Faculté des Sciences Montpellier
LICENCE - Semestre impair 2020-21

HLMA103 BioMath
Séance T. D. n°1 : échauffement et rappels

Inégalités

Exercice 1 [Peut-on faire le produit de deux inégalités ?]. On suppose que a et b sont deux nombres réels vérifiant les inégalités suivantes : $1 \leq a \leq 4$, et $-3 \leq b \leq -1$. Quelles sont les inégalités vérifiées par le produit ab ? Choisir la bonne réponse :

(a) $-4 \leq ab \leq -3$,

(b) $-12 \leq ab \leq -1$,

(c) $-3 \leq ab \leq -4$,

(d) aucune de ces inégalités n'est correcte.

Exercice 2 [Peut-on faire le quotient de deux inégalité ?]. Soient a et b deux nombres réels, a étant non nul. Supposons que $-2 \leq a \leq -1$ et $-6 \leq b \leq -4$. Quelles sont les inégalités vérifiées par le quotient b/a ? Choisir la bonne réponse :

(a) $3 \leq b/a \leq 4$,

(b) $2 \leq b/a \leq 3$,

(c) $2 \leq b/a \leq 6$,

(d) aucune des ces inégalités n'est correcte.

On suppose maintenant que $-0,5 \leq a \leq 1$ et $-10 \leq b \leq -7$. Quelles sont les inégalités vérifiées par le quotient b/a ? Choisir la bonne réponse :

(a) $14 \leq b/a \leq 20$,

(b) $-7 \leq b/a \leq 20$,

(c) $-10 \leq b/a \leq 14$,

(d) aucune des ces inégalités n'est correcte.

Exponentielle, logarithme, et puissances

Exercice 3 [Rappels indispensables]. Parmi les égalités ci-dessous, lesquelles sont vraies ?
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$

(a) $e^{ab} = e^a\, e^b$

(b) $e^{ab} = (e^a)^b$,

(c) $e^{ab} = (e^b)^a$,

(d) $e^{ab} = e^{a^b}$.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, x et y strictement positifs

(a) $\ln(xy) = (\ln x)(\ln y)$,

(b) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$,

(c) $\ln(x + y) = \ln x + \ln y$,

(d) $\ln(x + y) = \ln(x)\ln(y)$.

Pour tout $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, x, y strictement positifs

(a) $x^{a+b} = x^a + x^b$,

(b) $x^{a+b} = x^a x^b$,

(c) $x^a + y^a = (x + y)^a$,

(d) $x^{ab} = (x^a)^b$.

Exercice 4 [Résolution d'équation]. Résoudre les équations suivantes :

1. Trouver l'ensemble des nombres réels x tels que $\exp(2\ln x) = 9$;
2. Trouver l'ensemble des nombres réels y tels que $\ln(y+6)-\ln(y+2)+\ln(y+3) = 0$.

Exercice 5 [Problème facultatif]. Le radium se désintègre au cours du temps en obéissant à la loi suivante : $M(t) = M_0 e^{-0{,}000436\, t}$ où $M(t)$ est la masse présente au temps t exprimé ici en années. Au départ de $t = 0$, combien de temps faut-il attendre pour que la masse présente se soit réduite de moitié ? Et au départ de $t = 10$? Quel phénomène remarquable venez-vous de mettre en évidence ?

HLMA 103 — TD1

Exercice 5 :

Première question : pour quel temps t a-t-on $M(t) = \frac{M(0)}{2}$?

On utilise l'expression $M(t) = M_0 e^{-0,000436\, t}$ pour écrire l'équation sous la forme :

$$M_0 e^{-0,000436 \times t} = \left(M_0 e^{-0,000436 \times 0}\right) \times \frac{1}{2}$$

Puisque $e^0 = 1$, l'équation s'écrit :

$$M_0 e^{-0,000436 \times t} = M_0 \times \frac{1}{2}$$

On peut simplifier par M_0, de sorte que l'équation est équivalente à

$$e^{-0,000436 \times t} = \frac{1}{2}$$

En prenant le logarithme, on en déduit :

$$-0,000436 \times t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

donc

$$t = \frac{\ln(1/2)}{-0,000436}$$

on peut simplifier un peu par les propriétés du logarithme :

$$t = \frac{\ln(2)}{0,000436}$$

Deuxième question : Cette fois-ci on cherche t tel que $M(10+t) = \frac{M(10)}{2}$.

C'est équivalent à $M_0 e^{-0,000436 \times (t+10)} = \frac{1}{2} M_0 e^{-0,000436 \times 10}$

En utilisant la propriété fondamentale de l'exponentielle : $e^{a+b} = e^a \times e^b$, on peut simplifier par $e^{-0,000436 \times 10}$ pour obtenir que l'équation est équivalente à

$$M_0 e^{-0,000436 \times t} = \frac{1}{2} M_0 .$$

C'est la même équation qu'à la première question ! On a donc la même solution.

On a mis en évidence le phénomène de demi-vie du radium.

HLMA103 BioMath

Séance T. D. n°3 : domaines de définition et limites (exercices d'entrainement)

Exercice 1 [Domaine de définition]. Donner les domaines de définition des fonctions qui suivent :

(a) $a(x) = \ln(\frac{x+1}{x-1})$;

(b) $b(x) = 4e^{5x} + 2e^{3x} - 2e^{x}$;

(c) $c(x) = \sin(\cos(x)) + \tan(e^{x})$;

(d) $d(x) = |\frac{x^2+5x}{\ln(x)}|$;

(e) $e(x) = \frac{1}{x^2+1}$;

(f) $f(x) = \frac{1}{x-8}$;

(g) $g(x) = \sqrt{1-x^2}$;

(h) $h(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$;

(i) $i(x) = \frac{1}{\ln(x)}$;

(j) $j(x) = \sqrt{\ln(x^2+4)}$;

(k) $k(x) = \sqrt{e^{x} - x}$.

Exercice 2 [Limites]. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^4)}{x^3},\ \lim_{x\to+\infty}(x^2 - \ln x),\ \lim_{x\to 0^+} x^4 \ln x,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+3}}{x^3},\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x^2}},\ \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x + \cos(1/x)),\ \lim_{x\to-\infty}(x^2 - x + \cos(1/x)),\ \lim_{x\to 0^+} \exp[\sin(1/\ln(x))],\ \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Donner les domaines de définition :

$$a(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Ici il y a deux opérations auxquelles il faut faire attention :

1- la division par $x-1$

2- prendre le logarithme de $\frac{x+1}{x-1}$.

On se rappelle qu'on peut diviser seulement par un nombre non nul, donc la première opération est bien définie pour $x-1 \neq 0$.

On se rappelle qu'on peut prendre le logarithme d'un nombre si et seulement si il est strictement positif, donc la deuxième opération est bien définie lorsque $\frac{x+1}{x-1} > 0$.

Il reste à résoudre les inégalités obtenues :

* $x-1 \neq 0$ est vrai ssi $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

* $\frac{x+1}{x-1} > 0$ ssi $\begin{cases} x+1>0 \text{ et } x-1>0 \\ \text{ou} \\ x+1<0 \text{ et } x-1<0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x > -1 \text{ et } x > 1 \\ \text{ou} \\ x < -1 \text{ et } x < 1 \end{cases}$

ssi $x > 1$ ou $x < -1$.

