HLMA 602

Calcul différentiel et équations différentielles.

Thibaut Delcroix

Chapitre 1: Différentiabilité

Chapitre 2: Différentielles supérieures

Chapitre 3: Inversion locale

Théorème des fonctions implicites

Chapitre 4: Équations différentielles

Thm Cauchy Lipschitz

Contrôle des connaissances :

à confirmer : 1 CC mi semestre) sur table
1 CF fin semestre)

+ vrai contrôle continu

→ règle du max.

Moodle : notes / vidéos CM
feuilles de TD

Sujets années précédentes : site de Matthieu Alfaro.

---

thibaut.delcroix@umontpellier.fr cours / TD grp B
francois.fillastre@ _______ TD grp A

Si besoin : rdv 'en vrai' individuellement ou en petit groupes.

Chapitre 1 : Différentiabilité

On considère dans ce chapitre des fonctions $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(noté $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$).

<u>Définition</u> : Soit $a \in U$. On dit que f est <u>différentiable en a</u> s'il existe une fonction linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h) \quad \text{quand } h \to 0.$$

Rappels :

- Cette notation $o(h)$ signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ qui satisfait $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$, telle que : $f(a+h) - f(a) - L(h) = \|h\| \, \varepsilon(h)$.

- On utilise $\|\cdot\|$ pour noter la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$:

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Quand on utilisera d'autres normes, on prendra une notation différente.

- Par définition, $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ veut dire :

$$\forall \eta > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tq} \quad \|h\| < \delta \Rightarrow \|\varepsilon(h)\| < \eta.$$

- On se rappelle que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, donc la notation $o(h)$ ne dépend pas du choix de la norme euclidienne.

Exemples élémentaires

* Une fonction constante est différentiable en tout point.

* Une fonction linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en 0 :

$$L(h) = 0 + L(h) + 0$$
$$= L(0) + L(h) + o(h)$$

* Une fonction linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en tout $a \in \mathbb{R}^n$.

$$L(a+h) = L(a) + L(h) + \underbrace{0}_{o(h)}$$

Propriété (linéarité) : Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}^p$, $g : U \to \mathbb{R}^p$ toutes deux différentiables en $a \in U$, alors $\lambda f + g$ est différentiable en a.

Preuve : On écrit $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h)$

avec $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire,

$$g(a+h) = g(a) + M(h) + o(h)$$

avec $M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire

donc $(\lambda f + g)(a+h) = (\lambda f + g)(a) + \underbrace{(\lambda L + M)}_{\text{linéaire}}(h) + o(h)$

$\square$

Exemple : Une fonction affine (constante + linéaire) est différentiable en tout point.

Remarque : • Pour les fonctions affines, le terme en $o(h)$ dans la définition est identiquement nul.

• En général, on peut penser qu'une fonction est différentiable en a si elle ressemble, infinitésimalement près de a, à une fonction affine.
(la fonction affine $h \longmapsto f(a) + L(h)$).

Vous connaissiez déjà :
Une fonction f est continue en a si elle ressemble, infinitésimalement près de a, à une fonction constante.

$$f(a+h) = f(a) + o(1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(a+h) - f(a) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \quad .$$

Proposition : Une fonction différentiable en a est continue en a.

Preuve : Écrivons $f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\| \varepsilon(h)$

avec $\varepsilon : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ tq $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

On a alors

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \underbrace{\|h\| \varepsilon(h)}_{\|h\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \text{ et } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0}$$

Le fait que $L(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 = L(0)$ découle de la continuité des applications linéaires en dimension finie.

Donc $f(a+h) - f(a) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, donc f est continue en a.

$\square$

<u>Rappel</u> (continuité en 0 des appli. linéaires en dim finie) :

Notons $e_1, \dots, e_n$ la base standard de $\mathbb{R}^n$ et $h = h_1 e_1 + \dots + h_n e_n$. Alors

$$L(h) = L\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i L(e_i) \quad \text{par linéarité}$$

Donc $\|L(h)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |h_i| \, \|L(e_i)\|$ par inégalité triangulaire

$$|h_i| = \sqrt{h_i^2} \leqslant \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2} = \|h\|$$

$$\leqslant \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \|L(e_i)\|\right)}_{\text{constante fixée}} \|h\|$$

Donc $\lim_{h \to 0} L(h) = 0 = L(0)$.

<u>Question</u> (pour réviser) : continuité en $a \neq 0$ de L ?

<u>Attention</u> : Une application continue n'est, en général, pas différentiable.

<u>Exemple</u> : La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ n'est pas différentiable en 0.

(mais elle est continue en 0).

En effet, une fonction linéaire $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme $L(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

On a $f(x) - f(0) - L(x) = |x| - ax$

pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0) - L(x)}{|x|} = \begin{cases} 1 - a & \text{si } x > 0 \\ 1 + a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ceci admet une limite en 0 seulement si $a = 0$, et dans ce cas cette limite vaut 1.

Dans tous les cas, on <u>n'a pas</u> $\frac{f(x) - f(0) - L(x)}{|x|} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

donc on n'a pas $f(x) - f(0) - L(x) = o(x)$.

Lien avec la dérivabilité

Rappel: Supposons $n=1$ et $p=1$: $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

La fonction f est dérivable en $a \in U$ si

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ converge quand } \underset{\neq 0}{h} \to 0.$$

On note alors $f'(a)$ cette limite, la dérivée de f en a.

De manière équivalente :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \overbrace{o(h)}^{h\varepsilon(h)}$$

Par conséquent, f est dérivable ssi elle est différentiable, et dans ce cas, l'application linéaire dans la définition de la différentiabilité est $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto f'(a)h$.

Plus généralement : pour $n=1$, une fonction $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ est différentiable ssi

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ converge (dans } \mathbb{R}^p\text{) quand } \underset{\neq}{h} \to 0.$$

Sa limite est toujours notée $f'(a)$ $(\in \mathbb{R}^p)$ et l'application linéaire dans la définition de la différentiabilité est
$$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$$
$$h \mapsto h f'(a).$$

On voit ici que l'application linéaire L dans la définition de la différentiabilité est uniquement déterminée si $n=1$. On va voir que c'est pour n quelconque.

<u>Définition</u> : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$.
Si elle existe, on appelle <u>dérivée directionnelle de f en a suivant le vecteur v</u> la limite

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

On la note $D_v f(a)$.

<u>Remarque</u>: Si on note $V = \{t \in \mathbb{R} \,;\, a+tv \in U\}$

$$\text{et } g : V \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$t \longmapsto f(a+tv)$$

alors si elle existe, $D_v f(a) = g'(0)$.

<u>Exercice</u> : mq V est ouvert.

Proposition : Supposons que $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in U$, avec :

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

$$\left(L \text{ linéaire}, \ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \right)$$

Alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, f admet une dérivée directionnelle en a suivant le vecteur v, et

$$L(v) = D_v f(a).$$

Preuve : $$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \frac{L(tv) + \|tv\| \varepsilon(tv)}{t}$$

$$= L(v) + \underbrace{\frac{|t|}{t} \|v\|}_{\text{borné}} \underbrace{\varepsilon(tv)}_{\xrightarrow[t \to 0]{} 0}$$

$$\xrightarrow[t \to 0]{} L(v)$$

$\square$

Définition : Soit f une application différentiable en a. On appelle <u>différentielle de f en a</u> et on note df_a l'unique application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(h).$$

La proposition précédente donne : $df_a(v) = D_v f(a)$

<u>Attention</u>, il existe des fonctions qui admettent des dérivées directionnelles suivant tous les vecteurs, mais qui ne sont <u>pas</u> différentiables.

