HLMA 412

"Compléments d'analyse"

Thibault Delcroix

Chapitre 1 : Retour sur les suites réelles

Chapitre 2 : Topologie de $\mathbb{R}^d$

Chapitre 3 : Fonctions et topologie

7 CM, 7 TD fini fin mars

Contrôle des connaissances :
(à préciser selon les mesures sanitaires).

1 CC à distance début mars
+ 1 CF sur tables en avril

note finale : $\max\left(CF, \frac{2}{3}CF + \frac{1}{3}CC\right)$

Page Moodle : notes CM, feuilles TD

thibaut.delcroix@umontpellier.fr questions cours
TD grp A

david.theret ———— TD grp B

francois.fillastre ———— 3 premiers TD grp C
lionel.darondeau ———— 4 derniers

Chapitre 1 : Retour sur les suites réelles

Qu'est ce qu'un nombre réel ?

ensembles de nombres :

- $\mathbb{N}$ entiers naturels $0 < 1 < 2 \dots$ axiomes de Peano
- $\mathbb{Z}$ entiers relatifs $\dots -1 < 0 < 1 < 2 \dots$
  construits à partir de $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Q}$ nombres rationnels, construits à partir de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Q} = \{(p,q) \ ; \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, \ \mathrm{pgcd}(p,q) = 1\}$$

c'est un corps muni d'un ordre total

e.g. $(p,q) \times (p',q') = (pp', qq')$ multiplication

$(p,q) < (p',q')$ ssi $pq' < p'q$ ordre

- $\mathbb{R}$ construit à partir de $\mathbb{Q}$

Pour la culture :

$\mathbb{R}$ est construit à partir de $\mathbb{Q}$ via les coupures de Dedekind

Définition : Une partie S de $\mathbb{Q}$ (c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$) est une coupure si :

i) $S \neq \emptyset$ et $S \neq \mathbb{Q}$,

ii) $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, si $x \in S$ et $y \leq x$, alors $y \in S$

iii) S n'a pas de plus grand élément.

Exemples :

(1) Pour tout $r \in \mathbb{Q}$,

$$S_r := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$$ est une coupure.

(2) L'ensemble

$$S_{\sqrt{2}} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$ est une coupure.

L'ensemble $\mathcal{C}$ des coupures de $\mathbb{Q}$ est muni

d'un ordre (l'inclusion)

d'une addition (si $S, T \in \mathcal{C}$,

$$S+T := \{x+y \,;\, x \in S, y \in T\})$$

d'une multiplication.

Fait [Dedekind] :

$(\mathcal{C}, \leq, +, \times)$ est une formalisation du corps ordonné des nombres réels.

Remarque :

On identifie un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ à la coupure S_r, ceci fournit $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

On reprend avec votre intuition de $\mathbb{R}$.

On admet deux propriétés clefs de $\mathbb{R}$:

<u>Propriété clef 1</u> ("Propriété de la borne sup") :

Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Rappels :

- Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite <u>majorée</u> s'il existe un réel x tq $\forall a \in A,\ a \leqslant x$.

  On dit que x est un <u>majorant</u> de A.

- On dit que x est la <u>borne supérieure</u> de A si :

  1) x est un majorant de A

  2) $\forall y \in \mathbb{R},\ y < x \Rightarrow \exists a \in A,\ y \leqslant a$.

  "x est le plus petit majorant de A".

On note $\sup(A)$ la borne supérieure de A.

<u>Propriété clef 2</u> ("Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$")

Pour toute paire de nombres réels distincts $x < y$, il existe un nombre rationnel $z \in \mathbb{Q}$ tq $x < z < y$.

<u>Corollaire</u> : Tout réel $x \in \mathbb{R}$ est borne supérieure d'une partie de $\mathbb{Q}$.

<u>Preuve</u> : Considérons $\{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\} =: A \subset \mathbb{Q}$.
C'est une partie majorée de $\mathbb{R}$ (par exemple, x est un majorant) donc par la propriété clef 1, elle admet une borne supérieure $\sup(A) \in \mathbb{R}$.

Comme x est un majorant de A, on a $\sup(A) \leqslant x$.

Par l'absurde, supposons $\sup(A) < x$, alors par la propriété clef 2, $\exists z \in \mathbb{Q}$ tq

$$\sup(A) < \underbrace{z < x}_{\text{implique } z \in A}.$$

ce qui contredit $\sup(A) < z$.

$\square$

Retour sur les coupures avec l'intuition des nb réels :

- une coupure de $\mathbb{Q}$ est un ensemble de la forme $S_x :=]-\infty, x[\cap \mathbb{Q}$ avec $x \in \mathbb{R}$.
- on identifie les coupures et $\mathbb{R}$ via la borne sup :

$$x = \sup(S_x) = \sup(]-\infty, x[\cap \mathbb{Q}).$$

Théorème (Toute suite réelle croissante majorée converge) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et majorée.

Alors (u_n) converge vers $\sup\{u_n \,;\, n\in\mathbb{N}\}$.

Preuve : Notons $\ell := \sup\{u_n \,;\, n\in\mathbb{N}\}$.

On a en particulier $u_n \leqslant \ell$ pour tout n.

Soit $\varepsilon > 0$ un réel strictement positif.

Comme $\ell - \varepsilon < \ell$, $\ell-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $\{u_n \,;\, n\in\mathbb{N}\}$. Donc $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tq $\ell-\varepsilon < u_{n_0}$.

Comme (u_n) est croissante, on en déduit :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \ell-\varepsilon < u_n \leqslant \ell < \ell+\varepsilon.$$

Autrement dit, (u_n) converge vers ℓ. $\square$

Remarque : Pour un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ non majoré, on pose $\sup(A) := +\infty$.
Ainsi, pour une suite croissante non majorée, on a toujours $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sup\{u_n \,;\, n\in\mathbb{N}\}$.

Cas de la borne inférieure

Proposition : Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie minorée. Alors il existe un unique plus grand minorant de A, appelé sa borne inférieure et noté $\inf A$.

Preuve : On considère la partie $B := \{-a \,;\, a \in A\}$.

C'est une partie majorée de $\mathbb{R}$ (si x est un minorant de A, alors $-x$ est un majorant de B), qui admet une borne supérieure $\sup B$.

Montrons que $\inf A = -\sup B$:

$\forall a \in A$, $-a \in B$ donc $-a \leqslant \sup B$,

donc $a \geqslant -\sup B$

On a montré que $-\sup B$ est un minorant de A.

Soit m un minorant de A, alors $\forall a \in A$, $m \leqslant a$.

Donc $\forall b \in B$, $m \leqslant -b$, donc $-m$ est un majorant de B. Donc $-m \geqslant \sup(B)$ (le plus petit des majorants)

donc $m \leqslant -\sup(B)$.

$\square$

Thm : Soit (u_n) une suite réelle décroissante et minorée.
Alors (u_n) converge vers $\inf\{u_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

Preuve : exercice.

Remarque : là encore, si A n'est pas minorée,
on pose $\inf A = -\infty$.

Rappels (valeurs d'adhérence). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

i) On appelle suite extraite (ou sous-suite) de (u_n) toute suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe une application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, avec pour tout n,

$$v_n = u_{\phi(n)}.$$

On notera simplement $(u_{\phi(n)})$ la suite extraite.

ii) On dit que $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est une <u>valeur d'adhérence</u> de (u_n) s'il existe une suite extraite $(u_{\phi(n)})$ de (u_n) qui converge vers ℓ.

On va définir et utiliser deux valeurs d'adhérence particulières : la limsup et la liminf.

<u>Définition</u> : Soit (u_n) une suite réelle.

Si (u_n) n'est pas majorée, on pose

$$\limsup_{n\to\infty} u_n := +\infty$$

Sinon, la suite (v_n) définie par $v_n = \sup\{u_k \, ; k \geq n\}$ est une suite décroissante, et on pose

$$\limsup_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} v_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

C'est bien défini par le théorème précédent.

En résumé :

$$\boxed{\limsup_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{u_k \,;\, k \geqslant n\}\right) \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}}$$

De même,

$$\boxed{\liminf_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{u_k \,;\, k \geqslant n\}\right) \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}}$$

$$\begin{aligned} v_n &= \sup\{u_k \,;\, k \geqslant n\} \\ &= \sup\left(\{u_k \,;\, k \geqslant n+1\} \cup \{u_n\}\right) \\ &\leqslant \sup\{u_k \,;\, k \geqslant n+1\} = v_{n+1}. \end{aligned}$$

<u>Théorème</u> : Soit (u_n) une suite réelle majorée. Alors $\limsup_{n\to\infty} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n).

<u>Preuve</u> : Soit $(u_{\phi(n)})$ une suite extraite qui converge vers une valeur d'adhérence y.

