Examen à distance HLMA412 – Compléments d'Analyse

Durée de l'épreuve : 2h.
Notez l'heure de début et l'heure de fin de composition sur la copie.

— *Les notations utilisées sont celles des documents de cours.*
— *Comprendre et interprétez les consignes fait partie de l'examen.*
— *Si vous pensez qu'il y a une erreur d'énoncé, indiquez le sur la copie précisément.*

Partie I — Vrai/Faux. Consigne : *pour chacune des affirmations en italique suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée sur la copie.*

1. *On a* $\limsup_{n\to\infty} u_n \geq \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *pour toute suite* (u_n).
2. *L'ensemble* $\{0\} \cup [1,2]$ *est un fermé de* $\mathbb{R}$.
3. *L'ensemble* $\{0\} \cup [1,2[$ *est un fermé de* $[0,2[$.
4. Soit K un compact de $\mathbb{R}^3$. *L'ensemble* $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists (y,z) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z) \in K\}$ *est compact.*
5. Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^3$. On note $u_n = (x_n, y_n, z_n)$ en coordonnées. *La suite* (u_n) *converge si et seulement si les trois suites réelles* $(x_n + 2y_n + 3z_n)$, $(2x_n + 2y_n - z_n)$ *et* $(x_n - 4z_n)$ *convergent.*
6. *Une intersection quelconque de compacts est compacte.*
7. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^p$ est complète si toute suite de Cauchy à valeurs dans A converge vers un élément de A. *Une partie complète de* $\mathbb{R}^p$ *est fermée.*
8. *La fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \textit{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} & \textit{sinon} \end{cases}$$
est continue partout.

Partie II — Exercice. Consigne : *Rédiger une solution complète et précise de l'exercice suivant.*

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^n$. Étant donnés deux réels strictement positifs $0 < r < s$ et un élément $x \in \mathbb{R}^n$, on considère l'**anneau** de centre x, de rayon intérieur r et de rayon extérieur s défini par
$$A(x,r,s) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid r < \|y - x\| < s\}$$

1. Dans le cas $n = 1$, écrire $A(x,r,s)$ comme une réunion d'intervalles.
2. Écrire $A(x,r,s)$ comme intersection de deux ouverts mieux connus. En déduire que c'est un ouvert.
3. Soit $a \in A(x,r,s)$. Déterminer un réel strictement positif t, explicite comme fonction de x, r et s, tel que la boule euclidienne ouverte $\mathring{B}(a,t)$ soit incluse dans $A(x,r,s)$. Illustrer le raisonnement par un dessin sur la copie.
4. Déterminer l'adhérence de $A(x,r,s)$.

Partie III — Question.

Selon vous, à quoi peuvent servir les notions topologiques dans $\mathbb{R}^n$?