$\hookrightarrow$ cf exemple en TD

Retour sur les exemples précédents.

* si f est constante, alors $df_a = 0$ pour tout a.
* si f est linéaire, alors $df_a = f$ pour tout a.
* si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiables en $a \in U$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$d(\lambda f + g)_a = \lambda\, df_a + dg_a .$$

* pour une fonction $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ (cas $n=1$) différentiable en $a \in U$, on a

$$df_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p, \quad h \mapsto h f'(a) .$$

Dans l'autre sens, si on connait df_a, on retrouve $f'(a)$ par la relation : $\boxed{f'(a) = df_a(1)}$.

Rappels du 1er cours (+ petite correction)

U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\quad f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$

Defn : f est différentiable en $a \in U$, de différentielle df_a si

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \underbrace{o(h) \quad \text{quand } h \to 0}_{+\|h\| \varepsilon(h)}$$

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

$$\varepsilon : \underline{\underline{V}} \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$V = \{x - a \,;\, x \in U\} = -a + U$$

$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ diff en a	df_a
constante	0
linéaire	f
$\lambda f_1 + f_2$	$\lambda d(f_1)_a + d(f_2)_a$
$n = 1$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ $t \mapsto t f'(a)$ où $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

f diff en a $\Longrightarrow$ f continue en a

---

f diff en a $\Longrightarrow$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} df_a(v)$$

(en général, si cette limite existe, on la note $D_v f(a)$ "dérivée directionnelle de f en a suivant le vecteur v")

Aujourd'hui : outils pour calculer les différentielles.

+ exemples

$$f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + o(1)$$

$$f(a+h) = f(a) + h\, f'(a) + o(h)$$

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + |h|\,\varepsilon(h)$$

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{|h|} - f'(a)\,\frac{h}{|h|}$$

Différentiabilité par composantes

Rappel : Pour une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, on note $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$ en coordonnées dans $\mathbb{R}^p$.

On appelle les fonctions $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (pour $1 \leq i \leq p$) les fonctions composantes de f.

Proposition : Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in U$ si et seulement si chaque fonction composante $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en a.

De plus, on a dans ce cas

$$df_a = \left(d(f_1)_a, d(f_2)_a, \dots, d(f_p)_a \right)$$

<u>Preuve</u> : Supposons d'abord f diff en a :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\| \mathcal{E}(h) \qquad \lim_{h\to 0} \mathcal{E}(h) = 0$$

Notons $df_a = (L_1, \dots, L_p)$ les fonctions composantes de df_a.

et $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ ———————— $\mathcal{E}$.

Pour tout i, on a

$$f_i(a+h) = f_i(a) + L_i(h) + \|h\| \varepsilon_i(h)$$

avec L_i linéaire et $|\varepsilon_i(h)| \leqslant \|\mathcal{E}(h)\|$

donc $\lim_{h\to 0} \varepsilon_i(h) = 0$.

Donc f_i est différentiable en a et $d(f_i)_a = L_i$.

Réciproquement, supposons pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$,

$$f_i(a+h) = f_i(a) + d(f_i)_a(h) + \|h\| \varepsilon_i(h)$$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_i(h) = 0$

alors en notant $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, on a

$$\|\varepsilon(h)\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} |\varepsilon_i(h)| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

et $$f(a+h) = f(a) + \underbrace{\left(d(f_1)_a, \dots, d(f_p)_a\right)}_{\text{fonction linéaire}}(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

$\square$

<u>Exemple</u>: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (\cos x, \sin x)$ est différentiable partout car cos et sin sont dérivables partout.

On a $f'(x) = (-\sin x, \cos x)$

Par exemple en 0, la relation de différentiabilité s'écrit :

$$f(h) = (1,0) + (0,h) + o(h).$$

Dérivées partielles et matrices jacobiennes

Ce n'est pas toujours facile d'écrire le calcul d'une différentielle d'une fonction explicite. C'est souvent plus simple de travailler dans les bases standards de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, et écrire la matrice de l'application linéaire df_a dans ces bases.

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base standard de $\mathbb{R}^n$ et $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées d'un point $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{R}^n$

<u>Définition</u> : Si f admet une dérivée directionnelle en a suivant le vecteur e_i, on la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ $(:= D_{e_i} f(a))$ et on l'appelle <u>dérivée partielle de f en a selon la variable x_i</u>.

De manière plus directe : pour $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$a \in U$, on note $V_i := \{ t \in \mathbb{R} \,;\, (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \in U \}$

$\shortparallel$

$(a_1, \dots, a_n)$

(c'est un ouvert de $\mathbb{R}$)

et on note $g_i : V_i \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$t \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$

alors $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = g_i'(a_i)$$

"on dérive l'application partielle d'une seule variable obtenue en fixant toutes les variables sauf x_i".

<u>Attention</u> (encore) : Une fonction peut admettre des dérivées partielles selon chaque variable $x_1, \dots, x_n$, mais ne pas admettre de dérivées directionnelles suivant certains vecteurs. A fortiori, une telle fonction n'est pas différentiable. exemple en TD

Définition : Soit $f=(f_1,\dots,f_p) : U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction qui admet des dérivées partielles en $a\in U$ selon chaque variable $x_1,\dots,x_n$. On appelle *matrice jacobienne* de f en a la matrice $Df(a)$ dont les coefficients sont les

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$$

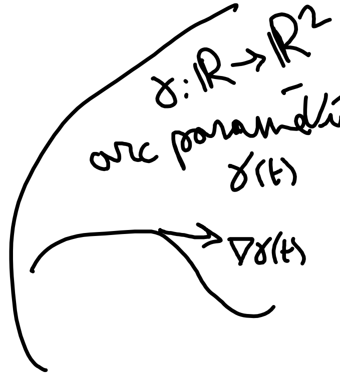
(c'est une matrice à p lignes et n colonnes).

Exemple : $f=(f_1,f_2) : U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,

$$Df(a)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a)\\[2mm] \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a)\end{pmatrix}$$

Définition : Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, on appelle gradient de f en a, et on note $\nabla f(a)$ la transposée de la matrice jacobienne de f en a (si elle existe).

$$\nabla f(a) = \left(Df(a)\right)^{T}.$$



Exemple : $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \end{pmatrix}$$

Proposition : Soit $f = (f_1, \dots, f_p) : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ diff en $a \in U$.
Alors on a, pour $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\underbrace{df_a(v)}_{\text{différentielle appliquée en } v} = \underbrace{D_v f(a)}_{\text{dérivée directionnelle suivant le vecteur } v} = \underbrace{(Df(a))\, v}_{\text{produit de matrice : matrice jacobienne} \times \text{vecteur colonne } v}$$

Preuve : La première égalité a déjà été vue, et df_a a pour matrice $Df(a)$ dans les bases standards de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, d'où la deuxième égalité. $\square$

La règle de composition

("chain rule" en anglais)

<u>Proposition</u>: Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \overset{\text{ouvert}}{V} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ tq $f(U) \subset V$

(de sorte que la composée $g \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ soit bien définie)