On a :

$$u_{\phi(n)} \leqslant \sup\{u_k \,;\, k \geqslant \phi(n)\}$$

, terme de la suite définissant $\limsup u_n$

passage à la limite

$$y \leqslant \limsup_{n\to\infty} u_n .$$

Pour montrer que $\limsup_{n\to\infty} u_n$ est elle-même valeur d'adhérence, on construit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante par récurrence.

On commence par poser $\phi(0) = 0$.

Si on a construit $\phi(n)$, alors on choisit $\phi(n+1)$ parmi les éléments p de $\mathbb{N}$ tels que :

- $p \geqslant \phi(n)+1$
- $u_p \geqslant \sup\{u_k \,;\, k \geqslant \phi(n)+1\} - \frac{1}{n+1}$

Un tel élément existe car $\sup\{u_k \,;\, k \geqslant \phi(n)+1\}$ est le <u>plus petit</u> des majorants de

$$\{u_k \,;\, k \geqslant \phi(n)+1\}$$

Alors

$$\sup\{u_k \,;\, k \geqslant \phi(n)+1\} - \frac{1}{n+1} \leqslant u_{\phi(n+1)} \leqslant \sup\{u_k \mid k \geqslant \phi(n)+1\}$$

donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\phi(n)} = \limsup\limits_{n\to\infty} u_n$

$\square$

Rappels cours précédent

$\mathbb{R}$

Propriété de la borne sup:

Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

plus petit des majorants

Théorème:

Toute suite réelle croissante majorée converge.

$$\limsup_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{u_k \,;\, k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Théorème: $\limsup_{n\to\infty} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n).

$$\liminf_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{u_k ; k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Exercice : $\liminf_{n\to\infty} (-u_n) = -\limsup_{n\to\infty} u_n$.

Corollaire (de l'exercice et du théorème précédent) : Soit (u_n) une suite réelle. Alors $\liminf_{n\to\infty} u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de (u_n).

Théorème : Une suite réelle (u_n) converge dans $\mathbb{R}$

ssi

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n \in \mathbb{R}.$$

Preuve : $\Downarrow$) Toutes les valeurs d'adhérence d'une suite convergente coïncide avec sa limite.

$\Uparrow$) Notons $\ell = \limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de limsup, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall n \geq N_1, \qquad \sup\{u_k \,;\, k \geq n\} \leq \ell + \varepsilon.$$

De même pour liminf : il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall n \geq N_2, \qquad \inf\{u_k \,;\, k \geq n\} \geq \ell - \varepsilon.$$

Donc pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$\ell - \varepsilon \leq \left(\inf\{u_k \,;\, k \geq n\} \leq\right) u_n \left(\leq \sup\{u_k \,;\, k \geq n\}\right) \leq \ell + \varepsilon$$

On a donc montré que (u_n) converge vers ℓ. $\square$

Pour les limites infinies : (exercice)

i) $\liminf_{n\to\infty} u_n = +\infty \iff \lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

ii) $\limsup_{n\to\infty} u_n = +\infty \iff (u_n)$ n'est pas majorée.

iii) $\liminf_{n\to\infty} u_n = -\infty \iff (u_n)$ n'est pas minorée

iv) $\limsup_{n\to\infty} u_n = -\infty \iff \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$

<u>Rappel</u> : Une suite réelle (u_n) est <u>de Cauchy</u> si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall m,n \geq N,\ |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

<u>Théorème</u> ("Complétude de $\mathbb{R}$") : Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ converge dans $\mathbb{R}$.

<u>Preuve</u> : Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Montrons d'abord que (u_n) est bornée :

on applique la définition avec $\varepsilon = 1$,

on obtient un $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall m,n \geq N$, $|u_m - u_n| < 1$.

En particulier, $\forall n \geq N$, $|u_n - u_N| < 1$, donc $|u_n| < |u_N| + 1$.

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n| \leq \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1\}.$$

En particulier, (u_n) est bornée.

Ceci implique que $\limsup_{n\to\infty} u_n \in \mathbb{R}$.

Notons $x := \limsup_{n\to\infty} u_n$. On va montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = x$.

Comme x est une v.a. de (u_n), on peut choisir une suite extraite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers x.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de $\lim_{n\to\infty} u_{\phi(n)} = x$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall n \geq n_1, \quad |u_{\phi(n)} - x| < \varepsilon/2.$$

Puisque (u_n) est de Cauchy, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall m, n \geq n_2, \quad |u_m - u_n| < \varepsilon/2.$$

Pour $n \geq \overbrace{\max(n_1, n_2)}^{=: n_0}$, on a :

$$|u_n - x| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inégalité triangulaire}}}{\leq} |u_n - u_{\phi(n_0)}| + |u_{\phi(n_0)} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

Chapitre 2 : Topologie de $\mathbb{R}^d$

On travaille maintenant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{d}$ de dimension d.

Pour $d=1$, c'est simplement le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, on traitera souvent ce cas en premier.

$\mathbb{R}^d$ est muni d'une base 'standard' :

$e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 (0,1,0,\dots,0)$ $,\dots,$ $e_d = (0,\dots,0,1)$

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on notera en général

$$x = (x_1, \dots, x_d) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_d e_d .$$

On appelle les x_i les coordonnées de x.

$\mathbb{R}^d$ est muni de la norme euclidienne, notée $\|\cdot\|$,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}.$$

On a aussi une notion de distance euclidienne :

si $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\quad d(x,y) = \|y - x\|$

$$= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_d - x_d)^2}.$$

<u>Définition</u> : Pour $x \in \mathbb{R}^d$, $r \in \mathbb{R}_+$,

- On appelle <u>boule (euclidienne) ouverte</u> de centre x et de rayon r, et on note $\mathring{B}(x,r)$, l'ensemble :

$$\mathring{B}(x,r) := \{ y \in \mathbb{R}^d \ ; \ d(x,y) < r \} \subset \mathbb{R}^d.$$

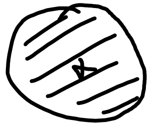
- On appelle <u>boule (euclidienne) fermée</u> de centre x et de rayon r, et on note $B(x,r)$, l'ensemble :

$$B(x,r) := \{ y \in \mathbb{R}^d \ ; \ d(x,y) \leqslant r \} \subset \mathbb{R}^d.$$

Exemples : • Si $d=1$, $\mathring{B}(x,r) =]x-r, x+r[$ intervalle ouvert de longueur $2r$ centré en x ; et

$$B(x,r) = [x-r,\ x+r]$$

• Si $d=2$, boule = disque de centre x et de rayon r



→ fermée = contient le cercle frontière

→ ouverte = ne contient aucun point du cercle.

• Si $r=0$, $\mathring{B}(x,0) = \emptyset$ et $B(x,0) = \{x\}$.

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ et $a \in \mathbb{R}^d$. On dit A est un <u>voisinage de a</u> s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\mathring{B}(a,r) \subset A$.

Remarque : En particulier, si A est un voisinage de a, alors $a \in A$.

Exemples : • Les boules $\mathring{B}(0,1)$ et $B(0,1)$ sont des voisinages de $0 \in \mathbb{R}^d$.

• $\{0\}$ n'est pas un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^d$.

• $]-1,0[\cup]0,1[\subset \mathbb{R}$ n'est pas un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.

Définition : Une partie $A \subset \mathbb{R}^d$ est ouverte (on dit aussi A est un ouvert) si pour tout $a \in A$, A est voisinage de a.

"Une partie est ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points".

De manière équivalente, $A \subset \mathbb{R}^d$ est ouverte si
$\forall a \in A, \ \exists r \in \mathbb{R}_+^* \text{ tq } \mathring{B}(a,r) \subset A$.

De manière équivalente, $A \subset \mathbb{R}^d$ est ouverte si
$\forall a \in A, \ \exists r \in \mathbb{R}_+^* \text{ tq } \|y-a\| < r \Rightarrow y \in A$.

Propriétés fondamentales des ouverts :

① Soit $(A_j)_{j\in J}$ une famille de parties ouvertes $A_j \subset \mathbb{R}^d$ indexée par un ensemble quelconque J
(pas forcément fini, pas forcément dénombrable)

alors $\bigcup_{j\in J} A_j \subset \mathbb{R}^d$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^d$.

"Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte".

② Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un nombre fini de parties ouvertes de $\mathbb{R}^d$, alors l'intersection $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^d$.

"Une intersection finie d'ouverts est ouverte".

Preuve : C'est une conséquence directe de la définition :

pour ① : Soit $a \in \bigcup_{j \in J} A_j$. Alors par définition de la réunion, il existe $j \in J$ tq $a \in A_j$. Or A_j est une partie ouverte, donc $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\mathring{B}(a,r) \subset A_j$.

