UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L3 Mathématiques**
HLMA602 **Année 2020-2021**
Calcul différentiel et équations différentielles

Exercices du Chapitre 1 : Différentiabilité

Exercice 1. On donne $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est différentiable en tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer df_A.

Exercice 2. Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = {}^tAA$ est différentiable en tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer df_A.

Exercice 3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle. Soit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (U, V) &\mapsto {}^tUMV \end{aligned}$$

où les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont écrits en colonne. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est différentiable, et calculer $df_{(e_1,e_1)}(e_2, e_2)$.

Exercice 4. On considère $f : GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A^{-1}$.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère une norme $\|\cdot\|$ qui vérifie $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$ (ça existe ?...). Montrer que si $\|H\| < 1$ alors $I_n - H \in GL_n(\mathbb{R})$ et
$$(I_n - H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} H^k.$$
3. Montrer que f est différentiable en I_n et préciser df_{I_n}.
4. Montrer que f est différentiable en tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et préciser df_A.

Exercice 5. Déterminer les matrices jacobiennes des applications suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x\cos(y - x)$.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(t) = (\cos t, \sin t, t)$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x, y) = (xy, e^x \cos y)$.

Exercice 6. On donne $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|_2$. Calculer, lorsqu'il existe, le gradient $\nabla f(a)$ de f en $a \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 7. On donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+2x^2y+3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0, 0)$, que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent, et que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 8. On donne $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, e^{2t}, t\right).$$

Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et que f devient alors différentiable en 0. Que vaut df_0 ?

Exercice 9. On donne $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, e^{2t}, t\ln|t|\right).$$

Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et étudier alors la différentiabilité de f en 0.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y.$$

1. La fonction f admet-elle des dérivées directionnelles en tout point de $\mathbb{R}^2$ suivant tous les vecteurs ?
2. Soit $u = (a,b)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Calculer, à l'aide de la définition, $D_u f(1,2)$ la dérivée directionnelle de f au point $(1,2)$ suivant u.
3. En déduire $df_{(1,2)}$ la différentielle de f en $(1,2)$.
4. En déduire les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

Exercice 11. Calculer la différentielle de f au point (a,b) dans les cas suivants.

1. $f(x,y) = x\sqrt{y}, \qquad (a,b) = (1,4).$
2. $f(x,y) = \frac{x}{y}, \qquad (a,b) = (6,3).$
3. $f(x,y) = \sin(x+2y), \qquad (a,b) = (\pi,0).$
4. $f(x,y) = \sqrt{x+e^y}, \qquad (a,b) = (1,0).$

Exercice 12. Pour les quatre fonctions f, g ,h, u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies ci-dessous :

1. En quels points la fonction est elle continue ?
2. Calculer les dérivées partielles aux points où elles existent.
3. En quels points la fonction admet elle des dérivées directionnelles suivant tout vecteur ?
4. En quels points la fonction est-elle différentiable ?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour u, on pourra considérer la restriction de u à la parabole d'équation $y = x^2$.

Exercice 13. On donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On se donne une direction unitaire $e = (\cos\theta, \sin\theta)$. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la dérivée directionnelle $D_e f(0,0)$ existe et la calculer. Montrer aussi que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 14. On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^3$. On définit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$g(x,y,z) = f(x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2).$$

Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,t,t) + \frac{\partial g}{\partial y}(t,t,t) + \frac{\partial g}{\partial z}(t,t,t) = 0.$$

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On définit des fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(x,y) = f(y,x), \quad h(x) = f(x,-x).$$

Montrer que g et h sont différentiables, et déterminer leurs différentielles en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|_2},$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne. Montrer que f est différentiable, et déterminer sa différentielle.

Exercice 17. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit qu'une application $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}^p$ est *positivement homogène de degré* λ si

$$g(tx) = t^\lambda g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ tout } t > 0.$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable en 0, telle que $f_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ est positivement homogène de degré 1. Montrer que $f(0) = 0$, puis que f est linéaire.
2. Une norme sur $\mathbb{R}^n$, vue comme application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, peut-elle être différentiable à l'origine ?

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Montrer que f est homogène de degré $\lambda > 0$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad df_x(x) = \lambda f(x).$$

Exercice 19. Trouver les $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

On pourra “passer en polaire”.

