Universite Paris Diderot
U.F.R. de Mathematique

8 mars 2011

EXAMEN DU COURS DE M2

« Introduction à la théorie de Mori »

Responsable : Mr O. DEBARRE

Toutes les variétés sont définies sur un corps algébriquement clos.

Exercice 1. Soit C une courbe projective lisse de genre g et soit X la surface $C \times C$.

a) On considere un automorphisme de C et son graphe $\subset X$. Calculer ($K_X \cdot$) et (^{2}).

b) Si $g \geq 2$, montrer que le groupe des automorphismes de C est ni.

Exercice 2. Soit $\pi : X \to B$ une surface reglee.

a) Soit $\tilde{X} \to X$ l'eclatement d'un point x de X. Decrire la bre de $\pi(x)$ par l'application composee $\tilde{X} \to X \to B$.

b) Montrer que le transforme strict dans $\tilde{X}$ de la bre $\pi^{-1}(\pi(x))$ peut être contracte pour donner une autre surface reglee $X(x) \to B$.

c) Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $\mathbf{F}_n$ la surface de Hirzebruch contenant une courbe C_n d'auto-intersection $-n$. Identi er la surface $\mathbf{F}_n(x)$ (on distinguera deux cas selon que x est sur la courbe C_n ou pas).

Exercice 3. Soit $X \to \mathbf{P}^2$ l'eclatement de deux points distincts.

a) Determiner le cône des courbes $\overline{\mathsf{NE}}(X)$.

b) Determiner tous les sous-cônes extremaux de $\overline{\mathsf{NE}}(X)$ et pour chacun d'eux, determiner un morphisme $X \to Y$ dont le cône des courbes relatif est ce sous-cône.

Exercice 4. Soit D un diviseur de Cartier sur une variete projective normale X de dimension n. Montrer que les proprietes suivantes sont equivalentes :

(i) D est gros (*);

(ii) D est somme d'un $\mathbf{Q}$-diviseur ample et d'un $\mathbf{Q}$-diviseur e ectif ;

(iii) D est numeriquement equivalent a la somme d'un $\mathbf{Q}$-diviseur ample et d'un $\mathbf{Q}$-diviseur e ectif ;

(iv) il existe un entier positif m tel que l'application rationnelle

$$X - - \to \mathbf{P}H^0(X, mD)$$

de nie par le systeme lineaire $|mD|$ soit birationnelle sur son image.

(*) On rappelle que cela signi e $\limsup_{m \to +\infty} \frac{h^0(X,mD)}{m^n} > 0$.

Universite Paris Diderot
U.F.R. de Mathematique 8 mars 2011

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DU COURS DE M2

« Introduction à la théorie de Mori »

Responsable : Mr O. DEBARRE

Exercice 1. *Soit C une courbe projective lisse de genre g et soit X la surface $C \times C$.*

a) On considère un automorphisme de C et son graphe $\ \subset X$. Calculer $(K_X \cdot\ )$ et $(\ ^2)$.

Soit x_1 la classe de la courbe $\star \times X$ et soit x_2 la classe de la courbe $X \times \star$. On a $[K_X] = 2(g-1)(x_1 + x_2)$ et $[\ ] \cdot x_i = 1$, d'ou $(K_X \cdot\ ) = 4(g-1)$.

La formule du genre appliquee a la courbe lisse de genre g,

$$g = 1 + \frac{1}{2}\big((K_X \cdot\ ) + (\ ^2)\big),$$

donne alors $(\ ^2) = -2(g-1)$.

b) Si $g \geq 2$, montrer que le groupe des automorphismes de C est fini.

Si $g \geq 2$, K_X est ample, donc, pour chaque $k > 0$, le nombre de *classes* de courbes $R \subset X$ telles que $(K_X \cdot R) \leq k$ est ni (cela fait partie de l'enonce du theoreme de Kleiman). A chaque automorphisme σ de C est associe son graphe $\ _\sigma$, et l'application $\sigma \mapsto [\ _\sigma]$ est injective : en e et, si $[\ _\sigma] = [\ _\tau]$, on a

$$(\ _\sigma \cdot\ _\tau) = (\ ^2_\sigma) = -2(1-g) < 0,$$

donc $\ _\sigma = \ _\tau$ (ce sont des courbes irreductibles), puis $\sigma = \tau$. On en deduit que le nombre d'automorphismes de C est ni.