Si f est différentiable en $a \in U$ et g est différentiable en $f(a) \in V$, alors $g \circ f$ est différentiable en a,

et

$$\boxed{d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a}$$

Preuve : Écrivons

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\| \varepsilon(h) \qquad \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$g(f(a)+x) = g(f(a)) + dg_{f(a)}(x) + \|x\| y(x) \qquad y(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Alors :

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(a+h) &= g(f(a+h)) \\
&= g(f(a) + \underbrace{df_a(h) + \|h\| \varepsilon(h)}_{=:\,x}) \\
&= g(f(a)) + dg_{f(a)}(x) + \|x\| y(x) \\
&= g(f(a)) + \underbrace{dg_{f(a)}(df_a(h))}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{dg_{f(a)}(\|h\|\varepsilon(h)) + \|x\| y(x)}_{\text{on veut mq c'est un } o(h)}
\end{aligned}$$

$$dg_{f(a)}(\|h\|\varepsilon(h)) + \|x\| y(x)$$

$$= \|h\| dg_{f(a)}(\varepsilon(h)) + \|df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)\| \, y(x)$$

$$= \|h\| \Big(\underbrace{dg_{f(a)}(\varepsilon(h))}_{\substack{\varepsilon(h)\to 0 \\ \text{donc par linéarité} \\ \to 0}} + \underbrace{\Big\|df_a\Big(\frac{h}{\|h\|}\Big) + \varepsilon(h)\Big\|}_{\text{borné près de } 0} \underbrace{y(\underbrace{df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0})}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0 \text{ par composition}} \Big)$$

$$= o(h)$$

$\square$

Remarque pour la culture : en dimension infinie, dans la définition de différentiabilité,

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h)$$

on impose que L soit une appli linéaire continue.

Autre formulation de la règle de composition.

Sous les hypothèses de la règle de composition, on a

$$\boxed{D(g\circ f)(a) = \big(Dg(f(a))\big)\big(Df(a)\big)}$$

produit des matrices jacobiennes.

Pour les dérivées partielles, on a :

$$\boxed{\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a))\, \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)} \qquad \begin{array}{l} 1\leq i\leq q \\ 1\leq j\leq n \end{array}$$

où on note $(y_1,\dots,y_p)$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^p$

$$U\subset\mathbb{R}^n \xrightarrow{\ f\ } V\subset\mathbb{R}^p \xrightarrow{\ g\ } \mathbb{R}^q$$

Cas particuliers :

* si $n=1$, $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

  alors on a :

$$(g\circ f)'(a) = dg_{f(a)}\big(f'(a)\big)$$

* si $n=1$ et $p=1$, on a

$$(g\circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a))$$

Corollaire (différentielle de l'inverse d'une fonction) :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 1/x$

On suppose que f est diff en $a \in U$ et que $f(U) \subset \mathbb{R}^*$. Alors la fonction $g \circ f = \frac{1}{f} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en a, et sa différentielle est :

$$\boxed{d\left(\frac{1}{f}\right)_a = -\frac{df_a}{f(a)^2}}.$$

Preuve : $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$ or $g'(x) = \frac{-1}{x^2} = dg_x(1)$ $\square$

Info importante groupe B :

TD HLMA602 de demain 9h45-11h15

échangé avec

TD HLMA603 de vendredi 8h-9h30

Fonctionnement des TD à partir de la semaine prochaine :

- un seul TD d'1h30 sur Zoom, le vendredi 8h-9h30 pour chaque groupe

- l'autre créneau de 1h30, le mardi est réservé dans l'emploi du temps pour préparer 1 à 3 exercices donnés à l'avance, les rédiger et les déposer sur Moodle dans l'activité devoir dédiée.

Attention : tout le monde envoie son travail, chaque semaine !

Il y aura ensuite un corrigé sur Moodle, et quelques commentaires sur les erreurs fréquentes.

Evaluation :

Les exercices rendus seront évalués et entreront dans la note finale de controle continu sur 4 points :
1 point régularité et ponctualité
1 point rédaction mathématique précise
2 points contenu mathématique pertinent

Attention : l'évaluation se fera sur quelques exercices pris au hasard, pas sur la totalité. La régularité est très importante.

MCC sur la page Moodle !

Rappels :

"Une fonction est différentiable ssi ses composantes le sont"

$$f = (f_1, \dots, f_p) : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

"matrice jacobienne"

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t}$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ base standard de $\mathbb{R}^n$.

"dérivées partielles"

Si f différentiable en a, et $v \in \mathbb{R}^n$

$$df_a(v) = \left(Df(a)\right)v = D_v f(a)$$

Règle de composition :

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

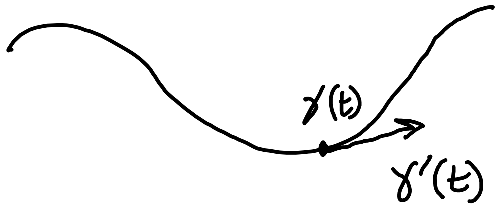
$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

Inverse : $$d\left(\frac{1}{f}\right)_a = -\frac{df_a}{f(a)^2}$$

Retour sur gradient et dérivée

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ arc paramétré



sous des hypothèses de régularité, $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^p$, s'il est $\neq 0$, est un vecteur directeur de la tangente en $\gamma(t)$ à $\gamma(I)$.

Rem : $\gamma'(t) = D\gamma(t)$.

Gradient : $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$.

$\hookrightarrow$ defn : $\nabla f(a) = Df(a)^T$

Si $df_a \neq 0$, alors par thm du rang, son noyau est de dimension $n-1$.

Alors $\nabla f(a) \neq 0$ engendre une droite de $\mathbb{R}^n$ supplémentaire à $\mathrm{Ker}(df_a)$:

en effet $df_a(\nabla f(a)) = Df(a) \cdot \nabla f(a)$

$$= (\nabla f(a))^T \nabla f(a)$$

$$= \|\nabla f(a)\|^2 > 0$$

Mieux : • $\nabla f(a)$ engendre la droite supplémentaire <u>orthogonale</u> à $\mathrm{Ker}(df_a)$:

si $v \in \mathrm{Ker}(df_a)$, alors $0 = df_a(v) = \nabla f(a)^T \cdot v$

(produit scalaire de $\nabla f(a)$ avec v)

- $\nabla f(a)$ donne la direction dans laquelle les dérivées directionnelles sont les plus grandes :

$\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\quad D_v f(a) = (Df(a))\, v$

$$= \nabla f(a)^T v$$

$$\leq \|\nabla f(a)\| \, \|v\| \quad \text{par Cauchy-Schwarz}$$

avec égalité ssi $v = \lambda \nabla f(a)$, $\lambda \geq 0$.

(on a donc aussi : $\underbrace{|||Df(a)|||}_{\text{norme triple par rapport à la norme euclidienne.}} = \|\nabla f(a)\|$

$$= \sup_{v \neq 0} \frac{|Df(a) \cdot v|}{\|v\|}$$

- " $\nabla f(a)$ est orthogonal à l'ensemble de niveau $f^{-1}(f(a))$ de f ".

Par ex : si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\underbrace{\text{diff en } \underset{\mathbb{R}}{\underset{\text{⫛}}{s}} \text{ tq } \gamma(s) = a \text{ et } (f \circ \gamma)(t) = f(a) \;\; \forall t \in \mathbb{R}}_{\text{hypothèses sur } \gamma}$

alors $\gamma'(s) \perp \nabla f(a)$.

