UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L3 S5**
HAX502X Calcul diff. et équa. diff. **Année 2021-2022**

Contrôle continu final

Durée : 1h30 — Documents et instruments électroniques interdits.

Soient a, b, c et d quatre réels strictement positifs. On considère la fonction

$$\begin{aligned} H : (\mathbb{R}_+^*)^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto dx + by - a \ln y - c \ln x \end{aligned}$$

Pour toute la suite de l'énoncé, on considère un point (x_0, y_0) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $y_0 \neq \frac{a}{b}$. On note $z_0 = H(x_0, y_0)$.

1. Énoncer le théorème des fonctions implicites, pour les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
2. Si on veut démontrer ce théorème en appliquant le théorème d'inversion locale, à quelle fonction faut-il appliquer ce dernier ?
3. Peut-on trouver une paramétrisation locale de la ligne de niveau $H^{-1}(\{z_0\})$ de la fonction H ?
4. Décrire la tangente en (x_0, y_0) de la ligne de niveau $H^{-1}(\{z_0\})$.

On s'intéresse maintenant à l'équation différentielle $u' = f(t, u)$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ définie par la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+^*)^2 &\to (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ \left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &\mapsto \begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(dx - c) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. Rappeler la définition d'une solution *maximale*, vérifier que f satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et en énoncer les conclusions.
6. Montrer que, si une solution globale u de l'équation différentielle $u' = f(t, u)$ vérifie $u(t_0) = u(t_1)$ pour deux réels t_0 et t_1 distincts, alors elle est périodique.

Soit $u : J \to (\mathbb{R}_+^*)^2$ une solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(0) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

7. Montrer que $H \circ u$ est constante sur J.
8. Montrer que la ligne de niveau $H^{-1}(\{z_0\})$ est compacte (on pourra se rappeler l'allure de la fonction d'une variable réelle $t \mapsto t - \ln(t)$).
9. En déduire que $J = \mathbb{R}$.
10. On suppose que u est périodique de période T. Montrer que

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b}$$

(on pourra essayer de "séparer les variables x et y").