Finalement, $\mathring{B}(a,r) \subset \bigcup_{j \in J} A_j$, donc $\bigcup_{j \in J} A_j$ est un voisinage de a.

//

② : Soit $a \in A_1 \cap \dots \cap A_n$. Par définition de l'intersection, on a $a \in A_j$ pour tout j. Or chaque A_j est une partie ouverte, donc $\exists r_j \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\mathring{B}(a, r_j) \subset A_j$.

On a donc : $\mathring{B}(a, \min\{r_1, \dots, r_n\}) \subset \mathring{B}(a, r_j) \subset A_j$ pour tout j,

$$\mathring{B}(a, \min\{r_1, \dots, r_n\}) \subset A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

donc $A_1 \cap \dots \cap A_n$ est un voisinage de a.

$\square$

Définition : Une partie $A \subset \mathbb{R}^d$ est fermée si son complémentaire $\mathbb{R}^d \setminus A$ est une partie ouverte.

Autrement dit, $A \subset \mathbb{R}^d$ est fermée si

$$\forall a \in \mathbb{R}^d \setminus A, \ \exists r \in \mathbb{R}_+^* \text{ tq } \mathring{B}(a,r) \cap A = \emptyset.$$

Propriétés fondamentales des fermés :

1. Une intersection quelconque de fermés est fermée.
2. Une réunion finie de fermés est fermée.

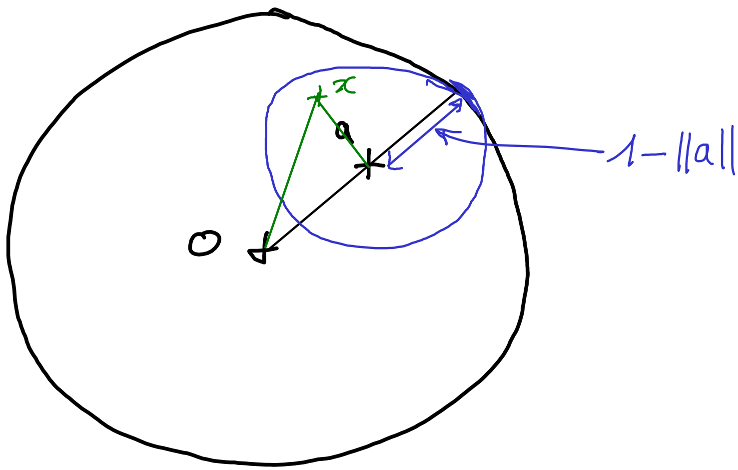
Preuve : Il suffit de se ramener au cas des ouverts par complémentaire. Par ex pour ② : si $B_1, \dots, B_n$ fermés, alors $\forall j$, $A_j = \mathbb{R}^d \setminus B_j$ est ouvert, donc $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ est ouvert, or $\mathbb{R}^d \setminus (A_1 \cap \dots \cap A_n) = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$.
donc $B_1 \cup \dots \cup B_n$ est fermé.

$\square$

Vérifions que la terminologie utilisée pour les boules est cohérente :

<u>Proposition</u> : La boule ouverte $\mathring{B}(0,1)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

<u>Preuve</u> :



Soit $a \in \mathring{B}(0,1)$. Posons $r := 1 - \|a\| > 0$

Soit $x \in \mathring{B}(a,r)$, alors par inégalité triangulaire, on a

$$\|x\| \leq \|a\| + \|x-a\|$$

Comme $x \in \mathring{B}(a,r)$, $\|x-a\| < r = 1 - \|a\|$, donc

$\|x\| < 1$, donc $x \in \mathring{B}(0,1)$. Donc $\mathring{B}(a,r) \subset \mathring{B}(0,1)$. $\square$

Plus généralement,

<u>Proposition</u> : Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$,

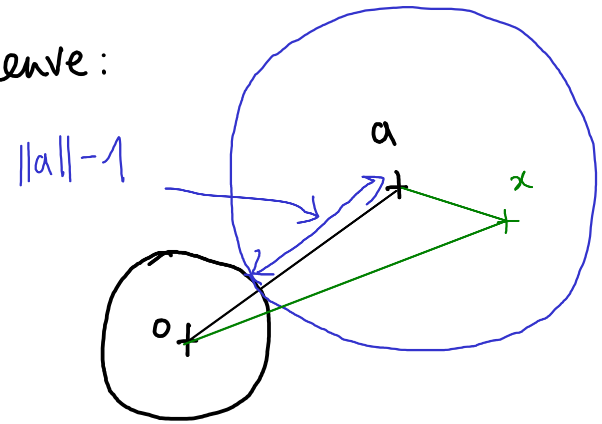
$$\mathring{B}(x,r) \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^d.$$

Preuve : en exercice.

Remarque : si $r=0$, $\mathring{B}(x,0) = \emptyset$ qui est bien un ouvert. $\square$

<u>Proposition</u> : La boule fermée $B(0,1)$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$.

Preuve :



exercice : formaliser le raisonnement. $\square$

Rappels dernier cours

$x \in \mathbb{R}^d \quad r \in \mathbb{R}_+$

$\mathring{B}(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^d \;;\; \|x-y\| < r \}$ boule (euclidienne) ouverte

$B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^d \;;\; \|x-y\| \leq r \}$ boule (euclidienne) fermée

$A \subset \mathbb{R}^d$

A voisinage de $x \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \; \mathring{B}(x,r) \subset A$

A ouvert $\Leftrightarrow \forall a \in A, \; \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \; \mathring{B}(a,r) \subset A$

A fermé $\Longleftrightarrow \mathbb{R}^d \setminus A$ ouvert

Propriétés fondamentales :

* réunion d'ouverts est ouverte
* intersection finie d'ouverts est ouverte
* intersection de fermés est fermé
* réunion finie de fermés est fermée

$\forall x \in \mathbb{R}^d, r \in \mathbb{R}_+,$ $\mathring{B}(x,r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$

$B(x,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$

Cas de $\mathbb{R}$ $(d=1)$: Un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert.

En effet, soit $]a,b[\subset \mathbb{R}$. Selon les 4 cas :

soit $a<b$ deux réels : $]a,b[= \mathring{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ ouvert

soit $a=-\infty$, $b\in\mathbb{R}$: $x\in]a,b[\iff x<b$

alors $\underbrace{\mathring{B}(x, b-x) \subset]a,b[}_{]2x-b,b[\subset]-\infty,b[}$, donc $]a,b[$ ouvert

soit $a\in\mathbb{R}$, $b=+\infty$: $x\in]a,b[\iff x>a$

alors $\underbrace{\mathring{B}(x, x-a) \subset]a,b[}_{]a,2x-a[\subset]a,+\infty[}$, donc $]a,b[$ ouvert

soit $a=-\infty$, $b=+\infty$: $]a,b[=\mathbb{R}$ qui est bien ouvert.

En conséquence, on a aussi que tous les segments $[a,b]$ sont fermés dans $\mathbb{R}$, de même que les intervalles de la forme $]-\infty,b]$ et $[a,+\infty[$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R}\setminus[a,b] =]-\infty,a[\,\cup\,]b,+\infty[$$ réunion d'ouverts donc ouvert

$$\mathbb{R}\setminus]-\infty,b] =]b,+\infty[$$ ouvert

et $\mathbb{R}\setminus[a,+\infty[=]-\infty,a[$ ouvert.

Une intersection d'ouverts n'est pas forcément ouverte :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right[= \{0\}$$ qui n'est <u>pas</u> ouvert.

Une réunion de fermés n'est pas forcément fermée :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1, -\tfrac{1}{n}\right] = [-1, 0[$$ qui n'est <u>pas</u> fermé.

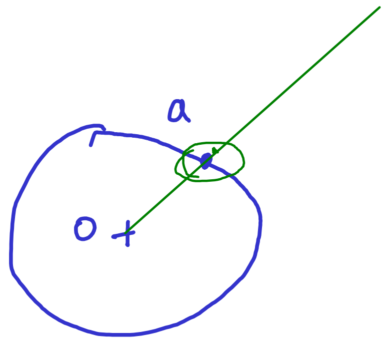
<u>Exercice</u> : Dans $\mathbb{R}$, les seules parties qui sont à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.

⚠ Un ensemble qui n'est pas ouvert n'est pas forcément fermé.

On revient dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

On a vu que $B(0,1)$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$.

Est-ce que $B(0,1)$ est ouvert ?



Par la même preuve que pour $\mathring{B}(0,1)$, $B(0,1)$ est voisinage de tout $a \in \mathring{B}(0,1)$.

Soit maintenant $a \in \mathbb{R}^d$ tq $\|a\| = 1$.

Alors $a \in B(0,1)$ mais $B(0,1)$ n'est pas un voisinage de a.

Pourquoi?