En effet, $(f \circ \gamma)'(s) = 0$ car $f \circ \gamma$ constante

$$\begin{aligned}
(f \circ \gamma)'(s) &= 0 \\
\shortparallel \quad & \\
df_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) & \\
\shortparallel \quad & \\
\nabla f(a)^{\perp} \gamma'(s) &
\end{aligned}$$

Différentiabilité des applications bilinéaires

$B : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une application bilinéaire si $\forall x, y \in \mathbb{R}^q$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^r$, $\forall t \in \mathbb{R}$, on a

$$B(tx + y, v) = t B(x, v) + B(y, v)$$

$$B(x, tv + w) = t B(x, v) + B(x, w).$$

<u>Lemme</u>: Soit $B : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application bilinéaire. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$\forall x \in \mathbb{R}^q$, $\forall v \in \mathbb{R}^r$,

$$\|B(x, v)\| \leqslant C \, \|x\| \cdot \|v\|.$$

<u>Exercice</u> : En déduire la continuité des applications bilinéaires (en dimension finie).

Preuve du lemme : Notons $(e_1, \dots, e_q)$ la base standard de $\mathbb{R}^q$

et $(f_1, \dots, f_r)$ la base standard de $\mathbb{R}^r$.

Notons $x = (x_1, \dots, x_q) = x_1 e_1 + \dots + x_q e_q$

$v = (v_1, \dots, v_r) = v_1 f_1 + \dots + v_r f_r$.

Alors on a

$$B(x, v) = B\left(\sum_{i=1}^{q} x_i e_i , \sum_{j=1}^{r} v_j f_j\right)$$

par bilinéarité

$$= \sum_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq r}} x_i v_j B(e_i, f_j)$$

donc $\|B(x,v)\| \leq \sum_{i,j} |x_i| |v_j| \, \|B(e_i, f_j)\|$ par inégalité triangulaire

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{i,j} \|B(e_i, f_j)\|\right)}_{\text{constante } C} \|x\| \cdot \|v\|$$

car $|x_i| \leq \|x\| \ \forall i$

$|v_j| \leq \|v\| \ \forall j$

$\square$

Proposition : Soit $B : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^p$ bilinéaire, et $a = (x,v) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$.

Alors B est différentiable en a, et pour tout $h = (y,w) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$, on a

$$dB_a(h) = dB_{(x,v)}(y,w) = B(y,v) + B(x,w).$$

__Preuve :__ $B(a+h) = B(x+y, v+w)$

$$= \underbrace{B(x,v)}_{B(a)} + \underbrace{B(y,v) + B(x,w)} + \underbrace{B(y,w)}$$

L'application $(y,w) \longmapsto B(y,v) + B(x,w)$ est __linéaire__.

On veut montrer que $B(y,w) = o(y,w)$

Pour ça, on utilise le lemme :

pour $(y,w) \neq (0,0)$,

$$\left\| \frac{B(y,w)}{\|(y,w)\|} \right\| \leqslant \frac{C\,\|y\|\cdot\|w\|}{\|(y,w)\|}$$

$\|y\| \leq \|(y,w)\|$

$\sqrt{y_1^2+\dots+y_q^2} \leq \sqrt{y_1^2+\dots+y_q^2+w_1^2+\dots+w_r^2}$

$$\leqslant \underbrace{C\,\|w\|}_{} \xrightarrow[(y,w)\to(0,0)]{} 0$$

donc $\dfrac{B(y,w)}{\|(y,w)\|} \xrightarrow[(y,w)\to(0,0)]{} 0$

$\square$

<u>Exercice</u> (de rédaction surtout) : Montrer qu'une application multilinéaire est différentiable partout, et calculer sa différentielle.

Corollaire : Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables en $a \in U$. Alors le produit fg est différentiable en a, et sa différentielle est :

$$\boxed{d(fg)_a = f(a)\, dg_a + g(a)\, df_a}.$$

Preuve : On applique la règle de composition à la composée de

$$\begin{aligned} U \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

différentiable en a (composantes)

et

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto vw \end{aligned}$$

(bilinéaire)

$\square$

Différentiabilité des fonctions rationnelles

Définition :

- On appelle <u>monômes</u> les fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ avec $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$.
- On appelle <u>polynômes</u> les fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont des combinaisons linéaires de monômes.
- On appelle <u>fraction rationnelle</u> une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ obtenue comme quotient de deux polynômes $f = \frac{P}{Q}$ avec $U \subset Q^{-1}(\mathbb{R}^*)$.
- Enfin, on appelle <u>fonction rationnelle</u> une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ dont chaque composante est une fraction rationnelle.

<u>Proposition</u> : Toute fonction rationnelle est différentiable en tout point de son ensemble de définition.

<u>Preuve</u> : Les projections $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ sont différentiables partout car elles sont <u>linéaires</u>.

Les monômes sont obtenus par produits successifs avec des projections, donc sont différentiables partout.

Les polynômes sont des CBL de monômes donc diff partout.

L'inverse d'un polynôme Q est différentiable sur $Q^{-1}(\mathbb{R}^*)$.

Par produit, les fractions rationnelles sont diff. là où elles sont définies.

Par différentiabilité composantes par composantes, on obtient le résultat.

$\square$

prochaine fois :

→ Exo 12 corrigé en cours

puis inégalité des accroissements finis.

Rappel du cours précédent

- Les applications bilinéaires sont différentiables.
- Les fonctions rationnelles sont différentiables.

Exercice corrigé : prolongements de fonctions rationnelles

(du même type que l'exercice 12 du TD).

On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Cette fonction admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
est-elle différentiable en $(0,0)$?

Mêmes questions pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Réponse</u> :

On a $g(x,0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$.

De même,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 .$$

Dans les deux cas, si la fonction est différentiable en $(0,0)$, alors sa différentielle est nulle (car tous les coeff de la matrice jacobienne sont nuls).

La fonction f est différentiable en $(0,0)$:

il suffit de montrer que

$$\underbrace{f(x,y) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y\right)}_{= f(x,y) \text{ par les calculs précédents}} = o(x,y)$$

Donc on considère, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{x^2y^2}{\|(x,y)\|(x^2+y^2)} = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$x^2 \leqslant x^2+y^2$

$y^2 \leqslant x^2+y^2$

$$\leqslant \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

//

La fonction g n'est pas continue en $(0,0)$ (donc pas différentiable en $(0,0)$) :

on a $\quad g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$ pour tout n

donc $\quad \lim\limits_{n \to \infty} g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq g(0,0)$

ce qui contredit la continuité.

$$\frac{g(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$ ne tend pas vers 0 :
quand $(x,y) \longrightarrow (0,0)$

en prenant la suite $(x,y) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$$\frac{g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\|} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\left(2\frac{1}{n^2}\right)^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2}}\, n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

Inégalité des accroissements finis

Rappel : Soit $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle. On suppose que I est un intervalle ouvert, et que φ est dérivable sur I.

Alors :

Égalité des accroissements finis :

$$\forall x < y \in I, \ \exists t \in]x, y[\ \text{tq} \ \varphi(y) - \varphi(x) = \varphi'(t)(y - x)$$

Inégalité des accroissements finis :

Si $\exists k \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall t \in I$, $|\varphi'(t)| \leq k$, alors :

$$\forall x, y \in I, \quad |\varphi(y) - \varphi(x)| \leq k\,|y - x|.$$

⚠ L'égalité ne se généralise pas bien aux fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Par exemple
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

est différentiable sur $\mathbb{R}$, satisfait $f(0) = f(2\pi)$,

mais $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$ ne s'annule jamais.