Exercice 20. Montrer que les deux fonctions f et g suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Exercice 21. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4 + 2y^4.$$

Pour cela on pourra, pour un (x_0, y_0) fixé, considérer la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f(tx_0, ty_0).$$

Exercice 22. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application déterminant définie par $f(M) = \det M$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 0, sauf en position (i,j) où le coefficient est 1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\frac{\partial f}{\partial E_{ij}}(A)$, en s'aidant du développement du déterminant suivant une ligne (ou une colonne).
3. Montrer que $df_A(H) = \mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{Com}(A)H)$.

Exercice 23. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit a et b deux points de U tels que $[a,b] \subset U$. Montrer l'égalité des accroissements finis :

$$\exists c \in]a,b[,\ f(b) - f(a) = df_c(b-a).$$

Pour cela, on se ramènera à une fonction de la variable réelle.

Exercice 24. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \left(\frac{\sin(x+y)}{2}, \frac{\cos(x-y)}{2}\right).$$

Montrer que, si on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_2$, f est contractante (cad k-lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$). En déduire qu'il existe un unique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$.

Que se serait-il passé si on avait choisi la norme $\|\cdot\|_\infty$ ou la norme $\|\cdot\|_1$?

Exercice 25 (Fonction convexe)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est convexe si

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad \forall (x,y) \in U^2, \forall \lambda \in [0,1].$$

Montrer que, si f est différentiable sur U, alors elle est convexe si et seulement si elle vérifie $f(y) - f(x) \geq df_x(y-x)$ pour tout $(x,y) \in U^2$.

Exercice 26 (Longueur d'une courbe)**.** On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|\cdot\|$. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1. Une subdivision σ de $[0,1]$ est la donnée de $k+1$ réels $t_0, t_1, \ldots, t_k$ $(k \geq 1)$ tels que

$$t_0 = 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = 1.$$

On écrit $\sigma = (t_0, \ldots, t_k)$. A une telle subdivision est associée une ligne brisée dans $\mathbb{R}^n$, dont la longueur est

$$L(\sigma) := \sum_{i=0}^{k-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|.$$

On appelle longueur de γ le nombre $L := \sup L(\sigma)$, où la borne supérieure est prise sur l'ensemble de toutes les subdivisions σ de $[0, 1]$.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ quelconques. Quelle est la longueur de la courbe $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ définie par $\gamma(t) = (1 - t)x + ty$?
2. Montrer que toute courbe de classe C^1 est de longueur finie. Montrer qu'un segment de droite est le plus court chemin pour aller d'un point de $\mathbb{R}^n$ à un autre.
3. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un $r > 0$ tel que,
$$\forall (s, t) \in [0, 1]^2, |t - s| \leq r \Longrightarrow \|\gamma(t) - \gamma(s) - (t - s)\gamma'(s)\| \leq \epsilon |t - s|.$$
4. En déduire que $L = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$.

Exercice 27. Montrer que si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et si $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée de classe C^1 vérifiant $\gamma([0, 1]) \subset U$, alors sa longueur $L(\gamma)$ vérifie

$$\|f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))\| \leq L(\gamma) \sup_{t \in [0,1]} ||| \, df_{\gamma(t)} \, ||| \, .$$

Exercices du Chapitre 2 : Différentielles supérieures

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ existent, et les calculer.
2. Les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent-elles ? Qu'observe-t-on ? Que peut-on en conclure ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = (x^4 + y^2 + z^3, e^x \sin(yz)).$$

Justifier que f est deux fois différentiable, et calculer

$$d^2 f_{(0,\pi,1)}((1,2,1),(0,1,0)).$$

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions deux fois différentiables sur $\mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x,y) = f(x)\cos(g(y))$. Exprimer la matrice hessienne de h en fonction des dérivées successives de f et g.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y) = f(x^2 + y, \sin(xy)).$$

Exprimer la matrice hessienne de g en fonction des dérivées partielles successives de f.

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les extrema locaux et globaux.

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. $f(x,y) = (x-y)e^{xy}$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
3. $f(x,y) = x^2 + ay^4$ définie sur $\mathbb{R}^2$, où a est un paramètre réel.
4. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 2$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
5. $f(x,y,z) = (x+y)e^{x+y-z^2}$ définie sur $\mathbb{R}^3$.
6. $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ définie sur le rectangle $[0,3] \times [0,2] \subset \mathbb{R}^2$.

Exercice 6. On donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y^2 - x^2 y + x^2.$$

1. Déterminer les points critiques de f.

2. On définit maintenant

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Faire un dessin. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur C. Les déterminer.

Exercice 7. 1. Montrer que si une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possède deux maxima locaux, alors elle possède également au moins un minimum local.

2. Etudier les extrema de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = -(x^2-1)^2-(x^2y-x-1)^2$. Quelle conclusion en tirer ?

