UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER | **L2 Mathématiques**
HLMA412 Compléments d'Analyse | **Année 2020-2021**

TD 1 : Retour sur les suites réelles

Exercice 1. $0.999999\ldots < 1$?

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et l un nombre réel. Rappeler la définition avec des quantificateurs de $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

Exercice 3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels, de limites respectives $l_u \in \mathbb{R}$ et $l_v \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Quelle est la limite de la suite $(u_n v_n)$? Démontrer ce résultat.

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n+3}{2n+1}$. Montrer que (u_n) converge vers 1, et pour $\epsilon = 1/10$ et $\epsilon = 1/100$, déterminer le rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$.

Exercice 5. Quelles sont les valeurs d'adhérences de la suite définie par $u_n = (-1)^n \cdot 3 + 2$?

Exercice 6. Rappeler la définition d'une suite de Cauchy. Les suites réelles définies par les relations de récurrence suivantes sont-elles de Cauchy ?

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$
2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}}$

Exercice 7. On considère la suite (u_n) définie par une donnée initiale $u_0 \geq -2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = F(u_n)$, avec $F(x) = \sqrt{2+x}$.

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -1$, puis $u_0 = 3$.
2. Déterminer les points fixes de F.
3. Pour $u_0 > 2$, montrer que (u_n) est décroissante, et tend vers 2.
4. Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 8.

1. Soit y un réel ≥ -1 et n un entier naturel. Montrer l'inégalité
$$(1+y)^n \geq 1+ny.$$
2. Soit x un réel. On considère les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ définies, pour $n \geq |x|$, par
$$u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad\qquad v_n = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$$
Montrer que u_n et v_n sont adjacentes, et rappeler la notation habituelle pour leur limite commune.

Exercice 9.

1. Calculer $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{n})$, et comparer avec $\sup_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n(1+\frac{1}{n})$.
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles. Montrer que
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$
Trouver un exemple où les inégalités sont strictes.
3. Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f est croissante alors
$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{et} \quad f(\liminf_{n\to\infty} x_n) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$
Que dire si f est décroissante ?

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L2 Mathématiques**
HLMA412 Compléments d'Analyse **Année 2020-2021**

TD 2 : Topologie de $\mathbb{R}^d$

Pour les quatre premiers exercices, on n'utilisera pas de critères séquentiels pour montrer des propriétés topologiques. Faire des dessins.

Exercice 1. On considère la bande verticale

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Montrer que C est fermé. Quel est l'intérieur de C ?

Exercice 2. On considère les parties de $\mathbb{R}^2$:

$$U :=]-1, 1[\times]-1, 1[\qquad \text{et} \quad F := [-1, 1] \times [-1, 1].$$

1. Calculer le plus grand réel r, et le plus petit réel R, tels que

$$B(0, r) \subset F \subset B(0, R),$$

   où $B(0, r)$ désigne la boule euclidienne *fermée* de centre 0 et de rayon r.
2. Montrer que U est ouvert.
3. Montrer que F est fermé.
4. Déterminer l'intérieur de F.

Exercice 3. Quels sont l'adhérence et l'intérieur de $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$?

Exercice 4. Soit (a, b) un vecteur de $\mathbb{R}^2$, et c un réel. On considère

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by > c\}.$$

Si $(x_0, y_0) \in D$, déterminer le plus grand réel r tel que la boule euclidienne ouverte $\mathring{B}((x_0, y_0), r)$ soit incluse dans D. Montrer que D est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, lesquels sont ouverts ? fermés ? compacts ? Déterminer leur adhérence et leur intérieur.

$$X_1 = [-1, 2] \qquad X_2 = [-1, 2[$$
$$X_3 = \mathbb{Q} \qquad X_4 = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$$
$$X_5 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \qquad X_6 = \mathbb{R}^*$$
$$X_7 = \left\{\frac{1}{n} \mid n > 0\right\} \qquad X_8 = \left\{\frac{1}{n} \mid n > 0\right\} \cup \{0\}$$
$$X_9 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[\qquad X_{10} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[$$

Exercice 6. On rappelle que la distance euclidienne entre deux points $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$d(x,y) = \|y - x\|_2 = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

Si A est une partie de $\mathbb{R}^n$, et $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$d(x,A) := \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}.$$

1. Identifier $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,A) = 0\}$ à un ensemble défini en cours.
2. Soit ϵ un réel strictement positif. Montrer que l'ensemble

$$A_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,A) < \epsilon\}$$

   est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (faire un dessin).
3. Identifier $\displaystyle\bigcap_{\epsilon \in \mathbb{R}_+^*} A_\epsilon$.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$. Pour tout n, on note $u_n = (x_n, y_n)$ en coordonnées. Déterminer si les équivalences suivantes sont vraies :