On va généraliser l'inégalité.

<u>Définitions</u> : • Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite différentiable sur U si elle est différentiable en tout $a \in U$.

• Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est dite <u>convexe</u> si

$$\forall x, y \in A,\ \forall t \in [0,1],\quad (1-t)y + tx \in A.$$

(on appelle l'ensemble $[x,y]$ de ces points le segment entre x et y)

Soient (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux espaces vectoriels normés de dimension finie.

Alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ des appli linéaires de E_1 dans E_2 est muni d'une norme $|||\varphi||| := \sup\limits_{\substack{v \in E_1 \\ \neq 0}} \dfrac{N_2(\varphi(v))}{N_1(v)}$ appelée norme triple par rapport à N_1 et N_2.

Théorème (Inégalité des accroissements finis) :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable sur un ouvert convexe U. On suppose $\exists k \in \mathbb{R}_+$ tq $|||df_a||| \leq k$ pour tout $a \in U$, où $|||\cdot|||$ est la norme triple sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ par rapport aux normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Alors pour tout $x, y \in U$:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq k \|y - x\| .$$

⚠ Attention : si on veut utiliser l'IAF pour d'autres normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, il faut considérer dans les hypothèses la norme triple <u>par rapport à ces normes</u>.

Avant de prouver le thm général, on commence par le cas $n=1$.

<u>Lemme</u> : Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable sur l'<u>intervalle</u> ouvert I. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tq $\|f'(t)\| \leq k$ pour tout $t \in I$. Alors

$$\forall x, y \in I, \qquad \|f(y) - f(x)\| \leq k\,|y - x|.$$

<u>Preuve du Lemme</u> : Prenons $x < y$ dans I.

Soit $\varepsilon > 0$, on considère l'ensemble

$$\mathcal{O} = \{t \in [x,y]\ ;\ \|f(t) - f(x)\| > (k+\varepsilon)(t-x) + \varepsilon\}$$

On va montrer que cet ensemble est vide.

La fonction $\varphi : \begin{array}{l} [x,y] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \|f(t) - f(x)\| - (k+\varepsilon)(t-x) \end{array}$

est continue par composition.

Donc $\mathcal{O} = \varphi^{-1}(]\varepsilon, +\infty[)$ est un ouvert de $[x,y]$.

Supposons par l'absurde que $\mathcal{O} \neq \emptyset$, et notons $s = \inf \mathcal{O}$ sa borne inférieure.

Par continuité de φ, comme $\varphi(x) = 0$, $s > x$ de plus, $\varphi(s) = \varepsilon$.

(car $s \in \overline{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O}$ car $\mathcal{O}$ ouvert)

Par différentiabilité de f en s, on a :

$$\exists \eta > 0 \text{ tq } \forall t \in]s, s+\eta[, \quad \frac{\|f(t) - f(s)\|}{t-s} \leqslant \|f'(t)\| + \varepsilon$$

Or $\|f'(t)\| \leq k$, donc

$$\forall t \in]s, s+\eta[, \quad \|f(t) - f(s)\| \leqslant (k+\varepsilon)(t-s)$$

Par inégalité triangulaire, $\forall t \in]s, s+y[$

$$\|f(t) - f(x)\| \leqslant \|f(t) - f(s)\| + \|f(s) - f(x)\|$$

$$\leqslant (k+\varepsilon)(t-s) + (k+\varepsilon)(s-x) + \varepsilon$$

$$\leqslant (k+\varepsilon)(t-x) + \varepsilon$$

Donc $]s, s+y[\cap \mathcal{O}$ est vide.

Ceci contredit le fait que $s = \inf \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}$ ouvert.

Donc <u>$\mathcal{O}$ est vide</u>.

Donc $\forall t \in [x,y]$, $\|f(t) - f(x)\| \leqslant (k+\varepsilon)(t-x) + \varepsilon$

en particulier, $\|f(y) - f(x)\| \leqslant (k+\varepsilon)(y-x) + \varepsilon$.

C'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc

$$\|f(y) - f(x)\| \leqslant k(y-x).$$

$\square$

Preuve du Théorème :

Soit $x, y \in U$. On considère la fonction d'une variable réelle

$$g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$t \longmapsto f(x + t(y-x))$$

où $I = \{t \in \mathbb{R} \,;\, x + t(y-x) \in U\}$

intervalle ouvert contenant $[0,1]$

car U ouvert convexe.

Par règle de composition, g est dérivable, de dérivée

$$g'(t) = df_{(x+t(y-x))}(y-x)$$

On a donc
$$\|g'(t)\| \leqslant |||df_{(x+t(y-x))}||| \, \|y-x\|$$
$$\leqslant k\,\|y-x\| \qquad \forall t \in I$$

Par le lemme précédent appliqué à g,

$$\underbrace{\|g(1) - g(0)\|}_{= \|f(y) - f(x)\|} \leqslant k\|y-x\|$$

$\square$

Application :

Théorème : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable sur un ouvert CONNEXE U. On suppose que pour tout $a \in U$, $df_a = 0$. Alors f est constante sur U.

Preuve la prochaine fois

On verra ensuite :

<u>Définition</u> : $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe C^1 (continûment différentiable) si l'application

$$df : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$
$$a \longmapsto df_a$$

existe et est continue.

<u>Théorème</u> : Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe C^1 si et seulement si chacune des dérivées partielles de ses composantes

$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ existent et sont <u>continues</u>.

Dernier cours

<u>Théorème</u> (Inégalité des accroissements finis) :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable sur U, avec U ouvert CONVEXE. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tq $|||df_a||| \leqslant k$ pour tout $a \in U$ (où $|||\cdot|||$ est la norme triple sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ relative aux normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$). Alors pour tout $x, y \in U$,

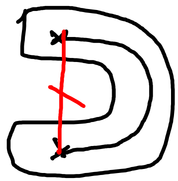
$$\| f(y) - f(x) \| \leqslant k \, \| y - x \| .$$

Fonctions de différentielle nulle sur un ouvert connexe

<u>Théorème</u> : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable sur U, avec U ouvert CON<u>N</u>EXE. On suppose que $df_a = 0$ pour tout $a \in U$. Alors f est constante sur U.

Si U ouvert CON<u>V</u>EXE, alors le théorème est un corollaire direct de l'inégalité des accroissements finis.

Mais CONNEXE $\not\Longrightarrow$ CONVEXE



$\subset \mathbb{R}^2$

<u>Rappel</u> : U CONNEXE $\Longleftrightarrow$ les seules parties ouvertes et fermées de U sont $\emptyset$ et U.
(de topologie)

Preuve : Soit $z \in U$ fixé. On veut montrer que $\forall x \in U$, $f(x) = f(z)$. C'est-à-dire $U = f^{-1}(f(z))$.

On a ① $f^{-1}(f(z)) \neq \emptyset$ car $z \in f^{-1}(f(z))$.

② $f^{-1}(f(z))$ est fermé car f diff donc f continue.