Finalement, le domaine de définition de $a(x)$ est l'ensemble $\boxed{]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[}$

$$b(x) = 4e^{5x} + 2e^{3x} - 2e^{x}$$

Ici, il n'y a aucune opérations qui puisse être interdite, donc le domaine de définition de $b(x)$ est $\boxed{\mathbb{R}}$ tout entier.

$$c(x) = \sin(\cos(x)) + \tan(e^{x})$$

Comme $\tan(e^x) = \frac{\sin(e^x)}{\cos(e^x)}$, c'est défini pour $\cos(e^x) \neq 0$, donc pour $e^x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

L'ensemble de définition de $c(x)$ est donc

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \{\ln(\tfrac{\pi}{2} + k\pi) \mid k \in \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{sinon, } \frac{\pi}{2}+k\pi<0}\}}.$$

$$d(x) = \left| \frac{x^2+5x}{\ln(x)} \right|$$

Ici il y a un logarithme est un quotient.

$\ln(x) \rightsquigarrow x > 0$

$\frac{1}{\ln(x)} \rightsquigarrow \ln(x) \neq 0 \iff x \neq 1$

Donc $d(x)$ est défini sur $\boxed{]0,1[\cup]1,+\infty[}$.

$$e(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

C'est bien défini pour $x^2+1 \neq 0$ or pour tout x, on a $x^2 \geq 0$ et $1 > 0$, donc $x^2+1 > 0$.

Donc $e(x)$ est défini sur $\boxed{\mathbb{R}}$.

$$f(x) = \frac{1}{x-8}$$

C'est défini sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{8\}} =]-\infty, 8[\cup]8,+\infty[$

$g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Ici, on a une racine carrée. On peut prendre la racine carrée de tout nombre positif ou nul.

Donc $g(x)$ est bien définie si $1 - x^2 \geqslant 0$.

Cette inégalité est équivalente à $x^2 \leqslant 1$, ce qui est vrai exactement quand $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Donc $g(x)$ est bien définie sur le segment $\boxed{[-1, 1]}$.

$h(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

C'est bien défini pour $x^2 + 2x - 3 \geqslant 0$

On se rappelle comment déterminer le signe d'un polynôme du second degré :

le signe de $ax^2 + bx + c$ est

du signe de a à l'extérieur des racines (partout s'il n'y en a pas)

du signe opposé à celui de a à l'intérieur des racines.

Ici, on a une racine évidente $x = 1$,

on peut donc factoriser

$$x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$$

ce qui donne les deux racines distinctes 1 et -3.

Le coefficient directeur est positif, donc x^2+2x-3 est positif ou nul sur $\boxed{]-\infty,-3] \cup [1,+\infty[.}$

C'est aussi le domaine de définition de $h(x)$.

$$i(x) = \frac{1}{\ln(x)}$$

$\ln(x)$ est bien défini pour $x>0$

$\frac{1}{\ln(x)}$ est bien défini si $x>0$ et $\ln(x)\neq 0$ $(\Leftrightarrow x\neq 1)$

Donc $i(x)$ est défini sur $\boxed{]0,1[\cup]1,+\infty[}$.

$$j(x) = \sqrt{\ln(x^2+4)}$$

C'est bien défini si $x^2+4>0$ et $\ln(x^2+4)\geqslant 0$.

On a $x^2\geqslant 0$ donc $x^2+4\geqslant 4>0$.

De plus, par croissance du logarithme,

$$\ln(x^2+4)\geqslant \ln 4 > \ln 1 = 0$$

Donc $j(x)$ est défini sur $\boxed{\mathbb{R}}$ tout entier.

$k(x)=\sqrt{e^x - x}$

C'est bien défini quand $e^x - x \geq 0$.

Le raisonnement à suivre est moins immédiat que pour les autres questions. On peut par exemple utiliser un tableau de variations de $f(x) = e^x - x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On vérifie ainsi que $k(x)$ est défini sur $\boxed{\mathbb{R}.}$

Calculer les limites

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^4)}{x^3}}$ Par propriété fondamentale du logarithme, $\ln(x^4) = 4\ln(x)$.

Or par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0$, donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^4)}{x^3} = \boxed{0}$.

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} (x^2 - \ln x)}$ On peut écrire $x^2 - \ln x = x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right)$.

Par croissances comparées $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$,

donc par limite (d'une somme puis) d'un produit, $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - \ln x) = \boxed{+\infty}$

$\boxed{\lim_{x \to 0^+} x^4 \ln x} = \boxed{0}$ par croissances comparées.

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+3}}{x^3}}$ On a, par propriété fondamentale de l'exponentielle, $e^{x+3} = e^3 e^x$,

donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+3}}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} e^3 \frac{e^x}{x^3} = \boxed{+\infty}$ par croissances comparées.

$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} e^{-1/x^2}}$ Considérons la fonction $f(x) = \frac{-1}{x^2}$.

On a $\frac{1}{x^2} e^{-1/x^2} = -f(x) e^{f(x)}$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

Donc par composition, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} e^{-1/x^2} = \lim_{y \to -\infty} -y e^y = \boxed{0}$ par croissance comparées.

$\boxed{\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x}}$ Pour tout x $(\neq 0)$, on a $-1 \leqslant \sin \frac{1}{x} \leqslant 1$,

donc $-x^2 \leqslant x^2 \sin \frac{1}{x} \leqslant x^2$.

Or $\lim_{x \to 0} -x^2 = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$ donc par théorème des gendarmes,

$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \boxed{0}$.

$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - x + \cos(1/x)\right)$

Pour tout x $(\neq 0)$, on a $-1 \leqslant \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$,

donc $x^2 - x - 1 \leqslant x^2 - x + \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x^2 - x + 1$

Les polynômes des deux côtés ont $+\infty$ pour limite en $+\infty$, donc par théorème des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - x + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \boxed{+\infty}$.

(Remarque : la minoration suffit pour conclure)

$\lim_{x\to-\infty} \left(x^2 - x + \cos(1/x)\right)$

Par le m̂ raisonnement que ci-dessus, la limite est $\boxed{+\infty}$.

$\lim_{x\to0^+} \exp\left[\sin\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right]$

On a $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

donc par inverse, $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$

Par composition, (et continuité de sin) $\lim_{x\to0^+} \sin\left(\frac{1}{\ln x}\right) = \sin(0) = 0$.

Enfin, par composition à nouveau, $\lim_{x\to0^+} \exp\left(\sin\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) = \exp(0) = \boxed{1}$.

$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1}$

On commence par simplifier l'expression grâce à l'identité remarquable $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

On en déduit que $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1} (x+1) = \boxed{2}$.

HLMA103 BioMath
Feuille T. D. n°4 : Fonctions, continuité et modélisation

Application directe

Exercice 1 [Dichotomie]. Montrer que l'équation $x^3 - x - 1 = 1$ a au moins une solution entre 0 et 2. Pouvez-vous en situer une par rapport à 1 ? Essayez d'être encore plus précis.

