UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L3 Mathématiques**
HAX502X **Année 2022-2023**
Calcul différentiel et équations différentielles

Examen final

durée 3h

documents et calculatrices interdits

Exercice 1. Soit I un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne en espace. Soit $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ une fonction continue.

1. Donner la définition d'une solution à l'équation différentielle $y' = f(t, y)$.
2. Donner la définition d'une solution maximale à l'équation différentielle $y' = f(t, y)$.
3. Que peut-on dire sur l'espace des solutions globales de l'équation différentielle linéaire homogène $y' = A(t)y$?
4. Rappeler la formule de Duhamel pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
5. Montrer que, si $I = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^n$, et si f est bornée, alors toute solution maximale à $y' = f(t, y)$ est globale. *On pourra utiliser cette propriété dans les exercices suivants.*

Exercice 2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = (x^2 - 3x + 2)e^{-(1+x^2)} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. Justifier qu'il existe une unique solution globale $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. Trouver les valeurs de x_0 pour lesquelles x est constante.
3. Montrer soigneusement que, si $1 < x_0 < 2$, alors $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$.
4. Donner, pour toute valeur de x_0, la limite $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ (on ne justifiera que très rapidement en comparant avec la question précédente, et on pourra faire un dessin).
5. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de la fonction x considérée dans les questions précédentes, la solution globale y au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - 3y + 2)e^{-(1+y^2)} \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Exercice 3. On considère une application $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1, et on suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$\|f(y) - f(x)\| \geq C\|y - x\|.$$

On veut montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^d$ sur lui- même.

1. Montrer que f est injective.
2. Rappeler le lien entre différentielle et dérivée directionnelle.
3. Montrer que l'image $f(\mathbb{R}^d)$ est ouverte dans $\mathbb{R}^d$.
4. Montrer que l'image $f(\mathbb{R}^d)$ est fermée dans $\mathbb{R}^d$.
5. Conclure.

Exercice 4. Pour cet exercice, on utilise les définitions suivantes.

— On appelle *champ de vecteurs* une application $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

— On dit qu'un champ de vecteurs est *complet* si toute solution maximale de l'équation différentielle autonome $y' = F(y)$ est globale.

— Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on appelle *orbite* de x par le champ de vecteurs l'image $y(]\alpha, \beta[)$ dans $\mathbb{R}^n$ de la solution maximale $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = x \end{cases}$$

— Soient F_1 et F_2 deux champs de vecteurs. On dit que F_1 est *équivalent* à F_2 s'il existe une fonction $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^*$, à valeurs strictement positive, de classe C^1, telle que $F_2 = cF_1$. Notez que ça définit bien une relation d'équivalence : si $F_2 = cF_1$, alors $F_1 = \frac{1}{c}F_2$.

Enfin, on note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit F un champ de vecteur. Montrer que la fonction $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $c(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\|F(x)\|_2^2}}$ est une fonction de classe C^1.
2. Montrer que tout champ de vecteurs est équivalent à un champ de vecteurs complet.

On considère maintenant deux champs de vecteurs équivalents F_1 et F_2, et on souhaite démontrer qu'ils ont les mêmes orbites. On suppose donc que F_1 est équivalent à F_2, et on note $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^1 telle que $F_2 = cF_1$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, et soient $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ les solutions maximales aux problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = F_1(y_1) \\ y_1(0) = x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_2' = F_2(y_2) \\ y_2(0) = x \end{cases}$$

3. Montrer que, s'il existe $t \in I_1$ avec $F(y_1(t)) = 0$ alors $y_1(I_1) = \{x\}$.
4. On suppose qu'il existe une fonction $h : I_1 \to I_2$ telle que $y_1 = y_2 \circ h$ et que h est un difféomorphisme sur son image. Sous la condition $F_1(x) \neq 0$, déterminer la dérivée de h' en fonction de y_1 et de la fonction c.
5. Conclure : montrer que $y_1(I_1) = y_2(I_2)$.