbf{R}^+ e_1 + \mathbf{R}^+ e_2 + \mathbf{R}^+ \ell.$$

Comme leur auto-intersection est -1, les classes e_1, e_2 et ℓ engendrent des rayons extrémaux du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. La contraction associée est juste la contraction de la courbe correspondante.

La contraction associée à la facette $\langle \ell, e_1 \rangle$ est de type fibre, donnée par la projection $X \to \mathbf{P}^1$ depuis p_2, c'est-à-dire par le système linéaire $|h - e_2|$. Idem pour la contraction associée à la facette $\langle \ell, e_2 \rangle$. La contraction associée à la facette $\langle e_1, e_2 \rangle$ est divisorielle, donnée par l'éclatement $X \to \mathbf{P}^2$.

Il reste ensuite la face $\{0\}$ (dont la contraction est l'identité) et la face $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ (dont la contraction est le morphisme vers un point).

Exercice 3. *Soit X une variété projective et lisse avec $-K_X$ gros. Montrer que X est uniréglée.*

Comme $-K_X$ est gros, on peut écrire $-K_X \sim_{\mathrm{num}} A + E$, où A est un $\mathbf{Q}$-diviseur ample et E est un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif. Si $n = \dim(X)$, on a alors

$$(K_X \cdot A^{n-1}) = -(A^n) - (E \cdot A^{n-1}) < 0$$

et on peut terminer la démonstration comme dans celle du Theorem 7.9 du cours.

Exercice 4. *Soit V un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension n et soit $r \in \{1, \dots, n-1\}$. On note $G_r(V)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de V de codimension r et*

$$X = \{(W, [u]) \in G_r(V) \times \mathbf{P}(\mathrm{End}(V)) \mid u(W) = 0\}.$$

a) Montrer que X est lisse irréductible de dimension $r(2n-r)-1$, que $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbf{Z}^2$, et que la projection $X \to G_r(V)$ est une contraction K_X-négative extrémale.

Si $\mathcal{Q}$ est le faisceau "quotient tautologique" localement libre de rang r sur $G_r(V)$, la projection $\pi : X \to G_r(V)$ s'identifie au fibré en espaces projectifs $\mathbf{P}(\mathcal{Q} \otimes V^*) \to G_r(V)$ (notation de Grothendieck), donc X est lisse irréductible de dimension $r(n-r)+rn-1$ et $\rho(X) = \rho(G_r(V)) + 1 = 2$. Le fait que la projection $X \to G_r(V)$ est une contraction K_X-négative extrémale découle alors du cours (Example 8.10).

b) Montrer que

$$Y = \{[u] \in \mathbf{P}(\mathrm{End}(V)) \mid \mathrm{rang}(u) \leq r\}$$

est irréductible de dimension $r(2n-r)-1$. On admettra que Y est normal. Si $r \geq 2$, montrer que Y n'est pas localement $\mathbf{Q}$-factoriel et que $\mathrm{Pic}(Y) \simeq \mathbf{Z}[\mathcal{O}_Y(1)]$. Que se passe-t-il si $r = 1$?

Soit $f : X \to Y$ le morphisme d'oubli. Si u est de rang $s \leq r$, la fibre $f^{-1}([u])$ est isomorphe à $G_{r-s}(\mathrm{Ker}(u))$, de dimension $(n-r)(r-s)$. L'image inverse de $Z_s = \{[u] \in \mathbf{P}(\mathrm{End}(V)) \mid \mathrm{rang}(u) = s\}$ dans X est donc de codimension

$$r(2n-r)-1-\big((n-r)(r-s)+\dim(Z_s)\big) = r(2n-r)-(n-r)(r-s)-s(2n-s) = (n-s)(r-s),$$

qui est toujours ≥ 2 pour $s < r$. Si $r \geq 2$, le lieu exceptionnel de f est donc de codimension ≥ 2 dans X. Par Proposition 8.17 du cours, Y n'est pas localement $\mathbf{Q}$-factoriel.