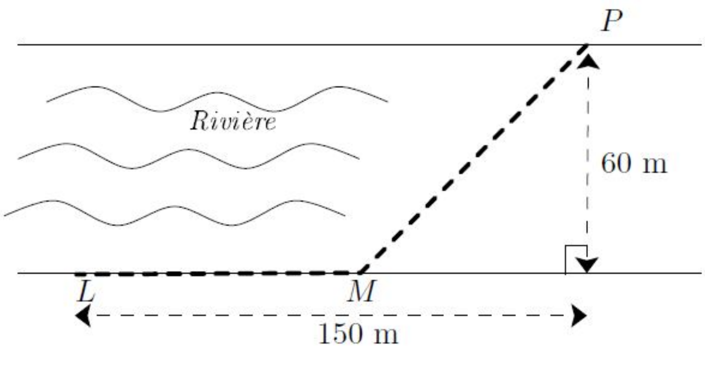
Modéliser

Exercice 2 [Optimiser un trajet]. Une loutre entend les cris de détresse de son petit, resté dans le terrier de l'autre côté de la rivière, en amont (voir figure ci-dessous ; la loutre se trouve initialement au point L et le petit au point P) : elle doit rejoindre son petit le plus rapidement possible. Elle se déplace à la vitesse $v_1 = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ sur la berge et $v_2 = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ dans l'eau (le courant est très faible et on suppose son effet négligeable). Par ailleurs, la rivière est large de 60 m et le terrier est placé à 150 m en amont de l'endroit où se trouve la loutre lorsqu'elle entend les cris.

a) Exprimez le temps (en secondes) que met la loutre pour rejoindre son petit comme une fonction T d'une variable rélle x.

b) Précisez un domaine de définition pour T qui exprime correctement les contraintes du problème de départ.

c) Démontrez que le problème de la loutre (rejoindre son petit le plus rapidement possible) admet une solution optimale.



Exercice 3 [Minimiser une aire à volume constant]. Les échanges entre une cellule et son environnement s'effectuent via sa membrane et sont proportionnels à l'aire de celle-ci. On considère une cellule cylindrique de base un disque de rayon r et de hauteur h.

a) Quel est le volume V de la cellule, exprimé en fonction de r et h ? Quelle est l'aire A de sa membrane ?

b) On suppose désormais que le volume de cette cellule est égal à 1 mm^3.

c) Exprimer l'aire A comme fonction du rayon r.

d) Calculer $\lim_{r\to 0^+} A(r)$ et $\lim_{r\to +\infty} A(r)$.

e) Montrer qu'il existe (au moins) une valeur du rayon pour laquelle l'aire de la membrane (et donc les échanges de la cellule avec son environnement) est minimale.

Dichotomie

On considère l'équation $x^3 - x - 1 = 1$.
L'expression de gauche dépend de x, notons la comme une fonction de x, $f(x) = x^3 - x - 1$, elle est continue car c'est un polynôme.
On veut trouver un nombre x entre 0 et 2 tel que $f(x) = 1$.
Cela fait penser au théorème des valeurs intermédiaires (p.16 du poly).

Pour appliquer ce théorème, prenons $a = 0$ et $b = 2$. On a alors $f(a) = f(0) = -1$ et $f(b) = f(2) = 8 - 2 - 1 = 5$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel γ compris entre -1 et 5, il existe $c \in [0,2]$ tel que $f(c) = \gamma$.
Pour $\gamma = 1$, on obtient donc l'existence d'une solution $x = c$ à l'équation $x^3 - x - 1 = 1$, dans $[0,2]$.

Si on cherche maintenant à situer une solution par rapport à 1, on peut regarder $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1$. On constate qu'en appliquant à nouveau le théorème des valeurs intermédiaires avec $a = 1$ et $b = 2$, on obtient l'existence d'une solution $x = c$ à l'équation $f(x) = 1$ entre 1 et 2.

Pour être plus précis, on remarque que 1 est le milieu de $[0,2]$, et que considérer la valeur $f(1)$ nous a permis d'identifier l'une des moitié du segment dans laquelle il y a une solution.
On peut réitérer ce procédé, avec le milieu $\frac{3}{2}$ de $[1,2]$.
On a $f(3/2) = \frac{27}{8} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{7}{8} > 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $[1, 3/2]$, il existe une solution

à $f(x) = 1$ dans le segment $[1, 3/2]$.

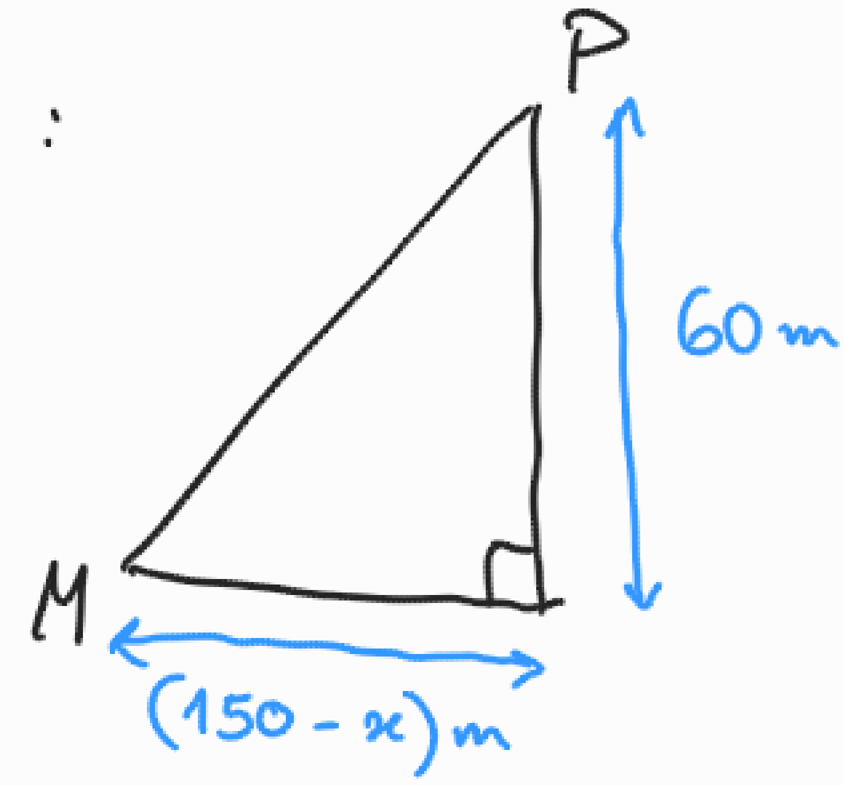
On pourrait continuer en considérant le milieu de $[1, 3/2]$, etc.
C'est le principe de la dichotomie.

La loutre

a) On commence par déterminer les distances parcourues sur la berge et dans la rivière en fonction d'une variable réelle x (puisqu'on connaît la vitesse de la loutre dans les deux cas on pourra en déduire le temps total : le temps t (en secondes) nécessaire pour parcourir une distance d (en mètres) à une vitesse v (en $m \cdot s^{-1}$) est égal à $t = \frac{d}{v}$).

Par exemple, on peut prendre x = la distance entre L et M, parcourue sur la berge, que la loutre parcourt en $\frac{x}{v_1}$ secondes.