Exercice 8. 1. Montrer que si une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un unique extremum local, alors cet extremum est nécessairement un extremum global.

2. Etudier les extrema de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ sur $\mathbb{R}^2$. Quelle conclusion en tirer ?

Exercice 9. 1. Trouver un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable à l'origine, telle que $df(0) = 0$ et $d^2f(0) = 0$, et admettant un minimum local non strict en 0.

2. Même question mais avec, cette fois, un minimum local strict en 0.
3. Même question mais avec, cette fois, pas d'extremum local en 0.

Exercice 10 (Le Laplacien)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On définit le “Laplacien de f” par :

$$\Delta f(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x).$$

Relier $\Delta f(x)$ à la matrice hessienne $D^2 f(x)$.

Exercice 11 (Laplacien en polaire)**.** On se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On définit $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$F(r,\theta) = f \circ \varphi(r,\theta).$$

Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$, $\frac{\partial F}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$, en fonction de celles de f, et montrer que

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta),$$

soit encore $\Delta f(x,y) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta)$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $B = \mathring{B}(0,1)$ la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$, de centre 0 et de rayon 1, pour la norme euclidienne $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

1. On suppose dans cette question que $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in B$. On veut montrer que

$$f(x) < \max_{\|y\|=1} f(y), \quad \forall x \in B.$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un $x \in B$ pour lequel $f(x) \geq \max_{\|y\|=1} f(y)$.

(a) Montrer que f admet un maximum local en un point $x_0 \in B$.

(b) En déduire une contradiction en utilisant la propriété suivante : si une matrice symétrique définit une forme quadratique négative, alors la trace de cette matrice est négative ou nulle.

2. On suppose maintenant que $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in B$ (on dit que f est *harmonique* sur B). On veut montrer que

$$\min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y), \quad \forall x \in B.$$

(a) Pour $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon(x) := f(x) + \varepsilon\|x\|^2$. Appliquer la question précédente et faire tendre ε vers 0 pour montrer l'inégalité "de droite".

(b) Comment montrer l'autre inégalité ?

Exercice 13 (Fonctions convexes deux fois différentiables)**.** Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $x \in U$, la matrice hessienne de f est positive.

Exercice 14. Soit A une matrice $n \times n$ symétrique réelle, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x^T Ax + b^T x + c.$$

Montrer que f est convexe si et seulement si A est positive.

Exercice 15. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe deux fois différentiable sur U. Montrer qu'un point critique de f est nécessairement un minimum global. Le résultat est-il toujours vrai si f est supposé seulement une fois différentiable ?

Exercice 16 (Droite des moindres carrés)**.** Soit n un entier supérieur ou égal à deux. On considère n points distincts de $\mathbb{R}^2$, notés (x_i, y_i) pour $1 \leq i \leq n$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

1. Montrer que f n'admet qu'un seul point critique $(\hat{a}, \hat{b})$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer $\hat{b}$ en fonction de $\hat{a}$.
2. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17. Trouver les $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On pourra poser $F(u, v) = f(u + v, u - v)$.

Exercice 18. On donne $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $c \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(t, x) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

vérifie l'équation des ondes

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \; \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x^2 \sin(y) + y^2 \sin(x).$$

Calculer $d^3 f_{(x,y)}(u, v, w)$ en fonction de $(x, y), u, v, w \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 20. Montrer que toute fonction polynomiale (c'est-à-dire dont toutes les fonctions composantes sont des polynômes) est de classe C^∞ sur son ensemble de définition.

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L3 Mathématiques**
HLMA602 **Année 2020-2021**
Calcul différentiel et équations différentielles

Exercices du Chapitre 3 : Théorème d'inversion locale

Exercice 1. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^3 - 2xy^2, x + y)$ est-elle un difféomorphisme local en $a = (1, -1)$? Si oui, écrire la différentielle de son inverse local au point $b = f(a)$?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. Décrire ω l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ autour desquels f est un difféomorphisme local.
2. Est ce que f restreinte à ω est un difféomorphisme sur son image ?
3. Pour tout point a de ω, écrire la différentielle de l'inverse local de f au point $f(a)$, et trouver un voisinage ouvert U de a tel que $f_{|U}$ soit un difféomorphisme sur son image.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f'(0) \neq 0$.
2. Si n est un entier non nul, montrer que

$$f'\left(\frac{1}{2n}\right) f'\left(\frac{1}{2n+1}\right) < 0,$$

   et en déduire que f n'est injective sur aucun intervalle contenant 0, aussi petit soit-il.
3. Commentaires ?