③ Montrons que $f^{-1}(f(z))$ est ouvert :

boule euclidienne ouverte

Soit $x \in f^{-1}(f(z))$ et $r > 0$ tq $\mathring{B}(x,r) \subset U$

(existe car U est ouvert)

Comme $\mathring{B}(x,r)$ est CONVEXE, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à $f|_{\mathring{B}(x,r)}$ avec $k=0$, pour avoir $f(y) = f(x) = f(z)$ pour tout $y \in \mathring{B}(x,r)$.

C'est-à-dire $\mathring{B}(x,r) \subset f^{-1}(f(z))$. cqfd.

Comme U est connexe, ① + ② + ③ $\Rightarrow f^{-1}(f(z)) = U$ $\square$

Fonctions continûment différentiables

<u>Définition</u> : Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de <u>classe C^1</u> (ou continûment différentiable) si elle admet des dérivées partielles en tout point de U, et les n applications $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ sont continues.

<u>Théorème</u> : Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 est différentiable sur U.

<u>Remarque</u> : D'après le théorème et la continuité composantes par composantes, f est de classe C^1 ssi l'application
$$df : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$
$$a \longmapsto df_a$$
est bien définie et continue.

<u>Preuve</u> : On montre le résultat par récurrence sur n (le nombre de variables).

Pour $n=1$, le thm est vrai car $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ est différentiable ssi elle est dérivable (cf 1ère semaine).

Supposons que le résultat est vrai pour toute fonction de n variables.

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^1.

Soit $a = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in U$, et $h = (h_1, \dots, h_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ assez petit.

On a :

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i =$$

$$f(a+h) \underbrace{- f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n, a_{n+1})} - h_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(a) \qquad (1)$$

$$\underbrace{+ f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n, a_{n+1})} - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i \qquad (2)$$

Par hypothèse de récurrence appliquée à la fonction

$$g : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n, a_{n+1})$$

(où $V = \{(x_1, \dots, x_n) \,;\, (x_1, \dots, x_n, a_{n+1}) \in U\}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$)

on a g diff en $(a_1, \dots, a_n)$, c'est-à-dire

$$2 = o((h_1, \dots, h_n))$$

Pour le terme 1 : on fixe $(h_1, \dots, h_n)$, et on considère la fonction d'une variable réelle

$$\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$t \longmapsto f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n, t) - (t - a_{n+1}) \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(a)$$

Cette fonction φ est dérivable (car $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}$ existe), de dérivée

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n, t) - \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(a)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}$ est continue, il existe $\eta > 0$ tq

$$\|x-a\| \leq \eta \implies \left\| \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(a) \right\| \leq \varepsilon.$$

Donc si h est tel que $\|h\| < \eta$, on a

$$\|\varphi'(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{pour } t \in [a_{n+1}, a_{n+1}+h_{n+1}].$$

Par théorème des accroissements finis appliqué à φ, on a :

$$\|\varphi\| = \|\varphi(a_{n+1}+h_{n+1}) - \varphi(a_{n+1})\| \leq \varepsilon |h_{n+1}|$$

Cela revient à dire que $\textcircled{1} = o(|h_{n+1}|)$.

Finalement, comme $|h_{n+1}| \leqslant \|h\|$

$$\|(h_1, \dots, h_n)\| \leqslant \|h\|,$$

on a $\textcircled{1} = o(h)$ donc $\textcircled{1} + \textcircled{2} = o(h)$

$\textcircled{2} = o(h)$

Ce qui prouve la différentiabilité de f en a. $\square$

Quelques EDP simples

(EDP = équations aux dérivées partielles)

Exemple 0 : L'EDP : $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$

d'inconnue $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ avec U CONNEXE.

Les solutions de cette EDP sont les fonctions f dont les dérivées partielles existent en tout point et sont nulles en tout point.

D'après ce qu'on a vu, une telle fonction est C^1 (ses dérivées partielles sont constantes, donc continues) donc différentiable. De plus sa différentielle s'annule ($\Leftrightarrow$ sa jacobienne s'annule) donc f est une fonction constante sur U.

En résumé : solutions = fonctions constantes.

<u>Exemple 1</u> : L'EDP $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \ \frac{\partial f}{\partial x_j} = v_j$

d'inconnue $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ avec U connexe et $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^p$ fixés.

Soit $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases standards a pour colonnes $(v_1, \dots, v_n)$.

Alors la fonction $g := f - L$ satisfait l'EDP0 si f satisfait l'EDP1, donc dans ce cas g est constante égale à $c \in \mathbb{R}^p$.

Solutions à l'EDP1 $=$ fonctions affines de partie linéaire égale à L.

<u>Exemple</u> 2 : Plus généralement, si $g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction C^1 sur U ouvert connexe, alors l'EDP $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial g}{\partial x_j}$ $\forall j$ d'inconnue $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ admet pour seules solutions les fonctions $g + C$ avec $C \in \mathbb{R}^p$.

(Considérer $f - g$, qui satisfait l'EDP 0).

Exemple 3 : Soit $1 \leq q < n$. on suppose U convexe.

alors les solutions $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de l'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_q} = 0 \end{cases}$$

sont exactement les fonctions

qui satisfont $f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_q, x_{q+1}, \dots, x_n)$

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in U$ et $(y_1, \dots, y_q, x_{q+1}, \dots, x_n) \in U$.

(c-à-d. f ne dépend pas des variables $x_1, \dots, x_q$).

En effet, si f solution, pour tout $(x_{q+1}, \dots, x_n)$ fixé,

la fonction

$$g : (x_1, \dots, x_q) \longmapsto f(x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_n)$$

a toutes dérivées partielles nulles sur son ensemble de définition $\{(x_1, \dots, x_q) \; ; \; (x_1, \dots, x_n) \in U\}$

qui est (ouvert et) convexe, donc connexe.

On peut appliquer l'exemple 0 à g et conclure.

⚠ aux hypothèses sur l'ensemble de définition

⚠ ici, on ne peut rien dire a priori sur la différentiabilité des solutions f.

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$df_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q \qquad \overset{\text{ra}}{f(U)} \subset V$$

$$dg_{f(a)} : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

$$g \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

$$d(g \circ f)_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

$$dg_{f(a)} \circ df_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

$h \in \mathbb{R}^n$

$$\left(dg_{f(a)} \circ df_a \right)(h) = dg_{f(a)}\left(df_a(h) \right)$$

$$\cancel{dg_{f(a)}(h) \cdot df_a(h)}$$

$$\text{EDP0}\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n, \\ \text{d'inconnue } \quad f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ \text{avec } \quad U \text{ ouvert connexe} \end{cases}$$

Les seules solutions sont les fonctions constantes.

$$\text{EDP3}\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq q \\ \text{d'inconnue } \quad f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \qquad (q < n) \\ \text{avec } \quad U \text{ ouvert convexe} \end{cases}$$

Les seules solutions sont les fonctions qui ne dépendent <u>pas</u> des q premières variables.

Avec la règle de composition on peut parfois se ramener à ces cas simples.

<u>Exemple 4</u> : Considérons

$$\circledast \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \qquad \text{pour } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

d'inconnue $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Supposons f différentiable pour appliquer la règle de composition sans se poser de questions.

Considérons l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (bijection linéaire)

$$(u,v) \longmapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

et $F = f \circ \varphi$.