Supposons par l'absurde qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\mathring{B}(a,r) \subset B(0,1)$. Considérons $x := (1+\frac{r}{2})a$.

On a $\|x\| = |1+\frac{r}{2}|\,\|a\| = 1+\frac{r}{2} > 1$ donc $x \notin B(0,1)$ et $\|x-a\| = \frac{r}{2} < r$, donc $x \in \mathring{B}(a,r)$.

contradiction.

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ une partie quelconque. On appelle <u>intérieur de A</u>, et on note $\mathring{A}$, le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenu dans A.

Remarque : Ce n'est pas a priori évident qu'un tel ouvert existe. C'est grâce à la propriété fondamentale des ouverts qu'on a l'existence :

$\mathring{A}$ = réunion de tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ contenus dans A.

Conséquence directe de la définition :

$A \subset \mathbb{R}^d$ est ouverte si et seulement si $A = \mathring{A}$.

Proposition : Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. L'intérieur $\mathring{A}$ de A est l'ensemble des points $a \in A$ tels que A soit voisinage de a.

Exemple : • D'après ce qu'on a vu plus tôt, l'intérieur de la boule fermée $B(0,1)$ est exactement la boule ouverte $\mathring{B}(0,1)$.

• Plus généralement : $\mathring{B}(a,r)$ est l'intérieur de $B(a,r)$, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, $r \in \mathbb{R}_+$.

Preuve : Notons U l'ensemble des points $a \in A$ tels que A est voisinage de a.

Montrons d'abord que U est inclus dans $\mathring{A}$:

si $a \in U$, alors A est voisinage de a, donc $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\mathring{B}(a,r) \subset A$. Alors $\mathring{B}(a,r)$ est un ouvert contenu dans A, donc $\mathring{B}(a,r) \subset \mathring{A}$, donc $a \in \mathring{A}$.

Pour l'autre inclusion : soit $a \in \mathring{A}$. Comme $\mathring{A}$ est ouvert, $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\mathring{B}(a,r) \subset \mathring{A}$. Or $\mathring{A} \subset A$, donc $\mathring{B}(a,r) \subset A$. Donc A est un voisinage de a, et donc $a \in U$.

$\square$

On peut imaginer qu'il y a une notion analogue pour les fermés, utilisant : une intersection de fermés est fermée. C'est le cas :

<u>Définition</u> : Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. On appelle <u>adhérence de A</u> et on note $\bar{A}$, le plus petit fermé de $\mathbb{R}^d$ contenant A.

<u>Remarques</u> :
- $\bar{A}$ est l'intersection de tous les fermés de $\mathbb{R}^d$ contenant A.
- $\bar{A} = A$ ssi A est fermé.

On va en donner une autre interprétation, en termes de suites dans $\mathbb{R}^d$.

Suites convergentes dans $\mathbb{R}^d$

<u>Définition</u> : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^d$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ \|u_n - \ell\| < \varepsilon .$$

On a une caractérisation en termes de voisinages :

<u>Proposition</u> : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^d$ ssi pour tout voisinage A de ℓ, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel <u>tous</u> les termes de la suite sont dans A.

Preuve :

$\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$, alors $\mathring{B}(\ell, \varepsilon)$ est un voisinage de ℓ, donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant N$, $u_n \in \mathring{B}(\ell, \varepsilon)$.

Or $u_n \in \mathring{B}(\ell, \varepsilon) \Leftrightarrow \|u_n - \ell\| < \varepsilon$.

$\Rightarrow$) Soit A un voisinage de ℓ. Alors $\exists \varepsilon > 0$ tq $\mathring{B}(\ell, \varepsilon) \subset A$. Donc par convergence de (u_n) vers ℓ, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N$, $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$.

Or $\|u_n - \ell\| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in \mathring{B}(\ell, \varepsilon)$

$$\Rightarrow u_n \in A.$$

$\square$

Une autre caractérisation équivalente :

Proposition : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si la suite réelle $(\|u_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Preuve : C'est exactement la même définition pour les deux énoncés. $\square$

Exemples : Les suites suivantes convergent vers $(0,0) \in \mathbb{R}^2$:

* $u_n = (0,0)$ $\qquad \|u_n - \ell\| = \|u_n\| = 0$

* $u_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ $\qquad \|u_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

* $u_n = \left(\frac{\cos\theta}{n^2}, \frac{\sin\theta}{n^2}\right)$ $\qquad \|u_n\| = \sqrt{\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{n^4}} = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

* $u_n = \left(\frac{\cos n}{n}, \frac{\sin(2n)}{n}\right)$ $\qquad \|u_n\| = \sqrt{\frac{\cos^2(n) + \sin^2(2n)}{n^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Remarque : Les suites réelles définies par les coordonnées des termes généraux ci-dessus convergent tous individuellement vers 0.

On démontrera une propriété générale dans ce sens plus tard.

Caractérisation séquentielle des fermés

Théorème : Une partie $A \subset \mathbb{R}^d$ est fermée si et seulement si, pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A, convergente vers $l \in \mathbb{R}^d$, on a $l \in A$.

Preuve : $\Rightarrow$) On suppose A fermée, c'est-à-dire, par définition, que $\mathbb{R}^d \setminus A$ est ouvert.
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A, qui converge vers $l \in \mathbb{R}^d$.
Tout voisinage de l contient des éléments de A : les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.
Donc $\mathbb{R}^d \setminus A$ n'est pas un voisinage de l. Donc $l \notin \mathbb{R}^d \setminus A$ qui est ouvert, donc $l \in A$.

$\Leftarrow$) On suppose maintenant que, pour toute suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}^d$, on a $\ell \in A$. On va montrer que A est fermé en raisonnant par l'absurde.

Supposons que $\mathbb{R}^d \setminus A$ n'est pas ouvert. Alors il existe un élément $\ell \in \mathbb{R}^d \setminus A$ dont $\mathbb{R}^d \setminus A$ n'est <u>pas</u> voisinage.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathring{B}(\ell, \frac{1}{n})$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}^d \setminus A$. Donc $\mathring{B}(\ell, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$.

Choisissons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un élément $u_n \in \mathring{B}(\ell, \frac{1}{n}) \cap A$.

La suite (u_n) ainsi construite vérifie :

(u_n) est à valeurs dans A

et (u_n) converge vers ℓ.

) contradiction avec l'hypothèse car $\ell \in \mathbb{R}^d \setminus A$. $\square$

$A \subset \mathbb{R}^d$ quelconque (Rappels)

$\mathring{A}$ intérieur de A :

<u>définition</u> : plus grand ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenu dans A

<u>caractérisation</u> : $\mathring{A} = \{x \in A \,;\, A \text{ est voisinage de } x\}$

$\bar{A}$ adhérence de A :

<u>définition</u> : plus petit fermé de $\mathbb{R}^d$ contenant A

<u>caractérisation</u> ?

(u_n) suite dans $\mathbb{R}^d$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^d$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Longrightarrow \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

<u>Théorème</u> (caractérisation séquentielle des fermés) :

$A \subset \mathbb{R}^d$ est fermé ssi

pour toute suite (u_n) à valeurs dans A qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}^d$, on a $\ell \in A$.

Auj : → caractérisation séquentielle adhérence

→ complétude de $\mathbb{R}^d$ en se ramenant à $\mathbb{R}$

→ compacts de $\mathbb{R}^d$

Exemple : Re démontrons qu'une boule fermée est fermée. Soit $r \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}^d$.

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $B(x,r)$, qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}^d$.

Par définition de $B(x,r)$, on a $\|u_n - x\| \leqslant r$ pour tout n, donc par passage à la limite $\|\ell - x\| \leqslant r$, c'est-à-dire $\ell \in B(x,r)$.

Par le thm précédent, $B(x,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$.

Attention, dans le "passage à la limite", on a omis une partie du raisonnement :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n - x\| = \|\ell - x\|.$$

<u>Exercice</u> : écrire la justification de cette implication.

<u>Théorème</u> (caractérisation séquentielle de l'adhérence) :
Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. L'adhérence $\bar{A}$ de A est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ qui sont limites de suites convergentes à valeur dans A.

Preuve : Notons F l'ensemble des limites de suites convergentes à valeurs dans A.

L'inclusion $F \subset \bar{A}$ est facile : $\bar{A}$ est un fermé et $A \subset \bar{A}$, donc par caractérisation séquentielle des fermés, $\bar{A}$ contient toutes les limites de suites convergentes à valeurs dans A.

Pour l'autre inclusion : montrons que F est un fermé contenant A. (alors $\bar{A} \subset F$ par définition de l'adhérence).

C'est clair que $A \subset F$: il suffit de considérer les suites constantes.

Pour montrer que F est fermé, on peut utiliser la caractérisation séquentielle et un argument diagonal.