Exercice 4 (Coordonnées polaires)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

1. Décrire ω l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ autour desquels f est un difféomorphisme local.
2. Pour tout point a de ω, écrire la différentielle de l'inverse local de f au point $f(a)$.
3. Est ce que f restreinte à ω est un difféomorphisme sur son image ?
4. Montrer que f est un C^∞ difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ sur $\mathbb{R}^2\backslash([0, +\infty[\times\{0\})$.

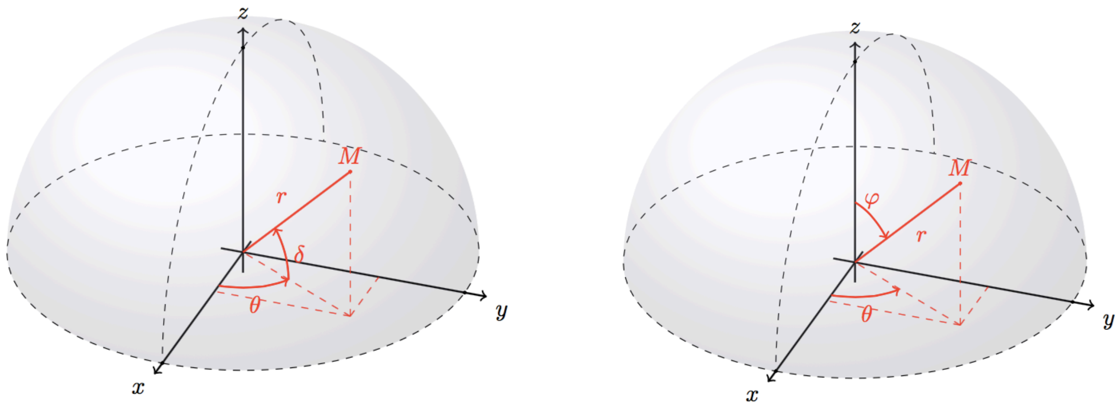

FIGURE 1 – Coordonnées sphériques. A gauche la convention (r, θ, δ) rayon-longitude-latitude comme dans l'Exercice 5. A droite la convention (r, θ, φ) rayon-longitude-colatitude.

Exercice 5 (Coordonnées sphériques)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(r, \theta, \delta) = (r \cos\theta \cos\delta, r \sin\theta \cos\delta, r \sin\delta).$$

1. Décrire ω l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ autour desquels f est un difféomorphisme local.
2. Pour tout point a de ω, écrire la différentielle de l'inverse local de f au point $f(a)$.
3. Est ce que f restreinte à ω est un difféomorphisme sur son image ?
4. Montrer que f est un C^∞ difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus ([0, +\infty[\times\{0\} \times \mathbb{R})$.

Exercice 6 (Fonction "propre")**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. On dit que f est *propre* si l'image réciproque de tout compact de $\mathbb{R}^p$ par f est compacte dans $\mathbb{R}^n$.

1. Les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sont elles propres[1] $x \mapsto 0$, $x \mapsto x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto x^2$. Quid de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$?
2. Si f est propre et continue, montrer que f est *fermée* (i.e. l'image d'un fermé est fermée). On pourra montrer que, si F est fermé dans $\mathbb{R}^p$, alors $f(F)$ est séquentiellement fermé.
3. On suppose que f est injective, propre, de classe C^1, et est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^p$ (en particulier, $n = p$). Montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7. Pour a et b réels, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x + a \sin y, y + b \sin x).$$

1. Pour quelles valeurs de (a, b) f est-elle un difféomorphisme local en tout point ?

1. Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continue on peut montrer que f est propre si et seulement si $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$

2. Montrer alors que f est injective.
3. Montrer alors que f est propre (cf Exercice 6).
4. Montrer alors que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et s'il existe $k > 0$ tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > k$, alors f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui même (on pourra, par exemple, montrer que f est propre). Montrer que ce résultat est faux avec $k = 0$.

Exercice 9. On considère une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, telle que

$$\|f(y) - f(x)\| \geq k\|y - x\| \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

pour une certaine constante $k > 0$ et une norme quelconque (on dit que f est k-dilatante pour la norme en question). On veut montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui- même.

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$ (par exemple en montrant qu'elle est séquentiellement fermée).
3. Montrer que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et en déduire que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est ouverte dans $\mathbb{R}^n$.
4. Conclure.

Exercice 10. 1. Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A^2$ est de classe C^1, et déterminer sa différentielle en tout point.