1. $\lim u_n = 0 \iff \lim(x_n + y_n) = \lim(x_n - y_n) = 0$
2. (u_n) converge $\iff$ $(x_n + y_n)$ et $(x_n - y_n)$ convergent
3. $\lim u_n = 0 \iff \lim x_n^4 + y_n^2 = 0$
4. (u_n) converge $\iff$ $(x_n^4 + y_n^2)$ converge
5. $\lim u_n = (s,t) \in \mathbb{R}^2 \iff \lim\big((x_n - s)^4 + (y_n - t)^2\big) = 0$

Exercice 8. Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^3$. On note $u_n = (x_n, y_n, z_n)$ en coordonnées. Déterminer si les équivalences suivantes sont vraies :

1. (u_n) converge $\iff$ $(x_n + y_n + z_n)$, $(2y_n + 3z_n)$, et $(-z_n)$ convergent
2. (u_n) converge $\iff$ $(x_n + 2y_n + 3z_n)$, $(2x_n + 2y_n - z_n)$ et $(x_n - 4z_n)$ convergent.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, qui converge vers une limite $l \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $A := \{l\} \cup \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 10. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si $a \in \bar{A}$, alors $\mathbb{R}^n \setminus A$ n'est pas voisinage de a.
2. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$ est l'intérieur de $\mathbb{R}^n \setminus A$.
3. En déduire que A est dense dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si son complémentaire est d'intérieur vide.
4. Soit $a \in \bar{A}$. Rappeler comment construire une suite (u_n) à valeurs dans A qui converge vers a.

Exercice 11. Démontrer ou infirmer les assertions suivantes. Donner dans chaque cas un exemple ou un contre-exemple.

1. Une intersection finie de compacts est compacte.
2. Une intersection quelconque de compacts est compacte.
3. Une réunion finie de compacts est compacte.
4. Une réunion quelconque de compacts est compacte.
5. Le complémentaire d'un ouvert non-borné est compact.

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L2 Mathématiques**
HLMA412 Compléments d'Analyse **Année 2020-2021**

TD 3 : Fonctions et topologie

Exercice 1. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (y, z)$ est continue.

Exercice 2. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note toujours $\|x\|$ la norme euclidienne de x, et on introduit les notations :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$$

1. Montrer que
$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$
2. En déduire qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue en x si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on ait
$$\|y - x\|_\infty < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$
3. Montrer que
$$\|x\| \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|$$
4. En déduire qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue en x si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on ait
$$\|y - x\|_1 < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$
5. Montrer plus précisément que
$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|$$

Exercice 3. Déterminer en quels points les fonctions suivantes sont continues :

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{y^3-xy}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_4(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 4. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Déterminer si les ensembles suivants sont fermés :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \leq 0\} = \mathcal{A} \qquad \mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) < 2\}$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x+y) \leq 0\} = \mathcal{C} \qquad \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = g(x)\}$$
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x)^2 + g(x)^2 = 0\} = \mathcal{E} \qquad \mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x)g(x) = 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = g(nx)\} = \mathcal{G} \qquad \mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists n \in \mathbb{Z}, f(nx) = g(nx)\}$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour chaque $r \in \mathbb{R}$, on appelle l'ensemble $f^{-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = r\}$ un *ensemble de niveau* de f, l'ensemble $f^{-1}(]r, +\infty[) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > r\}$ un *ensemble de sur-niveau* de f, et l'ensemble $f^{-1}(]-\infty, r[) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < r\}$ un *ensemble de sous-niveau* de f.

1. Montrer que si f est continue, ses ensembles de sous-niveau et de sur-niveau sont ouverts.
2. Montrer que si f est continue, ses ensembles de niveau sont fermés.
3. Montrer que f est continue si et seulement si tous ses ensembles de sous-niveau et ses ensembles de sur-niveau sont ouverts.

Exercice 6. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie non-vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} d(\cdot, A) : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\} \end{aligned}$$

est continue.

Exercice 7. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction uniformément continue. Soient (x_n) et (y_n) deux suites à valeur dans A telles que $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$. Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}^*$ sur lesquels la fonction $x \mapsto 1/x$ est uniformément continue.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|f(x)\| \leq a\|x\| + b$.

Exercice 9. Soit $k \in]0, 1[$. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ une application k-contractante, c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in A \times A$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

On suppose de plus que $f(A) \subset A$.

1. Montrer que f est uniformément continue.
2. On s'intéresse à la suite définie par $u_0 \in A$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie.
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\|u_{n+1} - u_n\| \leq k^n\|u_1 - u_0\|.$$
   (c) Montrer que la suite (u_n) est de Cauchy.
   (d) En déduire que f admet un point fixe.
3. Montrer que f admet un *unique* point fixe.