Alors la distance entre M et P est obtenue en considérant le triangle rectangle :



Par Pythagore, cette distance vaut $\sqrt{(150-x)^2+60^2}$. La loutre la parcourt à la vitesse v_2, donc en

$$\frac{\sqrt{(150-x)^2+60^2}}{v_2} \text{ secondes.}$$

Finalement, le temps total que met la loutre pour rejoindre son petit est :

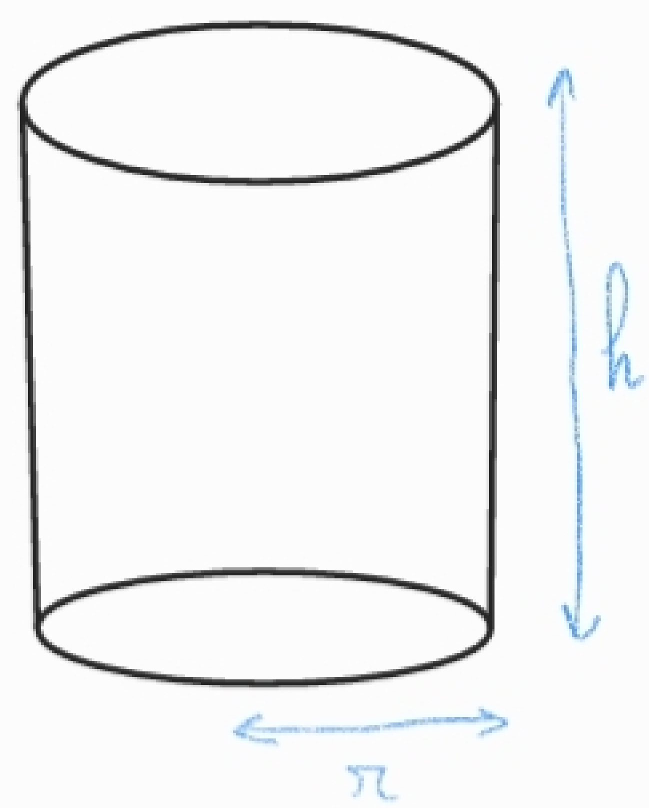
$$T(x) = \frac{x}{3} + \frac{\sqrt{(150-x)^2+60^2}}{2}$$

(On pourrait simplifier un peu l'expression, mais ce n'est pas indispensable pour cet exercice)

b) Il est raisonnable de supposer que la loutre ne partira pas dans le mauvais sens, et ne dépassera pas la position de son petit sur la berge opposée. Donc le domaine de définition adapté au problème est : $x \in [0, 150]$.
(Abstraitement, la fonction $T(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$)

c) Que la loutre rejoigne son petit le plus rapidement possible s'interprète, en terme de la fonction T, comme le fait que T atteigne son minimum (sur son ensemble de définition).
Or le domaine de définition est ici un segment, donc le théorème des extrema (poly p17) assure l'existence d'un minimum pour T, sous réserve que cette fonction soit continue. Enfin, la fonction T est bien continue car c'est une somme de composées de fonctions usuelles continues.

Minimisation d'aire

a) 

Le volume d'un cylindre est égal à l'aire de la base fois la hauteur.

Ici, $V = \pi r^2 h$.

La membrane est formée de deux parties :

→ les deux disques aux extrémités, chacun d'aire πr^2,

→ et le tube entre les deux, d'aire $\underbrace{2\pi r}_{\text{périmètre du cercle}} \underbrace{h}_{\text{hauteur}}$.

Donc $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.

b-c) On suppose $V = 1$, donc $h = \frac{1}{\pi r^2}$.

En remplaçant dans A, on obtient A comme fonction de r :

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}.$$

d) $\lim_{r \to 0^+} A(r) = +\infty$ par somme de limites, car

$$\lim_{r \to 0^+} r^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r} = +\infty$$

$\lim_{r \to +\infty} A(r) = +\infty$ par somme de limites, car

$$\lim_{r \to +\infty} r^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r} = 0$$

e) Le fait que $\lim_{r \to 0^+} A(r) = +\infty$ signifie que pour tout nombre réel M, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout r compris entre 0 et ε, $A(r) > M$.

Par exemple, il existe $a > 0$ tel que $A(r) > A(1) = 2\pi + 2$ pour $r \in]0, a]$.

De même, comme $\lim_{r \to +\infty} A(r) = +\infty$, il existe b tel que $A(r) > 2\pi + 2$ pour $r \in [b, +\infty[$.

On peut bien sûr supposer que $a \leqslant 1$ et $b \geqslant 1$.

La fonction $A(r)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc aussi sur le segment $[a, b]$. Par le théorème des extrema, $A(r)$ atteint son minimum sur $[a,b]$ en un point $c \in [a, b]$.

Enfin, on a $A(c) \leqslant A(1)$ car $1 \in [a, b]$, donc $A(c)$ est aussi inférieur à toutes les valeurs $A(r)$ pour $r \leqslant a$ ou $r \geqslant b$. Donc $A(r)$ atteint son minimum global en c.

Dans les termes du problème, la cellule cylindrique de volume 1 a une aire minimale lorsque le rayon de sa base est égal à c.

Faculté des Sciences Montpellier
LICENCE - Semestre impair 2020-21

HLMA103 BioMath
Feuille T. D. n°5 : Dérivée, tableau de variation, recherche d'extrema

Appliquer le cours

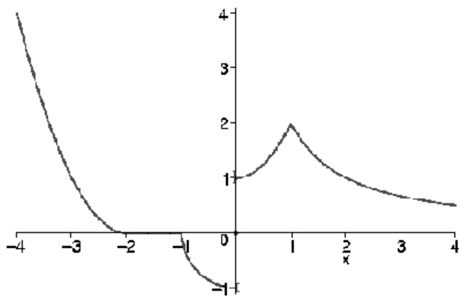
Exercice 1 [Calculer des dérivés]. Donner les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivée :

$$x \longmapsto 7x^4 - 12x^3 + x \ ; \quad x \longmapsto \sqrt{x^2+1} \ ; \quad x \longmapsto 3^x - 2^x \ ; \quad x \longmapsto \ln(x^3 - 2)$$

$$x \longmapsto \sin(2x)\cos(7x) \ ; \quad x \longmapsto \frac{1}{(2x+1)^4}$$

Comprendre

Exercice 2 [Lecture de graphe]. On considère une fonction dont le graphe est



Sans calcul, indiquer les intervalles sur lesquels la fonction est continue, puis dérivable. Essayer ensuite de décrire (par des formules) la fonction dont c'est le graphe.

Établir un tableau de variation et résoudre un problème d'optimisation

Exercice 3 [Le retour de la loutre]. Cet exercice prolonge l'exercice 2 de la feuille numéro 4.

a) Dressez le tableau des variations de la fonction T.

b) Trouvez une solution au problème de la loutre (rejoindre son petit le plus rapidement possible). Est-ce la seule ?

Exercice 4 [Minimiser une aire à volume constant (suite)]. Cet exercice prolonge l'exercice 3 de la feuille numéro 4.

a) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du rayon l'aire de la membrane est minimale.

b) Déterminer la hauteur correspondante.

TD5

Exercice 1.

$f(x) = 7x^4 - 12x^3 + x$ domaine de définition $= \mathbb{R}$

polynôme domaine de dérivabilité $= \mathbb{R}$

$$f'(x) = 7\cdot 4\, x^3 - 12\cdot 3\, x^2 + 1$$
$$= 28x^3 - 36x^2 + 1$$

$g(x) = \sqrt{x^2+1}$ domaine de définition $= \mathbb{R}$

$= \sqrt{u(x)}$ domaine de dérivabilité $= \mathbb{R}$ (dérivabilité de fonctions composées p20)

où $u(x) = x^2 + 1$

fonction composée

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\, u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$h(x) = 3^x - 2^x$ domaine de définition $= \mathbb{R}$

$= e^{x\ln(3)} - e^{x\ln(2)}$ domaine de dérivabilité $= \mathbb{R}$

$$h'(x) = \ln(3)\cdot e^{x\ln(3)} - \ln(2)\, e^{x\ln(2)}$$
$$= \ln(3)\, 3^x - \ln(2)\, 2^x$$

La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante.