Exercice 2. *Soit $\pi : X \to B$ une surface réglée.*

a) Soit $\tilde{X} \to X$ l'éclatement d'un point x de X. Décrire la fibre de $\pi(x)$ par l'application composée $\boldsymbol{\pi} : \tilde{X} \to X \to B$.

La bre de $\pi(x)$ est reunion du transforme strict F dans $\tilde{X}$ de la bre $\pi^{-1}(\pi(x))$ et du diviseur exceptionnel E de l'eclatement.

b) Montrer que le transformé strict dans $\tilde{X}$ de la fibre $\pi^{-1}(\pi(x))$ peut être contracté pour donner une autre surface réglée $X(x) \to B$.

On a $(F^2) = -1$ et la courbe F est rationnelle lisse. On peut donc la contracter (critere de Castelnuovo) par un morphisme birationnel $c : \tilde{X} \to X(x)$, ou $X(x)$ est une surface lisse. Les bres du morphisme $X(x) \to B$ induit par $\boldsymbol{\pi}$ sont toutes isomorphes a des courbes rationnelles, donc $X(x)$ est une surface reglee.

c) Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $\mathbf{F}_n$ la surface de Hirzebruch contenant une courbe C_n d'auto-intersection $-n$. Identifier la surface $\mathbf{F}_n(x)$.

Si $x \in C_n$ (resp. $x \notin C_n$), le transforme strict de C_n dans $\tilde{X}$ est d'auto-intersection $-n-1$ (resp. $-n$). L'image par c de ce transforme strict dans $X(x)$ est d'auto-intersection $-n-1$ (resp. $-n+1$). La surface $\mathbf{F}_n(x)$ est donc $\mathbf{F}_{n+1}$ (resp. $\mathbf{F}_{n-1}$), sauf peut-être lorsque

$n = 0$ et $x \notin C_0$, ou $n = 1$ et $x \notin C_1$ (l'existence d'une courbe d'auto-intersection 0 sur $X(x)$ ne prouve rien !). Mais le premier cas ne peut se produire: lorsque $n = 0$, il passe une courbe C_0 par n'importe quel point x de $\mathbf{F}_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. On a donc toujours $\mathbf{F}_0(x) \simeq \mathbf{F}_1$. Pour le second cas, on peut remarquer qu'en general, la procedure inverse partant du point $c(F)$ sur $X(x)$ redonne X. Si $x \notin C_1$, les seules possibilites sont $\mathbf{F}_1(x) = \mathbf{F}_0$, ou $\mathbf{F}_1(x) = \mathbf{F}_2$ et $y := c(F) \notin \mathbf{F}_2$. Dans le second cas, on aurait par l'operation inverse $x \in C_1$, ce qui n'est pas. On a donc bien $\mathbf{F}_1(x) = \mathbf{F}_0$.

Exercice 3. *Soit $X \to \mathbf{P}^2$ l'éclatement de deux points distincts.*

a) Déterminer le cône des courbes $\overline{\mathsf{NE}}(X)$.

Par le cours, le nombre de Picard de X est 3 : l'espace vectoriel $N_1(X)$ est engendre par les classes e_1 et e_2 des diviseurs exceptionnels (chacune est d'auto-intersection -1), et par la classe h de l'image inverse d'une droite de $\mathbf{P}^2$. La classe $\ell = h - e_1 - e_2$ est e ective car representee par le transforme strict L de la droite de $\mathbf{P}^2$ passant par les deux points eclates p_1 et p_2. Son auto-intersection est -1 donc, par le cours, les trois classes e_1, e_2 et ℓ engendrent des rayons extrêmaux du cône $\overline{\mathsf{NE}}(X)$. Montrons

$$\overline{\mathsf{NE}}(X) = \mathbf{R}^+ e_1 + \mathbf{R}^+ e_2 + \mathbf{R}^+ \ell.$$

Soit $c = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 \ell$ une classe e ective. La classe $\ell + e_1$ est representee par une coube irreductible d'auto-intersection nulle donc est nef. On a donc $0 \leq c \cdot (\ell + e_1) = a_2$ et de même $a_1 \geq 0$. On a aussi $0 \leq c \cdot h = a_3$, ce qui montre ce que l'on veut.

b) Déterminer tous les sous-cônes extrémaux de $\overline{\mathsf{NE}}(X)$ et pour chacun d'eux, déterminer un morphisme $X \to Y$ dont le cône des courbes relatif est ce sous-cône.