Soit (u_n) une suite à valeurs dans F qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}^d$. On veut montrer que $\ell \in F$, c'est-à-dire que ℓ est limite d'une suite à valeurs dans A.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(u_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A, qui converge vers u_n :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(n,\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall m \geq N(n,\varepsilon), \|u_{n,m} - u_n\| < \varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq M_\varepsilon, \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

Posons pour $k \in \mathbb{N}^*$, $v_k := u_{M_{1/k}, N(M_{1/k}, \varepsilon)}$,

alors on a :

$$\|v_k - \ell\| = \| u_{M_{1/k}, N(M_{1/k}, \varepsilon)} - u_{M_{1/k}} + u_{M_{1/k}} - \ell \|$$

$$\leq \| u_{M_{1/k}, N(M_{1/k}, \varepsilon)} - u_{M_{1/k}} \| + \| u_{M_{1/k}} - \ell \|$$

$$\leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Donc $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite à valeurs dans A qui converge vers ℓ, donc $\ell \in F$. $\square$

Densité (terminologie)

Définition : Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^d$, on dit que A est dense dans B si $\bar{A} = B$.

Corollaire (de la caractérisation séquentielle de l'adhérence) : A est dense dans B si et seulement si tout point de B est limite d'une suite à valeurs dans A.

Exemple (retour sur la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) :
On a admis au début du cours la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$: $\forall x < y$ dans $\mathbb{R}$, $\exists r \in \mathbb{Q}$ tq $x < r < y$.
On en déduit que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$: soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x < x + \frac{1}{n}$, donc il existe $u_n \in \mathbb{Q}$ tq $x < u_n < x + \frac{1}{n}$.

Par encadrement, la suite (u_n) converge vers x.

Convergence des suites par composantes

Notation : Pour $1 \leq i \leq d$, notons $p_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, \dots, x_d) \longmapsto x_i$$

la $i^{\text{ème}}$ projection.

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, les suites réelles $(p_1(u_n))_{n \in \mathbb{N}}, (p_2(u_n))_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (p_d(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont appelées les suites <u>composantes</u> de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\ell \in \mathbb{R}^d$. Alors (u_n) converge vers ℓ si et seulement si pour tout $i\in\{1,2,\dots,d\}$, la suite réelle $(p_i(u_n))$ converge vers $p_i(\ell)$.

Preuve : La preuve repose de manière essentielle sur l'inégalité suivante, qu'on reverra en TD :

$$(*) \quad \sup\{|p_i(x)| \,;\, i\in\{1,\dots,d\}\} \leq \|x\| \leq \sum_{i=1}^{d} |p_i(x)|.$$

preuve de l'inégalité : soit $i\in\{1,\dots,d\}$

$$|p_i(x)| = \sqrt{p_i(x)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{d} p_j(x)^2} = \|x\|$$

car $\sqrt{\cdot}$ est croissante

$$\|x\| = \|(p_1(x), \dots, p_d(x))\|$$

$$= \|(p_1(x), 0, \dots, 0) + (0, p_2(x), 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, p_d(x))\|$$

inégalité triangulaire

$$\leq \|(p_1(x), 0, \dots, 0)\| + \dots + \|(0, \dots, 0, p_d(x))\|$$

$$\leq |p_1(x)| + \dots + |p_d(x)|$$

//

on reprend la preuve de la proposition

$\Rightarrow$) Supposons que (u_n) converge vers ℓ.

Comme $p_i(u_n - \ell) = p_i(u_n) - p_i(\ell)$, on déduit de la partie gauche de ⊛ (avec $x = u_n - \ell$), que

$$0 \leq |p_i(u_n) - p_i(\ell)| \leq \|u_n - \ell\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Donc $(p_i(u_n))$ converge vers $p_i(\ell)$.

$\Leftarrow$) On suppose que $(p_i(u_n))$ converge vers $p_i(\ell)$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

Par la partie droite de ⊛ appliquée à $x = u_n - \ell$, on a

$$0 \leqslant \|u_n - \ell\| \leqslant \sum_{i=1}^{d} |p_i(u_n) - p_i(\ell)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

donc (u_n) converge vers ℓ.

$\square$

<u>Définition</u> : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est de <u>Cauchy</u> si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall m, n \geqslant N, \ \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

De la m̂ manière que pour la proposition précédente on montre que :

<u>Proposition</u> : Une suite (u_n) dans $\mathbb{R}^d$ est de Cauchy si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, la suite réelle $(p_i(u_n))$ est de Cauchy.

<u>Complétude de $\mathbb{R}^d$</u>

<u>Théorème</u> : L'espace $\mathbb{R}^d$ est complet, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^d$ converge vers un élément de $\mathbb{R}^d$.

Preuve : Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^d$.
Alors les suites réelles $(p_i(u_n))$ sont de Cauchy.
Par complétude de $\mathbb{R}$, elles convergent chacunes vers un élément de $\mathbb{R}$. Notons $l_i = \lim_{n\to\infty} p_i(u_n)$.
Alors (u_n) converge vers $l = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{R}^d$.

$\square$

Compacts de $\mathbb{R}^d$

Définitions : Soit $A \subset \mathbb{R}^d$.

- On dit que A est <u>compacte</u> de $\mathbb{R}^d$ si pour toute suite (u_n) à valeurs dans A, (u_n) admet une valeur d'adhérence dans A.
- On dit que A est <u>bornée</u> s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tq $A \subset B(0, R)$.

Théorème : Une partie $A \subset \mathbb{R}^d$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Preuve :

$\Rightarrow$) On suppose que A est compacte.

Montrons d'abord que A est fermée. Soit $l \in \bar{A}$.

Par caractérisation séquentielle, il existe une suite (u_n) à valeurs dans A qui converge vers l. Par convergence, l est l'unique valeur d'adhérence de (u_n), donc par compacité, $l \in A$. On en déduit $\bar{A} = A$, donc A fermée.

Montrons que A est bornée. Par l'absurde, supposons que A n'est pas bornée. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in A \cap (\mathbb{R}^d \setminus B(0,n))$. En particulier on a $\|u_n\| > n$, donc $\|u_n\| \to \infty$. Donc (u_n) n'admet aucune valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}^d$ (contradiction).

$\Leftarrow$) On suppose que A est fermée et bornée.
Fixons $R \in \mathbb{R}_+$ tq $A \subset B(0,R)$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A.
La suite réelle $(p_1(u_n))$ est bornée : $|p_1(u_n)| \leq \|u_n\| \leq R$.

Alors $\ell_1 := \limsup_{n\to\infty} p_1(u_n)$ est une valeur d'adhérence de $(p_1(u_n))$.

Notons $\phi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strict. croissante tq

$$\lim_{n\to\infty} p_1(u_{\phi_1(n)}) = \ell_1 .$$

De m, la suite réelle $p_2(u_{\phi_1(n)})$ est bornée

$$|p_2(u_{\phi_1(n)})| \leq \|u_{\phi_1(n)}\| \leq R$$

donc $\ell_2 := \limsup_{n\to\infty} p_2(u_{\phi_1(n)})$ est une valeur d'adhérence de $(p_2(u_{\phi_1(n)}))$.

Notons $\phi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict. croissante tq

$$\lim_{n\to\infty} p_2(u_{\phi_2 \circ \phi_1(n)}) = \ell_2$$

et $$\lim_{n\to\infty} p_1(u_{\phi_2\circ\phi_1(n)}) = \ell_1$$

En répétant le processus un nombre fini de fois, on obtient une sous-suite $(u_{\psi(n)})$ de (u_n) tq pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,

$(p_i(u_{\psi(n)}))$ converge vers un réel ℓ_i.

Donc $(u_{\psi(n)})$ converge vers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{R}^d$.

On a montré que (u_n) admet une valeur d'adhérence $\ell \in \mathbb{R}^d$.

Il reste à montrer que $\ell \in A$.

Cela découle de l'hypothèse que A est fermée et de la caractérisation séquentielle des fermés. $\square$

<u>Exemple</u>: Toute boule fermée est compacte..

Fin du chapitre 2

//

Chapitre 3 : Fonctions et topologie

Limites et continuité

Rappel : Si f fonction réelle d'une variable réelle

$$\lim_{x \to y} f(x) = l \underset{\text{défn}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tq} \\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \end{cases}$$

On n'a pas donné le domaine de définition.
Ça a du sens, par exemple, si f est définie sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $y \in [a,b]$,

ça marche aussi si f est définie sur $]a,b[$ et $y \in [a,b]$.

Définition: Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$, $y \in \bar{A}$, $\ell \in \mathbb{R}^q$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction. Alors

1) f <u>converge</u> vers ℓ en y (on note $\lim_{x \to y} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to y]{} \ell$)

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon.$$

2) Si $y \in A$ et $\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$, alors on dit que f est <u>continue en y</u>.