On a $x^3 = 2 \iff x = 2^{\frac{1}{3}}$

Donc $x^3 > 2 \iff x > 2^{1/3}$

$k(x) = \ln(x^3-2)$ domaine de définition $=]2^{1/3}, +\infty[$ (car $x^3 - 2 > 0 \iff x > 2^{1/3}$)

$= \ln(u(x))$ domaine de dérivabilité $=]2^{1/3}, +\infty[$

avec $u(x) = x^3 - 2$

$$k'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{3x^2}{x^3-2}$$

$l(x) = \sin(2x)\cos(7x)$ domaine de définition $= \mathbb{R}$

$= u(x)\, v(x)$ domaine de dérivabilité $= \mathbb{R}$

produit

$$l'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$$
$$= 2\cos(2x)\cos(7x) + \sin(2x)(-7\sin(7x))$$
$$= 2\cos(2x)\cos(7x) - 7\sin(2x)\sin(7x)$$

$m(x) = \frac{1}{(2x+1)^4}$ domaine de définition $= \mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}\}$

$= (2x+1)^{-4}$ domaine de dérivabilité $= \mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}\}$

$= (u(x))^{-4}$

$$m'(x) = -4\, u'(x)\, (u(x))^{-5}$$
$$= -8(2x+1)^{-5}$$
$$= \frac{-8}{(2x+1)^5}$$

Faculté des Sciences Montpellier
LICENCE - Semestre impair 2020-21

HLMA103 BioMath
Feuille T. D. n°5 : Dérivée, tableau de variation, recherche d'extrema

Appliquer le cours

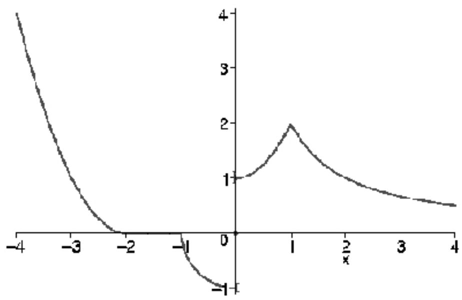
Exercice 1 [Calculer des dérivés]. Donner les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivée :

$$x \longmapsto 7x^4 - 12x^3 + x \;;\quad x \longmapsto \sqrt{x^2+1} \;;\quad x \longmapsto 3^x - 2^x \;;\quad x \longmapsto \ln(x^3-2)$$

$$x \longmapsto \sin(2x)\cos(7x) \;;\quad x \longmapsto \frac{1}{(2x+1)^4}$$

Comprendre

Exercice 2 [Lecture de graphe]. On considère une fonction dont le graphe est



pas continue en 0

pas dérivable en −1
en 0
en 1

Sans calcul, indiquer les intervalles sur lesquels la fonction est continue, puis dérivable. Essayer ensuite de décrire (par des formules) la fonction dont c'est le graphe.

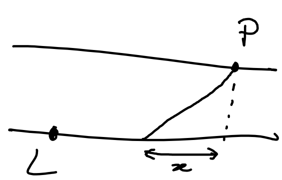
voir correction sur Moodle.

Établir un tableau de variation et résoudre un problème d'optimisation

Exercice 3 [Le retour de la loutre]. Cet exercice prolonge l'exercice 2 de la feuille numéro 4.

a) Dressez le tableau des variations de la fonction T.

b) Trouvez une solution au problème de la loutre (rejoindre son petit le plus rapidement possible). Est-ce la seule ?



On se rappelle du TD4 que $T(x) = \dfrac{150-x}{3} + \dfrac{\sqrt{x^2+60^2}}{2}$, défini sur $[0,150]$.

a) Tableau de variations

x	0		$\frac{120}{\sqrt{5}}$		150
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
T		$\searrow$	$T\left(\frac{120}{\sqrt{5}}\right)$	$\nearrow$	

$T(x)$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,150]$.

$$T'(x) = \frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+60^2}}$$

$$= \frac{-1}{3} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+60^2}}$$

$$T'(x) > 0 \iff \frac{x}{2\sqrt{x^2+60^2}} > \frac{1}{3} \iff 3x > 2\sqrt{x^2+60^2} \iff (3x)^2 > 4(x^2+60^2)$$

car les deux côtés sont ≥ 0 (on regarde $x \in [0,150]$)

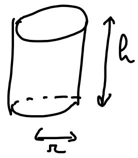
$$\iff 9x^2 > 4x^2 + \underbrace{4\cdot 60^2}_{2^2\cdot 60^2 = 120^2} \iff 5x^2 > 120^2 \iff x > \frac{120}{\sqrt{5}}$$

b) D'après le tableau de variations, T admet un unique minimum sur $[0,150]$, en $x = \frac{120}{\sqrt{5}}$. Donc il y a une solution unique au pbm de la barque.

Exercice 4 [Minimiser une aire à volume constant (suite)]. Cet exercice prolonge l'exercice 3 de la feuille numéro 4.

a) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du rayon l'aire de la membrane est minimale.

b) Déterminer la hauteur correspondante.



$1 = V = \pi r^2 h$

On se rappelle que
$$\begin{cases} A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}, \quad h(r) = \frac{1}{\pi r^2}, \\ \lim_{r \to 0^+} A(r) = +\infty \qquad \lim_{r \to +\infty} A(r) = +\infty \\ \text{et } A(r) \text{ admet un minimum.} \end{cases}$$

a) Le minimum n'est pas atteint sur les bornes de $]0, +\infty[$, donc il est atteint à l'intérieur.

Par le théorème 12 du poly, comme A est dérivable sur $]0, +\infty[$, $A'(r) = 0$ en la valeur r tq $A(r)$ est minimale.

On a $A'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2}$ pour $r \in]0, +\infty[$.

Donc $A'(r) = 0 \iff 4\pi r = \frac{2}{r^2} \iff 4\pi r^3 = 2 \iff r^3 = \frac{1}{2\pi}$

$$\iff r = \frac{1}{(2\pi)^{1/3}}$$

Autre solution pour la a : dresser le tableau de variation complet de $A(r)$ sur $]0, +\infty[$.

Donc le minimum est atteint en $r = \frac{1}{(2\pi)^{1/3}}$.

b) Lorsque l'aire est minimale, la hauteur vaut $h\left(\frac{1}{(2\pi)^{1/3}}\right) = \frac{1}{\pi\left(\frac{1}{(2\pi)^{1/3}}\right)^2}$

$$= \frac{(2\pi)^{2/3}}{\pi}.$$

Faculté des Sciences Montpellier
LICENCE - Semestre impair 2020-21

HLMA103 BioMath
Feuille T. D. n°6 : Bilan sur les fonctions

Comprendre

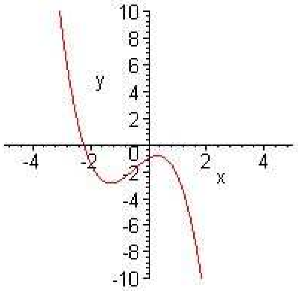
Exercice 1 [Lecture de graphes]. Laquelle de ces affirmations est vraie ?

A : (d) est la dérivée de (a), (e) est la dérivée de (b) et (f) est la dérivée de (c).

