UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L2 S4**
HLMA412 Compléments d'Analyse **Année 2020-2021**

Contrôle final

Durée : 1h30 — Documents et instruments électroniques interdits.

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|$ désigne sa norme euclidienne.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction et $x \in \mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

1. **Cours.** Rappeler la définition donnée en cours de : f *est continue en* x.
2. Trouver deux nombres réels strictement positifs a et b tels que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$,
$$a\|y\| \leq \|y\|_1 \leq b\|y\|$$
3. Montrer que f est continue en x si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on ait
$$\|y - x\|_1 < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$
4. Montrer que $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_1 \leq 2\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

1. **Cours.** Rappeler la définition donnée en cours de $\limsup_{n\to\infty} x_n$ **et** sa caractérisation en terme de valeurs d'adhérences.
2. Déterminer $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.
3. A-t-on toujours $\limsup_{n\to\infty} x_n \geq \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$?

Exercice 3. Soient A et B deux parties non-vides de $\mathbb{R}^n$. On pose
$$d(A, B) := \inf\{\|x - y\| \mid (x, y) \in A \times B\}.$$
Si $A = \{x\}$ est un singleton, on notera simplement $d(x, B)$ au lieu de $d(\{x\}, B)$.
Si ϵ est un réel strictement positif, on pose
$$B_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, B) < \epsilon\}.$$

1. **Cours.** Rappeler la définition donnée en cours de l'adhérence de B.
2. Montrer que $\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, B) = 0\}$.
3. Soit ϵ un réel strictement positif. Montrer que B_ϵ est ouvert.
4. Montrer que, si A et B sont compacts, il existe $(x_0, y_0) \in A\times B$ tel que $d(A, B) = \|x_0 - y_0\|$.
5. Montrer que si deux ensembles compacts A et B sont disjoints, alors $d(A, B) > 0$.
6. Montrer que si A et B sont deux compacts disjoints, il existe deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.