2. Montrer que toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suffisamment proche de la matrice identité "admet une racine carrée".

Exercice 11. Montrer que

$$\forall n \geq 0, \exists! u_n \in \mathbb{R}, u_n^5 + n u_n - 1 = 0.$$

Montrer que $0 < u_n < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Utiliser le Théorème des fonctions implicites pour obtenir

$$u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \frac{e}{n^4} + \frac{f}{n^5} + \frac{g}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right), \qquad \text{quand } n \to +\infty,$$

avec des réels a, b, c, d, e, f, g à déterminer.

Exercice 12. Soit C la "courbe" de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation

$$x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0.$$

1. Montrer que, au voisinage du point $(0, 0)$, l'ordonnée y d'un point de C est définie implicitement comme une fonction, de classe C^∞, de x. On note φ une telle fonction.
2. Calculer les dérivées première et seconde de φ en 0.

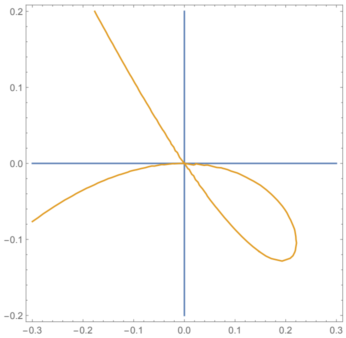

FIGURE 2 – Le point double de l'Exercice 15.

3. Donner l'allure de la courbe C au voisinage du point $(0, 0)$.

Exercice 13. Soit C la "courbe" de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation

$$x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0.$$

Vérifier que $a = (1, 1)$ est sur C. Trouver la tangente à C en a. Déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente en a.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = 2\cos^2 x + xy - e^y.$$

1. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 tel que, pour tout x dans I, il existe un unique $y > 0$, que tel que $f(x, y) = 0$. On note $\varphi(x)$ un tel y.
2. Montrer que la fonction $x \in I \mapsto \varphi(x) \in]0, +\infty[$ est de classe C^1.
3. Montrer que $\varphi'(0) = \frac{\ln 2}{2}$.
4. Montrer que, pour tout $x \in I$, on a

$$\varphi'(x)(e^{\varphi(x)} - x) = \varphi(x) - 4 \sin x \cos x.$$

Exercice 15 (Un point double)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$x^3 + xy + y^2 e^{x+y} = 0.$$

Montrer qu'il existe deux fonctions distinctes φ_1 et φ_2 de classe C^1 sur un voisinage ouvert I de 0 telles que, pour $i = 1$ et $i = 2$, $f(x, \varphi_i(x)) = 0$ pour tout $x \in I$ (on pourra poser $y = xz$ et "impliciter autour de deux z bien choisis"). Préciser l'allure du graphe de φ_i autour de $(0, 0)$. Vérifier que c'est cohérent avec la Figure 2.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1).$$

On note C la "courbe" de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$.

1. Vérifier que le point $a = (1, 1, 1) \in C$.
2. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant 1, une $B \subset \mathbb{R}^2$ de centre $(1, 1)$, et une fonction $\varphi : I \to B$ tels que : $(x, y, z) \in C \cap I \times B$ si et seulement si $(y, z) = \varphi(x)$.
3. Déterminer la tangente à C en a.

Exercice 17. Soit C la "courbe" de $\mathbb{R}^3$ définie par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \quad \text{et} \quad x^3 + y^3 + z^3 = 36.$$

Montrer que $(1, 2, 3) \in C$. Montrer que, dans un voisinage de ce point, les points de C peuvent s'écrire $(y, z) = \varphi(x)$ où φ est de classe C^1. Préciser la tangente en chaque point.

Exercice 18. Montrer que l'équation $z^3 + 2z + e^z - x - y^2 = \cos(x - y + z)$ définit implicitement z comme fonction C^1 de x et y au voisinage du point $(0, 0, 0)$. Calculer les dérivées partielles de z à l'ordre 2 en 0.

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L3 Mathématiques**
HLMA602 **Année 2020-2021**
Calcul différentiel et équations différentielles

Exercices du Chapitre 4 Partie I : Équations différentielles, Théorème de Cauchy-Lipschitz

Exercice 1. Calculer la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2. Trouver la solution maximale des problèmes suivants

$$\begin{cases} x' = 3t^2x^2 \\ x(1) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 3t^2x^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre sur un intervalle à préciser

$$\begin{cases} xx' = \frac{1}{2} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 4. Justifier que la solution maximale de

$$\begin{cases} x' = |x| \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

ne peut s'annuler, puis la trouver.