3) Si f est continue en y pour tout $y \in A$, alors on dit que f est <u>continue sur A</u>.

<u>Remarques</u> : • $\lim_{x \to y} f(x) = \ell$ est équivalent à $\lim_{x \to y} \|f(x) - \ell\| = 0$.

et c'est en général comme ça qu'on montre que f converge vers ℓ, si on connait le candidat ℓ pour la limite.

• (unicité de la limite). Si $\lim_{x \to y} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \to y} f(x) = \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$.

(en effet, $\|\ell_2 - \ell_1\| \leq \underbrace{\|\ell_2 - f(x)\| + \|f(x) - \ell_1\|}_{\xrightarrow[x \to y]{} 0}$)

<u>Exemple</u> : La fonction $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue

$x = (x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_1$

sur $\mathbb{R}^p$.

$y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$

En effet, on a toujours $|x_1 - y_1| \leqslant \|x - y\|$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour $\delta = \varepsilon$,

$$\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| = |x_1 - y_1| \leqslant \|x - y\| < \varepsilon.$$

On appelle cette fonction la première projection, notée p_1 (ou projection sur la 1ère coordonnée).

Plus généralement, les projections $p_i : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_i$

sont toutes continues.

Quelques opérations sur les fonctions continues

Proposition (produit): Soient $A \subset \mathbb{R}^p$, $y \in \bar{A}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs réelles.
Si $\lim\limits_{x \to y} f(x) = \alpha$ et $\lim\limits_{x \to y} g(x) = \beta$, alors $\lim\limits_{x \to y} (fg)(x) = \alpha\beta$.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Par définition des deux limites dans l'hypothèse, on a un $\delta > 0$ et $\gamma > 0$ tq $\forall x \in A$,

$$\|x - y\| < \delta \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

$$\|x - y\| < \gamma \implies |g(x) - \beta| < \varepsilon.$$

On a par ailleurs

$$|f(x) g(x) - \alpha\beta| = |(f(x) - \alpha) g(x) + \alpha (g(x) - \beta)|$$

$$\leq |f(x) - \alpha| \, |g(x)| + |\alpha| \, |g(x) - \beta|$$

$$|f(x)g(x)-\alpha\beta| \leqslant |f(x)-\alpha|\left(|\beta|+|g(x)-\beta|\right)+|\alpha|\,|g(x)-\beta|$$

Donc pour $\|y-x\|<\min(\delta,\gamma)$, on a

$$|f(x)g(x)-\alpha\beta| \leqslant \varepsilon\left(|\beta|+\varepsilon\right)+|\alpha|\,\varepsilon = \underbrace{\varepsilon\left(|\alpha|+|\beta|+\varepsilon\right)}_{}$$

aussi petit qu'on veut en choisissant bien ε.

$\square$

<u>Corollaire</u> : Si $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues sur A, alors fg est aussi continue sur A.

<u>Définition</u> : Un <u>monôme</u> est une fonction $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1,\dots,x_p) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p}$ avec $(k_1,\dots,k_p) \in \mathbb{N}^p$.

Par exemple, si $(k_1, k_2, \dots, k_p) = (1, 0, \dots, 0)$, on obtient $f = p_1$ la première projection.

On a vu que les projections sont continues, or les monômes sont obtenus par produits successifs de projections, donc en appliquant le corollaire, on a :

<u>Exemple</u> : Un monôme est continu sur $\mathbb{R}^p$.

<u>Proposition</u> (combinaison linéaire) : Soient $f_1 : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ et $f_2 : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ deux fonctions, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $y \in \bar{A}$ $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^q$. Si $\lim_{x \to y} f_1(x) = l_1$ et $\lim_{x \to y} f_2(x) = l_2$, alors

$$\lim_{x \to y} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 .$$

Preuve : exercice élémentaire. $\square$

Corollaire : Une combinaison linéaire de fonctions continues est continue.

Définition : Un polynôme est une fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ obtenue comme combinaison linéaire de monômes.

Exemple : Un polynôme est continu sur $\mathbb{R}^p$.

<u>Proposition</u> (composition) : Soit $A \subset \mathbb{R}^p$, $y \in \bar{A}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^q$ et $g : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}^r$. Si f admet une limite en y notée ℓ, et si g admet une limite en ℓ, alors $g \circ f$ admet une limite en y, et $\lim\limits_{x \to y} g \circ f(x) = \lim\limits_{z \to \ell} g(z)$.

<u>Preuve</u> : Sous les hypothèses, notons $v = \lim\limits_{z \to \ell} g(z)$.

Alors on a :

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

et

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in f(A), \|z - \ell\| < \delta \Rightarrow \|g(z) - v\| < \varepsilon$.

On veut montrer que :

(3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|g(f(x)) - v\| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$. D'abord, par ②, il existe un $\eta > 0$ tq

$$\forall z \in f(A), \quad \|z - \ell\| < \eta \implies \|g(z) - v\| < \varepsilon.$$

Maintenant, on applique ① avec $\varepsilon = \eta$, il existe un $\delta > 0$ tq

$$\forall x \in A, \quad \|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - \ell\| < \eta.$$

Alors

$$\forall x \in A, \quad \|x - y\| < \delta \implies \|g(f(x)) - v\| < \varepsilon. \qquad \square$$

<u>Corollaire</u> : La composée de deux fonctions continues est continue.

<u>Exemple</u> : Soit $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur A, qui ne s'annule pas sur A.

Alors $\frac{1}{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur A.
$$x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$$

<u>Définition</u> : Une <u>fraction rationnelle</u> est une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe deux polynômes P et Q tels que :

1) $A = Q^{-1}(\mathbb{R}^*)$

2) $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \forall x \in A.$

En appliquant l'exemple précédent et le produit de fonctions continues, on a :

Exemple : Une fraction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

Attention : Une fonction peut être définie par une fraction rationnelle sur un certain ensemble, et par une autre expression sur un ensemble plus gros. Dans ce cas là, on ne peut rien dire a priori de la continuité sur cet ensemble plus gros.

Exercice : $k \in \mathbb{N}$. Soit $f_k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction

définie par $\begin{cases} f_k(0,0) = 0 \\ f_k(x,y) = \dfrac{x^k}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$

1. Mq $f_k|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ est continue.

2. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{N}$ pour lesquelles f_k est continue en $(0,0)$.

Caractérisation séquentielle de la continuité

Proposition : $A \subset \mathbb{R}^p$, $y \in \bar{A}$, $\ell \in \mathbb{R}^q$, $f : A \to \mathbb{R}^q$

On a $\lim_{x \to y} f(x) = \ell$ si et seulement si

pour toute suite (x_n) à valeurs dans A qui converge vers y, la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ.

Preuve : $\Rightarrow$) On suppose que $\lim_{x \to y} f(x) = \ell$.

Soit (x_n) une suite à valeurs dans A, qui converge vers y.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ tq $\forall x \in A$, $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$.

Comme $\lim_{n \to \infty} x_n = y$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $\|x_n - y\| < \delta$.

Donc $\forall n \geq N$, $\|f(x_n) - \ell\| < \varepsilon$.

C'est-à-dire que la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ.

$\Leftarrow$) Supposons qu'on n'a pas $\lim_{x \to y} f(x) = \ell$.

C'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tq

$\forall \delta > 0$, $\exists x \in A$ tq $\|x - y\| < \delta$ et $\|f(x) - \ell\| \geq \varepsilon$.

Fixons un tel ε, et choisissons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un $x_n \in A$ tq $\|x_n - y\| < \frac{1}{n}$ et $\|f(x_n) - \ell\| \geq \varepsilon$.

Alors la suite (x_n) ainsi construite vérifie $\lim_{n \to \infty} x_n = y$, mais $(f(x_n))$ ne converge <u>pas</u> vers ℓ.

$\square$

<u>Corollaire</u>: Une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est continue sur A ssi pour toute suite (x_n) à valeurs dans A, qui converge vers un élément $y \in A$, on a $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(y)$.

Cette caractérisation va être essentielle pour le lien avec les propriétés topologiques. Voyons déjà une première application.

<u>Définition</u> : Si $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$
$$x \longmapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$$

on appelle les fonctions $f_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto f_i(x)$$

les <u>fonctions composantes</u> de f.

<u>Proposition</u> : Si $l = (l_1, \dots, l_q) \in \mathbb{R}^q$, $y \in \bar{A}$ et $f : A \to \mathbb{R}^q$, on a :

$$\lim_{x \to y} f(x) = l \quad \text{ssi} \quad \forall i \in \{1, \dots, q\}, \ \lim_{x \to y} f_i(x) = l_i .$$

<u>Preuve</u> : C'est une conséquence directe de la caractérisation séquentielle, et du critère de convergence "par composantes" des suites. $\square$

<u>Corollaire</u> : Une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est continue sur A ssi toutes ses fonctions composantes le sont.