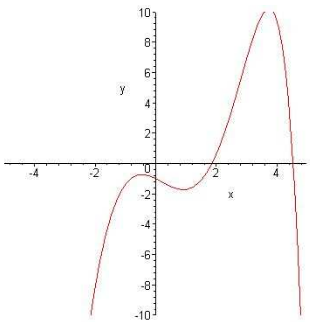
B : (e) est la dérivée de (a), (d) est la dérivée de (b) et (f) est la dérivée de (c).

C : (f) est la dérivée de (a), (d) est la dérivée de (b) et (e) est la dérivée de (c).

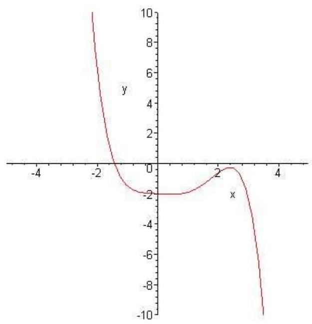
D : (f) est la dérivée de (a), (e) est la dérivée de (b) et (d) est la dérivée de (c).



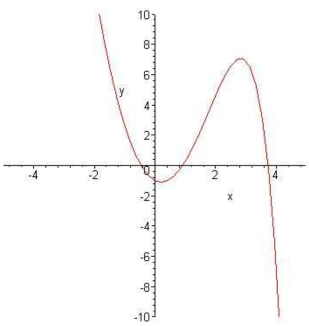
(a)



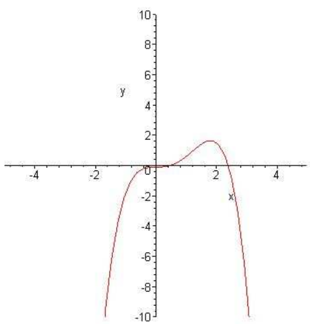
(b)



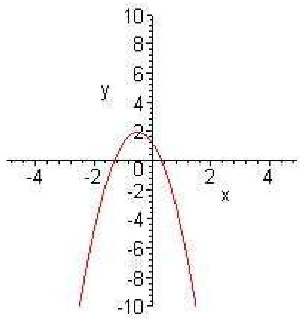
(c)



(d)



(e)



(f)

Résoudre des problèmes

Exercice 2 [Étude de fonction]. On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)\,e^{-x}$.

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Etudier le sens de variation et la convexité de f. Calculer $f(1)$ et les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis tracer le graphe de f.
3. Justifier que l'équation $f(x) = -1$ admet une solution $x_0 \in \mathbb{R}$; est-elle unique ? Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près (préciser la méthode).
4. Prouver que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$. Quel est l'ensemble de définition de la fonction réciproque que l'on peut alors définir ? On note désormais f^{-1} cette fonction réciproque ; tracer le graphe de f^{-1} sur la même figure.
5. Prouver que f^{-1} est dérivable au point $y = \frac{2}{e}$ et calculer $(f^{-1})'\left(\frac{2}{e}\right)$.

Exercice 3 [Distances d'équilibre]. La distance r qui sépare deux molécules résulte d'un équilibre entre une force attractive en $\frac{1}{r^7}$ et une force répulsive en $\frac{1}{r^{13}}$. Le potentiel correspondant, appelé "potentiel de Jones", est donné par la fonction

$$V : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad r \longmapsto V(r) = \left(\frac{4}{r}\right)^{12} - \left(\frac{4}{r}\right)^{6}.$$

Les distances où V est minimum s'appellent "distances d'équilibre".

a) Calculer $\lim_{r\to 0} V(r)$ et $\lim_{r\to+\infty} V(r)$.

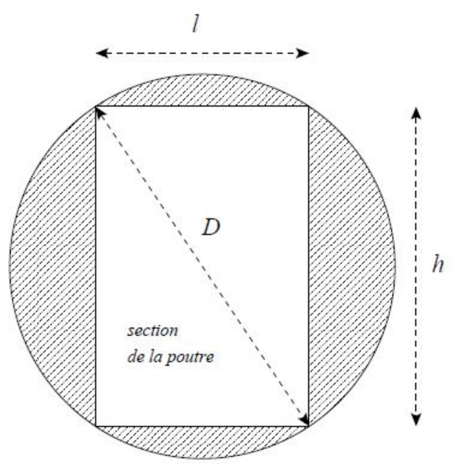
b) Justifier que la fonction V est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et trouver les points d'annulation de sa dérivée.

c) Déterminer les distances d'équilibre. Représenter rapidement le graphe de V.

Modéliser

Exercice 4 [Un problème de taille]. Lorsqu'on veut équarrir (c'est-à-dire tailler) un tronc d'arbre de manière à obtenir la poutre la plus résistante possible, on se garde bien de lui donner une section carrée, mais une section qui soit plus haute que large. En mécanique, on montre que la résistance de la poutre est proportionnelle au produit de l'aire de la section par sa hauteur. Trouver les dimensions de la section de la poutre la plus résistante que l'on puisse fabriquer avec un tronc de diamètre D (on supposera que le tronc est cylindrique ; la section est donc un rectangle dont les diagonales sont de mesure D).

Indication: On notera h la hauteur de la poutre et ℓ sa largeur (ce sont respectivement la longueur et la largeur de la section rectangulaire, voir figure). On pourra déterminer la relation qui lie h, ℓ et D , et exprimer ensuite la résistance de la poutre en fonction de ℓ (et de la constante D), pour finalement chercher le maximum de la fonction obtenue, en justifiant soigneusement la méthode utilisée.



Faculté des Sciences Montpellier
LICENCE - Semestre impair 2020-21

HLMA103 BioMath
Feuille T. D. n°6 : Bilan sur les fonctions

Comprendre

Exercice 1 [Lecture de graphes]. Laquelle de ces affirmations est vraie ?

A : (d) est la dérivée de (a), (e) est la dérivée de (b) et (f) est la dérivée de (c).

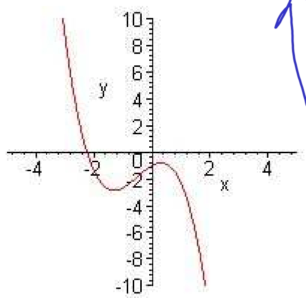
B : (e) est la dérivée de (a), (d) est la dérivée de (b) et (f) est la dérivée de (c).

C : (f) est la dérivée de (a), (d) est la dérivée de (b) et (e) est la dérivée de (c).