Alors on a $F(u,v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$, F est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(\text{——}) - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(\text{——}).$$

On voit que $\circledast \iff \frac{\partial F}{\partial u} = 0$ partout

$\iff$ F(u,v) ne dépend pas de u)

$\iff F(u,v) = F(0,v)$

$\iff f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = f\left(\frac{v}{2}, -\frac{v}{2}\right)$

Notons que $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$$

(donc (*) $\Leftrightarrow$ $f(x,y)$ ne dépend que de $x-y$ et pas de $x+y$.

Autrement dit, il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $f(x,y) = g(x-y)$.

$F = f \circ \varphi$

$f = F \circ \varphi^{-1}$ $\qquad\qquad f(x,y) = F(x+y, x-y)$

On verra aussi en TD comment utiliser le "passage en polaire".

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{différentiable}$$

$$\varphi : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$
$$(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

et $F = f \circ \varphi$

Alors on a (exercice) :

$f(x,y)$ ne dépend que de la norme $\|(x,y)\| \iff \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = 0$

——— de l'angle θ défini par (x,y) (en coord polaires) $\iff \dfrac{\partial F}{\partial r} = 0$

Points critiques d'une fonction différentielle, et extrema

Ici on se place dans le cas où $p=1$.

Définition: Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

- On appelle point critique de f tout point $a \in U$ tel que $df_a = 0$.
- On dit que $a \in U$ est un maximum local de f
  minimum

  s'il existe un voisinage V de a dans U tq $\forall x \in V$, $f(x) \leq f(a)$.
  $\geq$

(Alors a est un maximum (global) de $f|_V$)

Remarque: Si a est un minimum de f, alors a est un maximum de $-f$.

Proposition : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. On suppose que a est un maximum de f, alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $D_v f(a) = 0$ (si cette dérivée directionnelle existe).

Preuve : Par définition

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \quad \text{(si elle existe)}$$

Par hypothèse, $f(a+tv) \leq f(a)$, donc

$$D_v f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

≤ 0 par passage à la limite.

De même, $$D_v f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ <}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

$$\geqslant 0$$

Donc $D_v f(a) = 0$.

$\square$

<u>Corollaire</u> : Si f est différentiable sur U, et admet un maximum en $a \in U$, alors a est un point critique de f.

(De même pour les minimums)

⚠ Un point critique n'est pas forcément un maximum ou un minimum.

(ex : $x \longmapsto x^2$ 0 est un minimum

$x \longmapsto x^3$ 0 est point critique, ni minimum, ni maximum local)

Pour aller plus loin sur les extrema :

DL plus précis

$\Longrightarrow$ différentielles supérieures

FIN DU CHAPITRE 1.

Chapitre 2 : Différentielles supérieures

Rappels : Dérivées secondes et extrema locaux

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ouvert) est dite deux fois dérivable en $t \in I$ si :

f est dérivable sur un voisinage de t, et

f' est dérivable en t.

On note alors $f''(t)$ et on appelle dérivée seconde de f en t la quantité :

$$f''(t) := (f')'(t) = \lim_{s \to 0} \frac{f'(t+s) - f'(t)}{s}.$$

Formule de Taylor-Young (à l'ordre 2) :

$$f(s) = f(t) + (s-t)f'(t) + (s-t)^2\frac{f''(t)}{2} + o((s-t)^2)$$

c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ avec $\varepsilon(s) \xrightarrow[s \to t]{} 0$ tq

$$f(s) = f(t) + (s-t)f'(t) + (s-t)^2\frac{f''(t)}{2} + (s-t)^2\,\varepsilon(s).$$

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supposée deux fois dérivable en $t \in I$.

Proposition 1 : Si t est un minimum local de f, alors $f'(t) = 0$ et $f''(t) \geq 0$.

Proposition 2 : Si $f'(t) = 0$ et $f''(t) > 0$, alors f admet un minimum local en t.

Preuve de la prop 1 : $f'(t) = 0$ déjà vu aujourd'hui

Par Taylor Young, $f(s) = f(t) + 0 + (s-t)^2 \frac{f''(t)}{2} + (s-t)^2 \varepsilon(s)$

avec $\lim_{s \to t} \varepsilon(s) = 0$. C'est-à-dire :

$$f''(t) = \lim_{s \to t} \frac{2(f(s) - f(t))}{(s-t)^2}.$$

Or pour s dans un voisinage de t, $f(s) \geqslant f(t)$.

donc $\frac{2(f(s)-f(t))}{(s-t)^2} \geqslant 0$. Donc $f''(t) \geqslant 0$ par passage à la limite.

$\square$

Preuve de la prop 2 : On suppose $f'(t) = 0$ et $f''(t) > 0$. Par Taylor Young (en utilisant cette fois la définition quantitative de $o((s-t)^2)$), on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tq } \forall s, \ |s-t| < \eta \Rightarrow \underbrace{\left| 2\frac{f(s)-f(t)}{(s-t)^2} - f''(t) \right| < \varepsilon}$$

$$f''(t) - \varepsilon \leq 2\frac{f(s)-f(t)}{(s-t)^2} \leq f''(t) + \varepsilon .$$

Prenons $\varepsilon = \frac{f''(t)}{2}$, alors on a $\eta > 0$ tq

$$\forall s \quad 0 \neq |s-t| < \eta, \qquad f(s) - f(t) \geq \frac{f''(t)}{2}(s-t)^2 > 0$$

Donc t est un minimum local (strict) de f. $\square$

$f(s) > f(t)$ pour $s \neq t$.

Pour une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, on peut en déduire des conditions nécessaires d'existence de minimum local, en se ramenant à une fonction d'une variable :

si $a \in U$ est un minimum local de f, et $v \in \mathbb{R}^n$, et si $g_v : t \longmapsto f(a+tv)$, alors $g_v''(0) \geqslant 0$ par la proposition 1.

Deux pbms : * comment calculer efficacement les $g_v''(0)$?

* comment obtenir une condition suffisante ?

Solution : différentielle seconde, généralisation de Taylor Young.

analogue pour les dérivées :

$$g_v'(0) = D_v f(a)$$

si f différentiable,

$$g_v'(0) = df_a(v) = \big(Df(a)\big) v$$

jacobienne, donnée par les dérivées partielles

(seulement n directions à considérer !)

Différentielle seconde

Définition : Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est **deux fois différentiable** en $a \in U$ si :

f est différentiable sur un voisinage **ouvert** V de a, et sa différentielle

$$df : V \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$
$$x \longmapsto df_x$$

est différentiable en a.

(On dit que f est deux fois différentiable sur U si elle est deux fois différentiable en tout $a \in U$.)

Rappel : $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension np, donc on reste bien dans le cadre du cours pour utiliser la notion de différentiabilité.
De plus, si besoin, les bases standards de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ fournissent un choix de base naturel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$: les applications linéaires associées aux matrices $p \times n$ élémentaires (un seul coeff $= 1$, les autres nuls).

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Mat}_{p\times n}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \rightsquigarrow & M \text{ sa matrice dans les bases standard} \end{array}$$

Supposons f deux fois différentiable en a.

Puisque df est différentiable, on peut parler de sa différentielle en a :

$$d(df)_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))$$

Pour $h, k \in \mathbb{R}^n$, on a

$$d(df)_a(h) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$

$$\big(d(df)_a(h)\big)(k) \in \mathbb{R}^p$$

La notation n'est pas pratique.

