Université Paris Diderot
U.F.R. de Mathématique

11 mai 2011

EXAMEN DU COURS DE M2
« Introduction à la théorie de Mori »
Responsable : Mr O. DEBARRE

Toutes les variétés sont définies sur un corps algébriquement clos.

Exercice 1. Soit X une variété projective lisse, soit H une hypersurface lisse de X et soit C une courbe dans X telle que

$$(K_X \cdot C) = 0 \quad \text{et} \quad (H \cdot C) < 0.$$

Montrer que X contient une courbe rationnelle.

Exercice 2. Soit X une variété projective lisse de dimension n pour laquelle K_X n'est pas nef et soit D un diviseur nef sur X. On pose

$$r := \sup\{t \in \mathbf{Q} \mid D + tK_X \text{ est nef}\}.$$

a) Montrer que r est un nombre réel fini et positif.

b) Si $(\Gamma_i)_{i\in I}$ est la famille (non vide et au plus dénombrable) de courbes rationnelles qui apparaît dans le théorème du cône (th. 8.1), montrer

$$r = \inf_{i\in I} \frac{(D \cdot \Gamma_i)}{(-K_X \cdot \Gamma_i)}.$$

c) En déduire que l'on peut écrire $r = u/v$, où u et v sont des entiers tels que $0 < v \leq n+1$.

Exercice 3. Soit X une variété projective lisse de dimension n, soit H un diviseur très ample sur X, soit x un point de X, soit $\varepsilon : X' \to X$ l'éclatement de x et soit $E \subset X'$ le diviseur exceptionnel (isomorphe à $\mathbf{P}^{n-1}$).

a) Déterminer l'entier m tel que $\mathcal{O}_E(E) \simeq \mathcal{O}_E(m)$ et en déduire (E^n).

b) Montrer que le diviseur $\varepsilon^*H - E$ est nef sur X'.

c) Soit D un diviseur nef sur X. On suppose que pour toute courbe $C \subset X$ passant par x, on a $(D \cdot C) \geq (H \cdot C)$. Montrer que $\varepsilon^*D - E$ est nef sur X' et en déduire $(D^n) > 0$.

d) Soit D un diviseur nef sur X et soit G un diviseur sur X. On suppose qu'il existe un entier $m \geq 0$ tel que $mD + G$ soit ample et que, pour toute courbe $C \subset X$ passant par x, on ait $(D \cdot C) \geq (G \cdot C)$. Montrer $(D^n) > 0$ (*Indication :* se ramener à c)).

Exercice 4. Soit X une variété projective lisse de dimension n. Soit $R = \mathbf{R}^+ r \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ un rayon K_X-négatif extrémal et soit M_R un diviseur d'appui pour R, c'est-à-dire un diviseur nef sur X tel que

$$\{z \in \overline{\mathrm{NE}}(X) \mid M_R \cdot z = 0\} = R.$$

On rappelle que lieu(R) est la réunion des courbes de X dont la classe est dans R. C'est une sous-variété fermée de X.

Attention : on ne suppose pas que la caractéristique du corps de base est nulle, donc on ne pourra pas utiliser l'existence d'une contraction de R.

a) Soit C une courbe irréductible contenue dans X telle que

$$(M_R \cdot C) < \frac{1}{2n}(-K_X \cdot C).$$

Montrer que C est contenue dans lieu(R) (*Indication :* on pourra appliquer le th. 7.7 du cours avec un diviseur ample somme de M_R et d'un petit multiple d'un ample).

b) Si $(M_R^n) > 0$, montrer qu'il existe un diviseur effectif irréductible E sur X tel que $(E \cdot R) < 0$ (*Indication :* on pourra, en justifiant, décomposer M_R en la somme d'un ample et d'un effectif). En déduire lieu(R) $\neq X$.

c) Montrer la réciproque : si lieu(R) $\neq X$, on a $(M_R^n) > 0$ (*Indication :* on pourra utiliser a) et l'exerc. 3.d)).

d) Expliquer pourquoi, en caractéristique nulle, les questions c) et d) résultent de l'existence d'une contraction de R.