Dernière fois : fonctions continues

Auj : lien avec les notions topologiques

Images directes de compacts

Rappel : L'image directe d'un ensemble $B \subset A$ par une fonction définie sur A est l'ensemble :

$$f(B) = \{ f(x) \, ; \, x \in B \}$$

Théorème : Soit $K \subset \mathbb{R}^p$ une partie compacte, et $f : K \to \mathbb{R}^q$ une fonction continue sur K. Alors $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^q$.

Preuve : Soit (y_n) une suite à valeurs dans $f(K)$. On veut mq (y_n) admet une sous-suite qui converge vers un élément de $f(K)$.

Pour tout n, comme $y_n \in f(K)$, il existe $x_n \in K$ tq $y_n = f(x_n)$.

Comme K est compacte, la suite (x_n) qui est à valeurs dans K, admet une soussuite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers un élément $x \in K$.

Par caractérisation séquentielle de la continuité, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_{\phi(n)}) = f(x)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to \infty} y_{\phi(n)} = f(x)$.

La sous suite $(y_{\phi(n)})$ converge donc vers $f(x)$, qui est un élément de $f(K)$. $\square$

Corollaire : Une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ continue sur K, où K est un compact de $\mathbb{R}^p$, est bornée et atteint ses bornes. C'est-à-dire qu'il existe x_0 et y_0 dans K tq $f(x_0) = \sup \{ f(x) \, ; \, x \in K \}$ et $f(y_0) = \inf \{ f(x) \, ; \, x \in K \}$.

$(= \sup f(K))$ $\quad$ $(= \inf f(K))$

Preuve du corollaire : Le théorème implique que $f(K)$ est compact.
Donc $f(K)$ est fermé et borné.
Donc $\sup f(K) \in f(K)$ et $\inf(f(K)) \in f(K)$ (cf CC).

$\square$

Contre exemple si f non continue :

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{définie } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

alors $f([0,1]) =]0,1]$ pas compact
et l'inf de f sur $[0,1]$ n'est pas atteint.

Images réciproques d'ouverts et de fermés

Rappel : Si $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est une fonction, et $B \subset \mathbb{R}^q$ quelconque, l'image réciproque de B par f est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in A \ ; \ f(x) \in B\}$$

Remarque :
- C'est un sous-ensemble de A.
- c'est bien défini, que f soit une bijection ou pas (m̂ si on utilise f^{-1} dans la notation).

Exemple : si $f(x) = c$ pour tout $x \in A$ avec $c \in \mathbb{R}^q$ fixé
si $d \in \mathbb{R}^q$, alors $f^{-1}(\{d\}) = \emptyset$ si $d \neq c$

$f^{-1}(\{d\}) = A$ si $d = c$

Comme c'est ce qui se passe dans A qui compte, on va définir une notion d'ouvert "dans A".
et de fermé

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}^p$ une partie quelconque.

- On appelle ouvert induit de A toute partie $B \subset A$ qui peut s'écrire sous la forme $B = A \cap U$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
- On appelle fermé induit de A toute partie $B \subset A$ qui peut s'écrire sous la forme $B = A \cap F$, où F est un fermé de $\mathbb{R}^p$.

Idée : B est un ouvert induit de A si $\forall x \in B$, B contient tous les points de A suffisament proche de x.

B est un fermé induit de A si pour toute suite (x_n) à valeurs dans B, qui converge vers une limite x dans A, alors $x \in B$.

Exemple : Soit $A =]0,2] \subset \mathbb{R}$

$B =]1,2]$ est un ouvert induit de A (par ex. $B =]1,3[\cap A$)

$C =]0,1]$ est un fermé induit de A (par ex : $C = [0,1] \cap A$)

Remarque : Comme $\mathbb{R}^p$ est à la fois un ouvert et un fermé, A est à la fois un ouvert induit de A et un fermé induit de A.

Théorème: Soit A une partie quelconque de $\mathbb{R}^p$, et $f : A \to \mathbb{R}^q$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur A.
2. Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert induit de A.
3. Pour tout fermé F de $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(F)$ est un fermé induit de A.

Remarques: a) B est un ouvert induit de A ssi $A \setminus B$ est un fermé induit de A.

b) B est un fermé induit de A ssi $B = \bar{B} \cap A$.

(⚠ Il n'y a pas d'analogue avec l'intérieur.)
intérieur

Preuve: On montre $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 3$ On suppose f continue.

Soit F un fermé de $\mathbb{R}^q$.

Par la remarque b, on veut montrer que $f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)} \cap A$.

L'inclusion $f^{-1}(F) \subset \overline{f^{-1}(F)} \cap A$ est immédiate.

Soit $y \in \overline{f^{-1}(F)} \cap A$.

Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, il existe une suite (x_n) d'éléments de $f^{-1}(F)$ tq $y = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Par caractérisation séquentielle de la continuité, comme $y \in A$ et f est continue sur A, on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(y)$.

Or $(f(x_n))$ est une suite d'éléments de F, qui est fermé, donc par caractérisation séquentielle des fermés, $f(y) \in F$.

C'est-à-dire que $y \in f^{-1}(F)$.

On a montré 1. $\Rightarrow$ 3.

(3 $\Rightarrow$ 2) On suppose que 3. est vrai.

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^q$, alors $\mathbb{R}^q \setminus V$ est un fermé de $\mathbb{R}^q$.

Par 3., $f^{-1}(\mathbb{R}^q \setminus U)$ est un fermé induit de A.

Or $f^{-1}(\mathbb{R}^q \setminus U) = A \setminus f^{-1}(U)$, donc par la remarque a),
$f^{-1}(U)$ est un ouvert induit de A.

(2 $\Rightarrow$ 1) On suppose que 2. est vrai.

Soit $a \in A$. On veut montrer que f est continue en a.

Soit $\varepsilon > 0$. On considère l'ouvert $U = \mathring{B}(f(a), \varepsilon)$ de $\mathbb{R}^q$.

Alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert induit de A : il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^p$
tq $f^{-1}(U) = A \cap V$. Comme $a \in f^{-1}(U)$, $a \in V$,
donc il existe $\delta > 0$ tq $\mathring{B}(a, \delta) \subset V$ (par définition des ouverts)

On a alors $x \in \mathring{B}(a,\delta) \cap A \Rightarrow x \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(x) \in U$

c'est-à-dire $f(x) \in \mathring{B}(f(a), \varepsilon)$

autrement dit, $\forall x \in A$, $\|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

C'est la définition de la continuité de f en a.

$\square$

On se sert très souvent de ce théorème pour montrer qu'un ensemble est ouvert / fermé. Pour cela, on utilise souvent le cas
cas particulier suivant:

Corollaire : Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction définie partout.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur $\mathbb{R}^p$
2. pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$
3. pour tout fermé F de $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$.

Exemple : • $p_1 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1$ est continue, donc

$p_1^{-1}(]0,1[) = \{(x_1, \dots, x_p) \; ; \; 0 < x_1 < 1\}$ est un ouvert
$p_1^{-1}([0,1]) = \{(x_1, \dots, x_p) \; ; \; 0 \leqslant x_1 \leqslant 1\}$ est un fermé
cf exo 1 TD2

• $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ est continue, donc

$\forall r \geqslant 0$ $\quad \mathring{B}(0,r) = f^{-1}(]-\infty, r[)$ est un ouvert
$B(0,r) = f^{-1}(]-\infty, r])$ est un fermé.

Attention : Avec l'énoncé général, on obtient seulement des ouverts/fermés induits de A.

Exemple : Considérons la fonction racine carrée $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$
(qui est une fonction continue)

Pour un intervalle ouvert $]a,b[$ avec $a \geqslant 0$, on a

$f^{-1}(]a,b[) =]a^2, b^2[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$

Mais si $a<0$ et $b>0$, on a

$$f^{-1}(]a,b[) = [0,b^2[$$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$

(mais un ouvert induit de $[0,+\infty[$)

Par contre, toujours dans cet exemple, si F est fermé de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}$ aussi :

le thm dit juste que $f^{-1}(F)$ est un fermé induit de $[0,+\infty[$, c'est à dire que $f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)} \cap [0,+\infty[$.

Or $[0,+\infty[$ est $\boxed{\text{un fermé}}$ et $f^{-1}(F) \subset [0,+\infty[$, donc $\overline{f^{-1}(F)} \subset [0,+\infty[$, donc $f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)}$

donc $f^{-1}(F)$ est fermé.