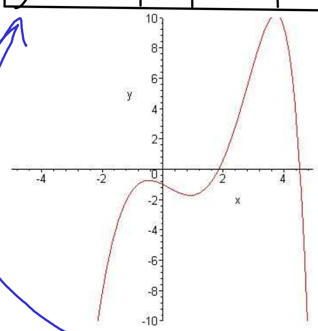
D : (f) est la dérivée de (a), (e) est la dérivée de (b) et (d) est la dérivée de (c).

f) − 0 + 0 −

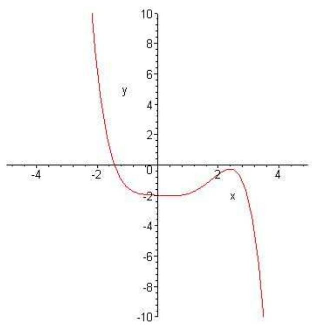
d) + 0 − 0 + 0 −



(a)



(b)

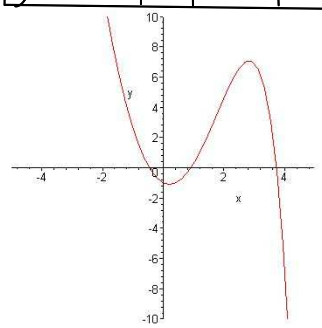


(c)

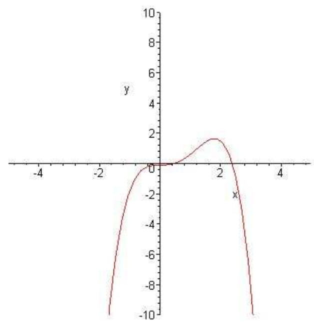
Tableau de signe

d) + 0 − 0 + 0 −

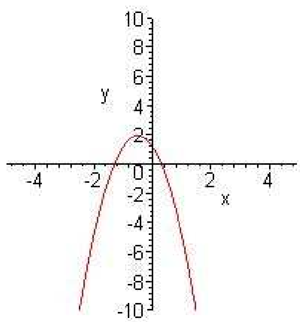
f) − 0 + 0 −



(d)



(e)



(f)

Résoudre des problèmes

Exercice 2 [Étude de fonction]. On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)\,e^{-x}$.

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Etudier le sens de variation et la convexité de f. Calculer $f(1)$ et les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis tracer le graphe de f.
3. Justifier que l'équation $f(x) = -1$ admet une solution $x_0 \in \mathbb{R}$; est-elle unique ? Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près (préciser la méthode).
4. Prouver que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$. Quel est l'ensemble de définition de la fonction réciproque que l'on peut alors définir ? On note désormais f^{-1} cette fonction réciproque ; tracer le graphe de f^{-1} sur la même figure.
5. Prouver que f^{-1} est dérivable au point $y = \frac{2}{e}$ et calculer $(f^{-1})'\left(\frac{2}{e}\right)$.

Exercice 3 [Distances d'équilibre]. La distance r qui sépare deux molécules résulte d'un équilibre entre une force attractive en $\frac{1}{r^7}$ et une force répulsive en $\frac{1}{r^{13}}$. Le potentiel correspondant, appelé "potentiel de Jones", est donné par la fonction

$$V : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad r \longmapsto V(r) = \left(\frac{4}{r}\right)^{12} - \left(\frac{4}{r}\right)^{6}.$$

Les distances où V est minimum s'appellent "distances d'équilibre".

a) Calculer $\lim_{r\to 0} V(r)$ et $\lim_{r\to +\infty} V(r)$.

b) Justifier que la fonction V est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et trouver les points d'annulation de sa dérivée.

c) Déterminer les distances d'équilibre. Représenter rapidement le graphe de V.

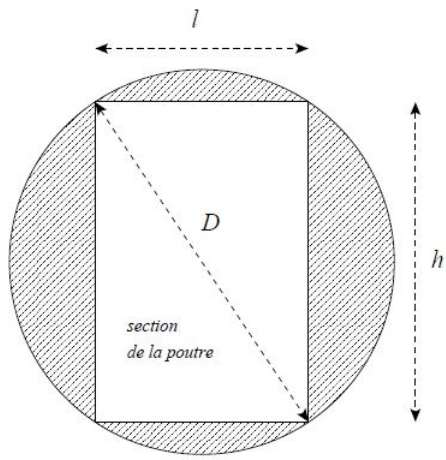
Modéliser

Exercice 4 [Un problème de taille]. Lorsqu'on veut équarrir (c'est-à-dire tailler) un tronc d'arbre de manière à obtenir la poutre la plus résistante possible, on se garde bien de lui donner une section carrée, mais une section qui soit plus haute que large. En mécanique, on montre que la résistance de la poutre est proportionnelle au produit de l'aire de la section par sa hauteur. Trouver les dimensions de la section de la poutre la plus résistante que l'on puisse fabriquer avec un tronc de diamètre D (on supposera que le tronc est cylindrique ; la section est donc un rectangle dont les diagonales sont de mesure D).

$K > 0$

$= K \cdot \text{aire} \cdot \text{hauteur}$

Indication: On notera h la hauteur de la poutre et ℓ sa largeur (ce sont respectivement la longueur et la largeur de la section rectangulaire, voir figure). On pourra déterminer la relation qui lie h, ℓ et D , et exprimer ensuite la résistance de la poutre en fonction de ℓ (et de la constante D), pour finalement chercher le maximum de la fonction obtenue, en justifiant soigneusement la méthode utilisée.



aire $= \ell \times h$

hauteur $= h$

on suppose $h \geq \ell$

On cherche à trouver le maximum de $\ell \times h^2$ pour les choix de ℓ et h possible.

Exercice 2

$$f(x) = (1+x)e^{-x} = u(x)\,v(x) \qquad \text{avec } u(x) = 1+x \qquad v(x) = e^{-x}$$

1) Comme produit de fonctions usuelles dérivables partout, la fonction f est dérivable partout, et

$$f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$
$$= 1 \cdot e^{-x} + (1+x)\cdot(-e^{-x})$$
$$= -x\,e^{-x}$$

La fonction f' est encore un produit de fonctions usuelles dérivables partout, donc f' est dérivable, donc f est deux fois dérivable, et

$$f''(x) = -e^{-x} + (-x)(-e^{-x})$$
$$= (x-1)e^{-x}$$

2) Pour déterminer le sens de variation, on étudie le signe de $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff -xe^{-x} > 0 \overset{e^{-x}>0}{\iff} -x > 0 \iff x < 0$$

d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Pour la convexité, on étudie le signe de $f''(x)$.

$$f''(x) \geqslant 0 \iff (x-1)e^{-x} \geqslant 0 \iff x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$$

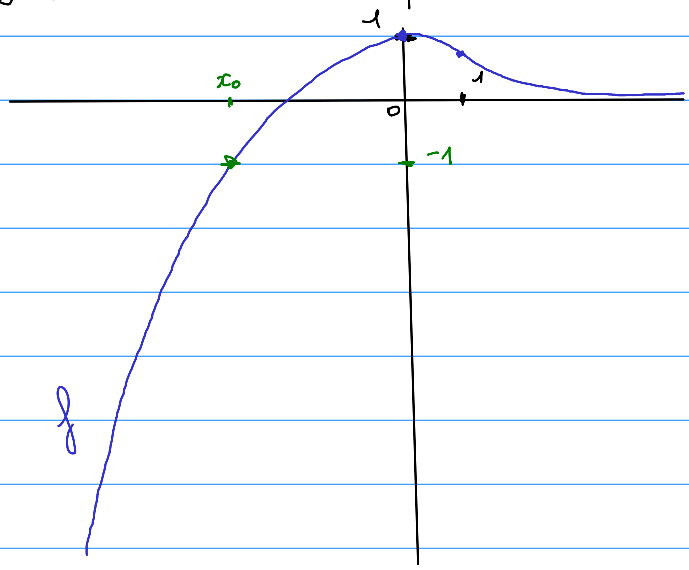
donc la fonction f est convexe sur $[1, +\infty[$, et elle est concave sur $]-\infty, 1[$.

$f(x) = (1+x)e^{-x}$

$f(1) = (1+1)e^{-1} = \frac{2}{e}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{-x} + x e^{-x}\right) = 0$ par croissance comparées

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ par produit de limites infinies.