On ne sait pas si f est une contraction K_X-négative, donc on peut pas utiliser Corollary 8.4. En revanche, comme Y est normal, on a $f_*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Y$, donc $f^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X)$ est injective. Son image consiste en des fibrés en droites dont la restriction à toute courbe contenue dans une fibre de f est triviale, donc elle est de rang 1. Comme $\mathcal{O}_Y(1)$ n'est pas divisible (car Y contient des droites), il engendre $\mathrm{Pic}(Y)$.

Si $r = 1$, la variété Y est isomorphe à $\mathbf{P}(V) \times \mathbf{P}(V^*)$ par l'application $([x], [\ell]) \mapsto [x \otimes \ell]$. Elle est donc lisse de groupe de Picard $\mathbf{Z}^2$.

Exercice 5. *Soit X une variété complexe projective lisse de Fano*[2] *de nombre de Picard ≥ 2. On suppose que X possède un rayon extrémal R dont la contraction $c : X \to Y$ envoie une hypersurface E de X sur un point. Montrer que X a aussi une contraction extrémale dont toutes les fibres sont de dimension ≤ 1.*

Comme $\rho(X) \geq 2$, on a $\dim(Y) \geq 1$. Si c est divisorielle, on a $(E \cdot R) < 0$ par le cours (§8.5); si c est de type fibre, on a $(E \cdot R) = 0$. Comme il existe une courbe $C \subset X$ telle que $(E \cdot C) > 0$, il existe un autre rayon extrémal R' tel que $(E \cdot R') > 0$, de contraction $c' : X \to Y'$. Comme $(E \cdot R') > 0$, le diviseur E doit rencontrer toute fibre de c' qui est dimension ≥ 1. Si une telle fibre est de dimension ≥ 2, l'intersection contient une courbe, dont la classe est alors dans R', mais aussi dans R, puisque tout E est envoyé dans un point. C'est absurde.

Exercice 6. *Soit X une variété complexe projective lisse de dimension n et soient $\mathbf{R}^+ r_1, \dots, \mathbf{R}^+ r_s$ des rayons extrémaux K_X-négatifs deux à deux distincts, tous de type fibre. Montrer $s \leq n$.*

Soit $c_i : X \to Y_i$ la contraction associée à $\mathbf{R}^+ r_i$. L'image de l'injection $c_i^* : N^1(Y)_{\mathbf{R}} \to N^1(X)_{\mathbf{R}}$ est l'hyperplan $\mathrm{Ker}(\ell_i)$ (Remark 8.5.2)) et, comme c_i est de type fibre, elle est

[2] *C'est-à-dire avec $-K_X$ ample. En particulier, tous les rayons extrémaux sont K_X-négatifs.*

contenue dans l'hypersurface $P(z) = 0$. Donc ℓ_i divise P, qui est ainsi un polynôme homogène de degré n divisible par $\ell_1 \cdots \ell_s$, de sorte que $s \leq n$.

Exercice 7. *Soit X une variété projective lisse, soit C une courbe projective lisse et soit $f : C \to X$ un morphisme birationnel sur son image. Soit $g : \mathbf{P}^1 \to X$ une courbe rationnelle libre dont l'image rencontre $f(C)$. Montrer qu'il existe un morphisme $f' : C \to X$ birationnel sur son image tel que $(K_X \cdot f'(C)) < 0$.*

Comme dans la preuve de Theorem 9.39, une déformation générale de g dont l'image rencontre $f(C)$ est encore libre. On forme ainsi un peigne C_m de manche C avec m dents rationnelles libres et un morphisme $f_m : C_m \to X$. Comme lorsque $C = \mathbf{P}^1$, on peut construire un lissage du peigne, et on peut appliquer une généralisation du Theorem 9.39 (la même preuve fonctionne). Il existe donc m_0 tel que, pour $m > m_0$, la restriction de f_m à un sous-peigne de C_m avec $m' \geq m - m_0$ dents se déforme en un morphisme $f' : C \to X$. On a alors

$$(K_X \cdot f'_* C) = (K_X \cdot f_* C) + m'(K_X \cdot g_* \mathbf{P}^1),$$

qui est < 0 pour $m \gg 0$ puisque $(K_X \cdot g_* \mathbf{P}^1) = -a_1 - \cdots - a_n < 0$, car $a_1 \geq 2$ et $a_i \geq 0$ (notations de §9.4). Comme f_m, le morphisme f' est birationnel sur son image.