Remarque : Plus généralement,

- si A est fermé de $\mathbb{R}^p$, tout fermé induit de A est un fermé de $\mathbb{R}^p$
- si A est ouvert, tout ouvert induit de A est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

dernier cours

rappel : contrôle final 8 avril 15h-16h30

contrôle de rattrapage pour les absences justifiées

3 exos inspirés d'exos traités en TD

1 pour chaque chapitre

Continuité uniforme

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}^p$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^q$. On dit que f est **uniformément continue** sur A si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in A,\ \|x-y\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon.$$

Remarque : On se rappelle que f est continue sur A ssi

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in A,\ \|y-x\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon$$

Seule différence : le δ peut dépendre de x dans la continuité.

Pour la continuité uniforme, le même δ est valable pour tout x.

<u>Proposition</u>: f uniformément continue sur A

$$\Downarrow$$

f continue sur A

Par contre, il existe des fonctions continues qui ne sont <u>pas</u> uniformément continues.

<u>Exemple</u>: La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ est une fonction continue, mais elle n'est <u>pas</u> uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Prenons $\varepsilon = 1$. On a

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x-y||x+y|$$

par ex
pour $x, y > 0$ $\quad |x-y| = \dfrac{|f(x) - f(y)|}{x+y}$

Si $x, y > n \in \mathbb{N}$, alors

$$|f(x) - f(y)| < 1 \implies |x-y| < \frac{1}{2n}$$

Or $\dfrac{1}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc on ne peut pas trouver de $\delta > 0$ qui fonctionne.

Remarque: Dans l'exemple précédent, on prends des x, y de plus en plus grands pour contredire la continuité uniforme.

Ce n'est pas un hasard:

Théorème de Heine: Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^p$ et $f : K \to \mathbb{R}^q$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur K.

<u>Preuve</u> : Par l'absurde, supposons

$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in K, \|y - x\| < \delta$ et $\|f(y) - f(x)\| \geq \varepsilon$

On fixe un tel $\varepsilon > 0$, et on considère les $\delta = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On peut ainsi construire deux suites (x_n) et (y_n) à valeurs dans K telles que :

$$\|y_n - x_n\| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|f(y_n) - f(x_n)\| \geq \varepsilon .$$

Par compacité, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ de la suite (x_n) qui converge vers $\alpha \in K$.

De même, il existe une sous-suite $(y_{\psi(n)})$ de $(y_{\phi(n)})$ qui converge vers un $\beta \in K$.

Par continuité de f et de la norme euclidienne, on a

$$\|f(\beta)-f(\alpha)\| \geqslant \varepsilon > 0$$

en particulier, $f(\beta) \neq f(\alpha)$.

D'autre part, en passant à la limite dans l'inégalité

$$\|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\| < \frac{1}{\varphi(n)}$$

on obtient $\|\beta - \alpha\| \leqslant 0$ donc $\beta = \alpha$.

$\rightsquigarrow$ Contradiction avec $f(\beta) \neq f(\alpha)$. $\square$

Cas particulier : applications Lipschitziennes

Définition : Soit λ un réel positif. Une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est dite λ-Lipschitzienne sur A si

$$\forall x, y \in A, \qquad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \lambda \|x - y\| .$$

Remarque : On peut définir ceci pour d'autres normes sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$, mais attention dans ce cas la constante λ peut changer.

Exemple : La norme euclidienne est 1-Lipschitzienne :

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \qquad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^p .$$

<u>Proposition</u> : Une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ qui est λ-Lipschitzienne sur A est uniformément continue sur A.

<u>Preuve de la proposition</u> :

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$.

Soit $x, y \in A$ tq $\|x - y\| < \delta$.

On a $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \lambda \|x - y\| < \lambda \delta = \varepsilon$

f λ-Lipschitzienne

On a vérifié la propriété qui définit la continuité uniforme. $\square$

Corollaire : Une fonction λ-Lipschitzienne est continue.

fin du cours

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|f(x)\| \leq a\|x\| + b$.

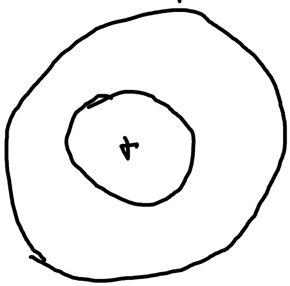
f est unif continue :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \|y - x\| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

On veut trouver a, b tq $|f(x)| \leqslant a\|x\| + b$

en particulier $|f(0)| \leqslant b$.

On peut espérer que ça marche avec $b = |f(0)|$



Par uniforme continuité, pour $\varepsilon = 1$, on peut fixer un $\delta > 0$ tq $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, $\|y - x\| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < 1$.

En particulier, pour $y = 0$,

$$\|x\| < \delta \implies |f(x) - f(0)| < 1$$

$$\implies |f(x)| < |f(0)| + 1$$

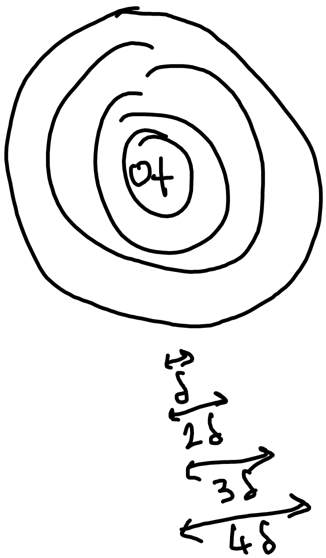
En prenant $b = |f(0)| + 1$, on aura l'inégalité

$$|f(x)| \leq a\|x\| + b \quad \text{sur} \quad \mathring{B}(0, \delta).$$

Si $\|x\| < 2\delta$, alors on a

$$\left\|\frac{x}{2}\right\| < \delta \quad \text{donc}$$

$$\left\|\frac{x}{2} - 0\right\| < \delta \quad \text{et} \quad \left\|x - \frac{x}{2}\right\| < \delta.$$



donc $\left|f\left(\frac{x}{2}\right) - f(0)\right| < 1 \qquad \left|f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right| < 1$

donc $|f(x)| < |f(0)| + 2$

Si $\|x\| < k\delta$, alors $|f(x)| \leqslant |f(0)| + k$

par une récurrence (à détailler).

$$\left(x - 0 = \underbrace{\frac{kx}{k} - \frac{(k-1)x}{k}} + \underbrace{\frac{(k-1)x}{k} - \frac{(k-2)x}{k}} + \cdots + \underbrace{\frac{x}{k} - 0} \right)$$

tous de norme $< \delta$

Si $(k-1)\delta \leqslant \|x\| < k\delta$, alors $k \leqslant \frac{\|x\|}{\delta} + 1$

donc $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \frac{\|x\|}{\delta} + 1$

$\leqslant a\|x\| + b$

avec $a = \frac{1}{\delta}$ et $b = |f(0)| + 1$.

Exercice 7. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction uniformément continue. Soient (x_n) et (y_n) deux suites à valeur dans A telles que $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$. Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}^*$ sur lesquels la fonction $x \mapsto 1/x$ est uniformément continue.

f est uniformément continue sur A

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A, \|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. (1)

$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ signifie :

$\forall \gamma > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|x_n - y_n\| < \gamma$. (2)

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $\delta > 0$ le δ fourni par (1).

Soit N venant de (2) pour $\gamma = \delta$.

Alors $\forall n \geq N, \|x_n - y_n\| < \delta$ par (2)

donc $\|f(x_n) - f(y_n)\| < \varepsilon$ par (1)

On a montré

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad \| f(x_n) - f(y_n) \| < \varepsilon.$

donc $\lim\limits_{n \to \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

Application à $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

Comme f est impaire, il suffit de considérer les intervalles dans $]0, +\infty[$.

Soit $I \subset]0, +\infty[$ un intervalle.

si $I \subset [a, b]$ avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, alors f est uniformément continue sur I :

En effet, $f|_{[a,b]} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, donc par le théorème de Heine, $f|_{[a,b]}$ est uniformément continue.

Donc $f|_I$ est uniformément continue.

Supposons maintenant que $I \subset [a,+\infty[$ avec $a>0$.

On a $|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$

$$= \left|\frac{y-x}{xy}\right|$$

$$= \frac{|y-x|}{xy} \quad \text{pour } x,y \in]0,+\infty[$$

$$\leq \frac{1}{a^2}|y-x|$$

Donc $f|_{[a,+\infty[}$ est $\frac{1}{a^2}$-Lipschitzienne,

donc uniformément continue.

Donc $f|_I$ est uniformément continue.

Par contre, si $0 \in \overline{I}$, on a :

à partir d'un certain rang, $\frac{1}{n} \in I$,

or $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Posons $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n+1}$.

Alors par la première partie de l'exercice,

si f est uniformément continue sur I,

$$\lim_{n \to \infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0 .$$

Or $$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \right|$$

$$= |n - (n+1)|$$

$$= 1$$

ne converge pas vers 0.

Donc f n'est pas uniformément continue sur I.