3) On considère l'équation $f(x) = -1$

La fonction f est décroissante sur $[0,+\infty[$, avec $f(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc $f(x) > 0$ pour $x \in [0,+\infty[$ donc l'équation $f(x) = -1$ n'a pas de solution dans $[0,+\infty[$.

f est continue (comme produit de fonctions usuelles continues)

Sur $]-\infty, 0[$, la fonction f est strictement croissante, avec $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, donc par le théorème de la bijection réciproque,

f est bijective entre $]-\infty, 0[$ et $]-\infty, 1[$.

Or $-1 \in]-\infty, 1[$, donc il existe une unique solution à $f(x) = -1$ sur $]-\infty, 0[$.

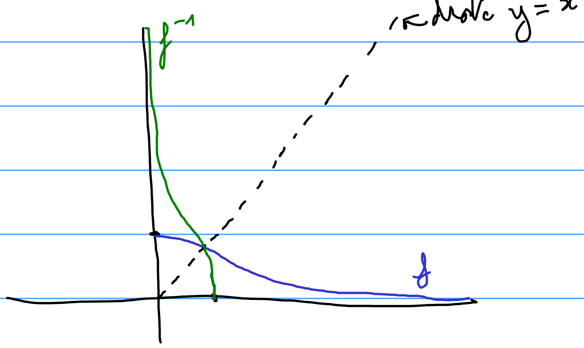
On peut aussi utiliser le théorème des valeurs intermédiaire pour montrer l'existence d'une solution :

on a $f(0) = 1$ et $f(-2) = (1-2)e^{2} = -e^{2} < -1$

donc par le TVI il existe une solution à $f(x) = -1$ dans $[-2, 0]$.

Pour trouver une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près, on peut par exemple appliquer la méthode de dichotomie.

4. La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$, avec $f(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc par le théorème de la bijection réciproque, la fonction f est bijective et sa fonction réciproque f^{-1} est définie sur $]0,1]$.



Le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite $y=x$.

Théorème de la bijection réciproque : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \longrightarrow J$ est bijective. De plus J est de m. nature que I. La fonction réciproque $f^{-1}: J \longrightarrow I$ de f est continue, strictement monotone, de m. sens de variation que f.

Théorème de la bijection réciproque dans un cas particulier :
Soit $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:[a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement décroissante. Alors $J = f([a,b[)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:[a,b[\to J$ est bijective. De plus $J =]c,d]$ où $d = f(a)$ et $c = \lim\limits_{x\to b} f(x)$. La fonction réciproque $f^{-1}:]c,d] \to [a,b[$ est continue et strictement décroissante.

5. Regarder le corrigé sur Moodle.

Exercice 4.

On cherche le maximum de $\ell \times h^2$.

On a $h = \sqrt{D^2 - \ell^2}$ par le thm de Pythagore.

Donc on cherche le maximum de la fonction $R(\ell) = \ell(D^2 - \ell^2)$,

$= D^2\ell - \ell^3$

pour $\ell \in \left]0, \frac{D}{\sqrt{2}}\right]$.

planche infiniment fine

poutre carrée.

On étudie la fonction R sur $\left]0, \frac{D}{\sqrt{2}}\right]$.

On calcule : $R'(\ell) = D^2 - 3\ell^2$

racines du polynôme du second degré en ℓ : $D^2 - 3\ell^2$.

On a $R'(\ell) > 0 \iff \ell \in \left]-\frac{D}{\sqrt{3}}, \frac{D}{\sqrt{3}}\right[$

d'où le tableau de variations :

ℓ	0		$D/\sqrt{3}$		$D/\sqrt{2}$
$R'(\ell)$		$+$	0	$-$	
$R(\ell)$		$\nearrow$	$R(D/\sqrt{3})$	$\searrow$	

Le maximum de la fonction R est atteint pour $\ell = \frac{D}{\sqrt{3}}$.

On a alors $h = \sqrt{D^2 - \ell^2} = \sqrt{D^2 - \frac{D^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} D$.

Exercice 3.

$V : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad V(r) = \left(\frac{4}{r}\right)^{12} - \left(\frac{4}{r}\right)^6 = 4^{12}\frac{1}{r^{12}} - 4^6\frac{1}{r^6}$

a) $\lim\limits_{r \to 0^+} V(r) = +\infty$ car $V(r) = \left(\frac{4}{r}\right)^{12}\left(1 - \left(\frac{r}{4}\right)^6\right)$ et par produit de limites.

$\lim\limits_{r \to +\infty} V(r) = 0$ car $\lim\limits_{r \to +\infty} \frac{1}{r^{12}} = \lim\limits_{r \to +\infty} \frac{1}{r^6} = 0$.

$$V(r) = \left(\frac{4}{r}\right)^{12} - \left(\frac{4}{r}\right)^{6} = 4^{12} r^{-12} - 4^{6} r^{-6}$$

b) La fonction V est dérivable comme somme de fonctions usuelles dérivables sur leurs ensembles de définition.

$(r^a)' = a r^{a-1}$

$(r^{12})' = 12 r^{11}$

$(r^{-12})' = -12 \cdot r^{-12-1}$

$$V'(r) = 4^{12} \times (-12) \times r^{-13} - 4^{6} \times (-6) \times r^{-7}$$

On a $V'(r) = 0 \iff 4^6 \times 6 \times r^{-7} = 12 \times 4^{12} \times r^{-13}$

$\times r^{13}$

$\iff 4^6 \times 6 \times r^6 = 12 \times 4^{12}$

$\times \frac{1}{4^6 \times 6}$

$\iff r^6 = 2 \times 4^6$

$\iff r = (2 \times 4^6)^{1/6} = 4 \cdot 2^{1/6}$.

comme $r \in \mathbb{R}_+^*$

Donc V' a un unique point d'annulation en $r = 4 \cdot 2^{1/6}$.

c) Le minimum de V est • soit atteint dans $]0, +\infty[$, et dans ce cas, comme V est dérivable, c'est un point d'annulation de V' (Thm 12 du poly).

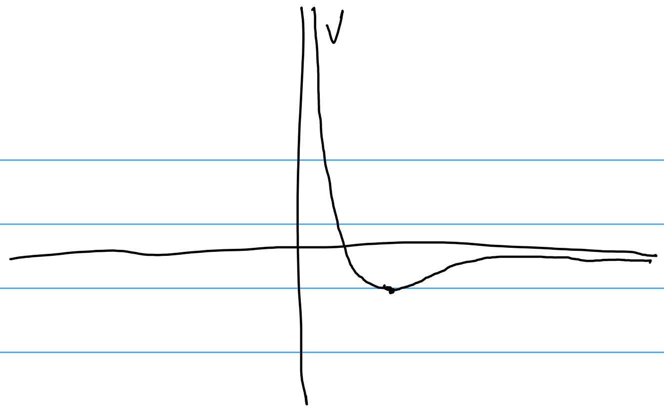
• soit égal à l'une des limites de V en 0 ou en $+\infty$.

On a $V(4 \cdot 2^{1/6}) = \left(\frac{4}{4 \cdot 2^{1/6}}\right)^{12} - \left(\frac{4}{4 \cdot 2^{1/6}}\right)^{6}$

$$= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{4}$$

C'est $< \lim\limits_{r \to 0} V(r)$ et $< \lim\limits_{r \to +\infty} V(r)$, donc V atteint son minimum en l'unique point d'annulation de sa dérivée, $r = 4 \cdot 2^{1/6}$.

L'unique distance d'équilibre est $r = 4 \cdot 2^{1/6}$.


V