Exercice 5. On considère le modèle de population de Gompertz, dans lequel l'évolution de la population $N(t)$ considérée est décrite par l'équation $N'(t) = rN(t)\ln N(t)$, où r est une constante donnée. Donner une expression de la population en fonction de la population initiale $N(0) = N_0 > 0$.

Exercice 6. Montrer que, pour tout $\alpha \geq 0$, la fonction

$$x_\alpha(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t < \alpha \\ (t-\alpha)^2 & \text{si } t \geq \alpha, \end{cases}$$

est solution globale d'un même problème de Cauchy. Pourquoi n'est ce pas en contradiction avec le Théorème de Cauchy-Lipschitz ?

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ et localement lipschitzienne par rapport à X. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

On suppose que f est bornée sur $I \times \mathbb{R}^n$. Montrer alors que la solution maximale est globale, cad définie sur I tout entier (raisonner par l'absurde, utiliser la formulation intégrale, et conclure grâce au théorème d'explosion en temps fini).

Exercice 8. Montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t^2+1} e^{-x^2 \sin^2 t} \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

admet une unique solution maximale, puis que celle ci est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (utiliser l'Exercice 7). Montrer que, lorsque $t \to +\infty$, $x(t)$ tend vers un réel l, et que $1 \leq l \leq 1 + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 9. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = t^2 + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

1. Justifier l'existence d'une unique solution maximale x.
2. Montrer que x est une fonction impaire et de classe C^∞.
3. Etudier la monotonie et la convexité de x.
4. On suppose x définie sur $[0, +\infty[$. Montrer que $\frac{x'(t)}{1+x^2(t)} \geq 1$ pour tout $t \geq 1$. Montrer, en intégrant, que c'est impossible. En déduire que x est définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
5. Dresser le tableau de variation de x.

Exercice 10. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \cos(tx) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

1. Justifier l'existence d'une unique solution maximale x.
2. En observant que
$$x(t) = x_0 + \int_0^t \cos(sx(s))ds$$
montrer que x est définie sur $\mathbb{R}$ entier.

Exercice 11. On prend $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on suppose que $\frac{1}{f} \in L^1(\mathbb{R})$, cad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f(u)} du < +\infty.$$

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ donné montrer que la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

est définie sur $]-T_{min}, T_{max}[$ avec T_{min} et T_{max} deux réels positifs à préciser (en fonction de la non linéarité f et de la donnée initiale x_0). Donner des exemples d'application.

Exercice 12 (Variation sur les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (la première variable représente le temps, mais U n'est pas nécessairement le produit d'un intervalle par un ouvert) et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. Soit $(t_0, x_0) \in U$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et une fonction dérivable $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ tels que
   (a) $\varphi(t_0) = X_0$,
   (b) $\forall t \in I, (t, \varphi(t)) \in U$,
   (c) $\forall t \in I, \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.
2. Soit J un autre intervalle ouvert contenant t_0 et $\psi : J \to \mathbb{R}^n$, dérivable, vérifiant les trois conditions de la question précédente. Montrer que $\varphi_{|I\cap J} = \psi_{|I\cap J}$ (on pourra considérer t_1, le plus grand $t \geq t_0$ dans $I \cap J$ tel que $\varphi(t) = \psi(t)$ et appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz "usuel" au voisinage de ce point).
3. En déduire que le problème de Cauchy possède une unique solution maximale.

Exercice 13. On considère la fonction $(t, x) \mapsto \frac{1}{1+tx}$ définie sur l'ouvert

$$U = \{(t, x), tx \neq -1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1. En utilisant l'exercice précédent, montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' & = \frac{1}{1+tx} \\ x(0) & = 0 \end{cases}$$

   possède une solution maximale unique x.
2. Montrer que cette solution x est impaire et croissante.
3. Montrer, en considérant $\int_0^t x'(s)ds$, que x est définie sur $\mathbb{R}$ entier.
4. Justifier l'existence d'une limite $l = \lim_{t\to+\infty} x(t)$, où $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
5. Montrer, en considérant $\int_0^t x'(s)ds$, que $l = +\infty$.

Exercice 14. On considère l'EDO

$$(E) : \qquad x' = t + x^2$$

1. Quel est le lieu des points où les solutions de (E) présentent une tangente horizontale ?
2. Décrire le lieu des points d'inflexion.