Les sous-cônes extremaux sont $\mathbf{R}^+ e_1 + \mathbf{R}^+ e_2 + \mathbf{R}^+ \ell$, $\mathbf{R}^+ e_1 + \mathbf{R}^+ e_2$, $\mathbf{R}^+ e_1 + \mathbf{R}^+ \ell$, $\mathbf{R}^+ e_2 + \mathbf{R}^+ \ell$, $\mathbf{R}^+ e_1$, $\mathbf{R}^+ e_2$, $\mathbf{R}^+ \ell$, $\{0\}$.

Ils correspondent respectivement aux morphismes : constant $X \to \{\text{point}\}$, contraction $X \to \mathbf{P}^2$ de E_1 et E_2, projection $\pi_1 : X \to \mathbf{P}^1$ depuis p_2, projection $\pi_2 : X \to \mathbf{P}^1$ depuis p_1, contraction $X \to X_2$ de E_1 (ou $X_2 \to \mathbf{P}^2$ est l'eclatement de p_2), contraction $X \to X_1$ de E_2 (ou $X_1 \to \mathbf{P}^2$ est l'eclatement de p_1), contraction $(\pi_1, \pi_2) : X \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ de L, identite $X \to X$.

Exercice 4. *Soit D un diviseur de Cartier sur une variété projective normale X de dimension n. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *D est gros ;*

(ii) *D est somme d'un $\mathbf{Q}$-diviseur ample et d'un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif ;*

(iii) *D est numériquement équivalent à la somme d'un $\mathbf{Q}$-diviseur ample et d'un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif ;*

(iv) *il existe un entier positif m tel que l'application rationnelle*

$$\phi_{mD} : X \dashrightarrow \mathbf{P}H^0(X, mD)$$

définie par le système linéaire $|mD|$ soit birationnelle sur son image.

Montrons (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit A un diviseur ample e ectif sur X. Pour chaque $m > 0$, on a une suite exacte

$$0 \to H^0(X, mD - A) \to H^0(X, mD) \to H^0(A, mD).$$

Comme A est de dimension $n-1$, on a vu dans le cours $h^0(A, mD) = O(m^{n-1})$. Comme D est gros, la dimension de l'espace vectoriel du milieu grandit comme am^n, avec $a > 0$, pour une infinite d'entiers m. Il en existe donc un pour lequel $H^0(X, mD - A) \neq 0$. On peut donc ecrire $mD = A + E$, avec E effectif, d'ou (ii).

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est claire. Montrons (iii) $\Rightarrow$ (ii). Si $D \sim_{\mathrm{num}} A + E$, avec A ample et E effectif, on a $D = (D - E) + E$, avec $D - E \sim_{\mathrm{num}} A$. L'amplitude etant une propriete numerique (critere de Kleiman), $D - E$ est ample, d'ou (ii).

Montrons (ii) $\Rightarrow$ (iv). Si $D = A + E$, avec A ample et E effectif, il existe un entier m pour lequel mE est un diviseur (a coefficients entiers) et mA est un diviseur tres ample. Il induit alors un plongement $\phi_{mA} : X \to \mathbf{P}H^0(X, mA)$. Si s est une section de $\mathcal{O}_X(mE)$ de diviseur mE, la multiplication par s induit une injection de $H^0(X, mA)$ dans $H^0(X, mA + mE) = H^0(X, mD)$. Les sections ainsi obtenues de $\mathcal{O}_X(mD)$ definissent un plongement sur $X - E$, donc l'application rationnelle ϕ_{mD} est aussi un plongement sur $X - E$.

Montrons (iv) $\Rightarrow$ (i). L'image $Y := \phi_{mD}(X)$ est une sous-variete dimension n, donc $h^0(Y, rH) \sim ar^n$ pour $r \to +\infty$, avec $a > 0$ (ici, H est la restriction d'un hyperplan a Y). L'application ϕ_{mD}^* induit une injection $H^0(Y, rH) \to H^0(X, rmD)$, donc D est gros.