Exercice 15. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad tx' = t + x^2 \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

1. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe une unique fonction x définie sur un intervalle $J =]\alpha, \beta[\subset]0, +\infty[$ contenant 1, solution maximale de l'équation différentielle (E) et vérifiant $x(1) = x_1$.
2. Montrer que,

$$\forall t \in [1, \beta[, \quad \frac{x'(t)}{1 + x(t)^2} \geq \frac{1}{t}.$$

   Montrer, en intégrant cette inégalité, que $\beta < +\infty$.
3. Etudier le comportement d'une solution maximale aux bornes de l'intervalle $]\alpha, \beta[$. On distinguera les possibilités $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$.

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L3 Mathématiques**
HLMA602 **Année 2020-2021**
Calcul différentiel et équations différentielles

Exercices du Chapitre 4 Partie II : Équations différentielles linéaires

Ordre 1

Exercice 1. La vitesse de déplacement des ions entre deux électrodes immergées dans un électrolyte vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v = \frac{F}{m}$$

où m, F, R sont des constantes. Calculer v.

Exercice 2. Résoudre les problèmes de Cauchy

1. $x' - 2x = e^{2t}t^2$ avec $x(0) = 0$.
2. $x' - \frac{1}{1+t}x = 2t^2$ avec $x(0) = -3$.
3. $x' - (1+t)x = -2t - t^2$ avec $x(0) = 2$.

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes en en donnant toutes les solutions maximales :

1. $x' + x = \sin t$,
2. $x' = 3t^2 - \frac{x}{t}$.

Exercice 4. Pour $a > 0$ on considère la fonction Gaussienne définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-ax^2}$. On définit sa "transformée de Fourier" comme la fonction notée $\widehat{\varphi}$ et définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-ax^2} dx.$$

1. Montrer $\widehat{\varphi}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\widehat{\varphi}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\widehat{\varphi}'(\xi)$ comme une intégrale à paramètre.
3. En intégrant par parties l'expression de $\widehat{\varphi}'(\xi)$, trouver un problème de Cauchy linéaire vérifié par $\widehat{\varphi}$.
4. Calculer $\widehat{\varphi}(\xi)$.

Exercice 5. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt.$$

1. Montrer que φ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi'(x)$ comme une intégrale à paramètre.
3. En intégrant par parties l'expression de $\varphi'(x)$, trouver un problème de Cauchy linéaire vérifié par φ.
4. Calculer $\varphi(x)$.

Exercice 6. On considère le système linéaire d'équations différentielles

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} x' & = & -5x & +8y & -4 \\ y' & = & -4x & +7y & +3 \end{array}\right. \tag{1}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $y(0) = 1$.

1. Trouver les vecteur propres et valeurs propres de la matrice
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$
2. Expliquer pourquoi résoudre (1) revient à résoudre le système
$$\left\{\begin{array}{rcrr} a' & = & 3a & +10 \\ b' & = & -b & -7 \end{array}\right. \tag{2}$$
avec les conditions initiales $a(0) = 2$ et $b(0) = -1$.
3. Trouver la solution de (2), puis celle de (1).

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$\lim_{t\to+\infty} f'(t) + f(t) = 0.$$

En résolvant l'EDO $x' + x = f'(t) + f(t)$, montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Exercice 8. Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Résoudre le système différentiel suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1' & = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2' & = 6x_1 - x_2 \\ x_3' & = -x_1 - 2x_2 - x_3. \end{array}\right.$$

Exercice 10. Résoudre les équations différentielles $X' = \mathcal{A}X$ dans les cas suivants :

1. $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
2. $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$
3. $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 (EDO linéaires à coefficients non constants en dimension 2...)**.** On considère la matrice $\mathcal{A}(t)$, dépendant de la variable $t \in \mathbb{R}$ et donnée par

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $B(t) = \int_0^t \mathcal{A}(s)ds$ puis $e^{B(t)}$.
2. Comparer $B'(t)e^{B(t)}$ et $(e^{B(t)})'$.
3. Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une unique solution $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ au problème de Cauchy
$$X' = \mathcal{A}(t)X, \quad X(0) = X_0.$$
4. A-t-on $\gamma(t) = e^{B(t)}X_0$? Comparer avec le cas des EDO linéaires en dimension 1.

Exercice 12 (EDO linéaires à coefficients non constants en dimension 2...)**.** Résoudre le système différentiel (où les inconnues x et y sont à valeurs réelles)

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' & = tx - y \\ y' & = x + ty. \end{array} \right.$$

On pourra poser $z = x + iy$...

Ordre 2

Exercice 13. Résoudre les problèmes de Cauchy

1. $x'' - 2x' - 3x = \cos t$ avec la condition initiale $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.
2. $x'' - 3x' + x = t$ avec la condition initiale $x(0) = 10$ et $x'(0) = -10$.

Exercice 14. Trouver une solution de

$$t^2x'' + 4tx' + 2x = e^t$$

sous forme d'une série entière.

Exercice 15. La vitesse u d'un liquide à l'intérieur d'un capillaire dépend de la distance r à l'axe de ce capillaire suivant la formule

$$r\,\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = -kr$$

où k est une constante. Calculer $u(r)$ en fonction de r.

Exercice 16. On considère l'équation différentielle (sur $]0, +\infty[$)

$$t^2x'' - 2x + \frac{3}{t} = 0. \tag{3}$$

1. Montrer qu'en posant $z(t) = tx'(t) + x(t)$ on obtient l'EDO du premier ordre
$$tz' - 2z + \frac{3}{t} = 0.$$
2. Résoudre cette dernière équation différentielle.
3. En déduire les solutions de (3).

Exercice 17. On considère l'équation différentielle (sur $]0, +\infty[$)

$$t^2x'' + tx' - x = \frac{1}{t}.$$

En utilisant le changement de variable $t = e^u$, trouver la solution satisfaisant $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

Exercice 18. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ soient bornées.

Exercice 19. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 20. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = e^x.$$

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER | **L3 Mathématiques**
HLMA602 | **Année 2020-2021**
Calcul différentiel et équations différentielles

Exercices du Chapitre 4 Partie III : Équations différentielles autonomes

Exercice 1. Soit $x_0 < 0$. Déterminer la solution maximale de l'équation logistique $x' = x(1-x)$ telle que $x(0) = x_0$. Est-elle globale ? Même question si $x_0 > 1$.

Exercice 2. Déterminer le domaine de définition du flot de l'équation autonome $x' = x^2$.

Exercice 3. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= x(x-\theta)(1-x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

où $0 < \theta < 1$ est fixé, et $0 \leq x_0 \leq 1$. Montrer que la solution du problème de Cauchy est globale, et déterminer son comportement quand $t \to \pm\infty$ suivant la valeur de x_0.

Exercice 4. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= x(1-x^\alpha) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

où $\alpha > 1$ est fixé, et $0 \leq x_0 \leq 1$. Montrer que la solution du problème de Cauchy est globale, et déterminer son comportement quand $t \to \pm\infty$.

Exercice 5. Soit A une matrice 3×3 réelle telle que $\det(A) = 0$. Montrer que toute solution de l'équation $x' = Ax$ est contenue dans un plan affine de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= -y(x^2+y^2) \\ y' &= x(x^2+y^2) \end{cases}$$

1. Dériver $x^2 + y^2$. En déduire que le champ de vecteur associé est complet.
2. Utiliser des coordonnées polaires pour résoudre le système. Quelles sont les orbites ?

Exercice 7. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= 2y \\ y' &= -2x - 4x^3 \end{cases}$$

Montrer que $x^2+y^2+x^4$ est une intégrale première. En déduire que le champ est complet et que les orbites sont périodiques.

Exercice 8. On considère le système différentiel proies-prédateurs

$$\begin{cases} x' &= ax - cxy \\ y' &= -by + dxy \end{cases}$$

dans l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$, où a, b, c et d sont des réels strictement positifs.

1. Quels sont les points d'équilibre ?
2. Trouver une intégrale première (chercher sous la forme $f(x) + g(y)$).
3. En déduire que le champ est complet et que les orbites sont périodiques.

Exercice 9. On considère l'équation différentielle du second ordre (dite du pendule simple)

$$x'' = -k \sin x$$

avec $k > 0$.

1. Transformer cette équation en une équation différentielle autonome du premier ordre dans $\mathbb{R}^2$.
2. Quels sont les points d'équilibre ?
3. Trouver une intégrale première (qu'on cherchera de la forme $f(x) + g(x')$).
4. En déduire que le champ est complet.
5. Déterminer les orbites, et déterminer la période des orbites périodiques sous forme d'une intégrale.

Exercice 10. On considère l'équation du pendule avec frottement

$$x'' = -k \sin x - ax'$$

avec $a > 0$ et $k > 0$.

1. Transformer cette équation en une équation différentielle autonome du premier ordre dans $\mathbb{R}^2$.
2. Trouver une fonction de Lyapunov pour le champ de vecteur associé (en s'inspirant de l'exo précédent).
3. En déduire que le champ est complet, et trouver les points d'équilibres asymptotiquement stables.