Définition : La <u>différentielle seconde</u> d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ d'une fonction deux fois différentiable en $a \in U$ est l'application <u>bilinéaire</u>

$$d^2 f_a \in \underbrace{Bil(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^p)}_{\text{applications } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ bilinéaires}}$$

définie par :

$$d^2 f_a(h, k) = \Big(d(df)_a(h)\Big)(k).$$

Exemples :

- Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction affine, c'est-à-dire $f = L + C$ où $C \in \mathbb{R}^p$
$L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ avec

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \quad df_a = L.$$

Donc $df : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est constante.
$a \longmapsto L$

Donc df est différentiable partout et $d(df) = 0$.

Donc f est deux fois différentiable partout, et $d^2 f = 0$.

• Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ bilinéaire,

on a vu que B est différentiable partout, et

$$dB : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \longrightarrow L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$$
$$(x,v) \longmapsto dB_{(x,v)}$$

avec $dB_{(x,v)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$
$$(y,w) \longmapsto B(x,w) + B(y,v) .$$

Par bilinéarité de B, dB est une application linéaire, donc différentiable partout, avec

$$d(dB)_{(x,v)}(y,w) = dB_{(y,w)}$$

Donc B est deux fois différentiable partout, et

$$d^2B_{(x,v)}((y,w),(z,u)) = B(y,u) + B(z,w) .$$

(ne dépend pas de (x,v)).

- Pour $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction réelle d'une variable réelle,

deux fois différentiable $\iff$ deux fois dérivable

et $d^2 f_a(h,k) = f''(a)\, hk$.

---

rem :

$$\frac{1}{2} d^2 f_a(h,h) = \underbrace{\frac{1}{2} f''(a)\, h^2}_{\text{terme dans la formule de Taylor}}$$

Définition : Lorsqu'elles existent, on appelle <u>dérivées partielles secondes</u> de $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ en $a \in U$ les quantités :

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a) \in \mathbb{R}^p \qquad \text{pour } 1 \leq i,j \leq n.$$

(pour que ça existe, il suffit que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe dans un voisinage de a, et admette une dérivée partielle en a selon la variable x_j.)

On notera cette quantité $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \in \mathbb{R}^p$

Si $p = 1$ et si toutes les dérivées partielles secondes de f en a existent, on appelle <u>matrice hessienne</u> de f en a, et on note $D^2 f(a)$ la matrice $n \times n$ dont les coefficients sont les $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Analogue aux dérivées directionnelles pour les différentielles secondes

Soient $h, k \in \mathbb{R}^n$. Pour $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, considérons la fonction de deux variables g définie par

$$g(t,s) := f(a + th + sk)$$

(bien définie sur un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ pour $a \in U$)

Alors $$d^2f_a(h,k) = \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(0,0)$$

si f est deux fois différentiable en a.

Rappel : si f différentiable en a et $v \in \mathbb{R}^n$,

$$df_a(v) = D_v f(a) = Df(a) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Ici, pour les différentielles secondes, l'analogue est :

$$\boxed{d^2 f_a(h,k) = \sum_{i,j=1}^{n} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)}$$

Si de plus $p=1$,

$$d^2 f_a(h,k) = {}^t h \, D^2 f(a) \, k .$$

Théorème (de Schwarz) : Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est deux fois différentiable en $a \in U$, alors d^2f_a est une application bilinéaire **symétrique**.

---

c'est-à-dire $\forall h, k \in \mathbb{R}^n$, $d^2f_a(h,k) = d^2f_a(k,h)$.

Preuve : On va faire la preuve en deux parties :

1) on prouve le thm en admettant le lemme suivant
2) puis on prouve le lemme.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

<u>Lemme</u> : Soit A la fonction définie par

$\forall h, k \in \mathbb{R}^n$

$$A(h,k) = f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)$$

(bien définie sur un voisinage V de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$)

Si f est deux fois différentiable en x, alors

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\| A(h,k) - d^2 f_x(h,k) \|}{\|(h,k)\|^2} = 0 .$$

La fonction A du lemme est symétrique.

On peut donc écrire, pour $h, k \in \mathbb{R}^n$,

$$d^2f_x(h,k) - d^2f_x(k,h) = \left(d^2f_x(h,k) - A(h,k)\right) + \left(A(k,h) - d^2f_x(k,h)\right)$$

Par le lemme, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tq

$$\|(h,k)\| < \eta \Rightarrow \left\|d^2f_x(h,k) - d^2f_x(k,h)\right\| < 2\varepsilon \|(h,k)\|^2$$

Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\|(\lambda h, \lambda k)\| < \eta$, d'où

$$\left\|d^2f_x(\lambda h, \lambda k) - d^2f_x(\lambda k, \lambda h)\right\| < 2\varepsilon \|(\lambda h, \lambda k)\|^2$$

par bilinéarité de d^2f_x

$$\|\lambda^2 d^2f_x(h,k) - \lambda^2 d^2f(k,h)\| < 2\varepsilon \lambda^2 \|(h,k)\|$$

on peut simplifier par λ^2
et obtenir :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \| d^2 f_x(h,k) - d^2 f_x(k,h) \| < 2\varepsilon \|(h,k)\|^2$$

vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc

$$d^2 f_x(h,k) = d^2 f_x(k,h).$$

$\square$

Lemme : Soit A la fonction définie par

$\forall h, k \in \mathbb{R}^n$
$$A(h,k) = f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)$$

(bien définie sur un voisinage V de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$)

Si f est deux fois différentiable en x, alors

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|A(h,k) - d^2f_x(h,k)\|}{\|(h,k)\|^2} = 0$$

__Preuve du lemme :__ Notons

$$B(h,k) = A(h,k) - d^2 f_x(h,k)$$

Cette fonction est différentiable dans un voisinage de $(0,0)$, et pour $k' \in \mathbb{R}^n$,

$$dB_{(h,k)}(0,k') = df_{x+h+k}(k') - df_{x+k}(k') - d^2 f_x(h,k')$$

$$= df_{x+h+k}(k') - df_x(k') - d^2 f_x(h+k,k')$$

$$- \left(df_{x+k}(k') - df_x(k') - d^2 f_x(k,k') \right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $d^2 f$, $\exists \eta > 0$ tq $\forall h', k' \in \mathbb{R}^n$ avec $\|h'\| \leq \eta$,

$$\left\| df_{x+h'}(k') - df_x(k') - d^2 f_x(h', k') \right\| \leq \varepsilon \|h'\| \|k'\|$$

(différentiabilité de df en x).

Pour $h, k \in \mathbb{R}^n$ avec $\|h\| < \frac{\eta}{2}$ et $\|k\| < \frac{\eta}{2}$, on peut appliquer cette inégalité deux fois avec $h' = h + k$, puis $h' = k$.

On en déduit, par inégalité triangulaire, que

$$\|dB_{(h,k)}(0,k')\| \leqslant \varepsilon \|k'\| (\|h+k\| + \|k\|).$$

Soit $g : y \longmapsto B(h,y)$, alors

$$dg_k(k') = dB_{(h,k)}(0,k')$$

donc

$$|||dg_y||| \leqslant \varepsilon (\|h+k\| + \|k\|)$$

pour $y \in [0,k]$.

Appliquons donc le théorème des accroissements finis à g, on obtient :

$$\begin{array}{l} \|g(k)-g(0)\| \leqslant \varepsilon\big(\|h+k\|+\|k\|\big)\|k\| \leqslant 3\varepsilon\|(h,k)\|^2 \\ \qquad \shortparallel \\ \|B(h,k)\| \end{array}$$

$\square$

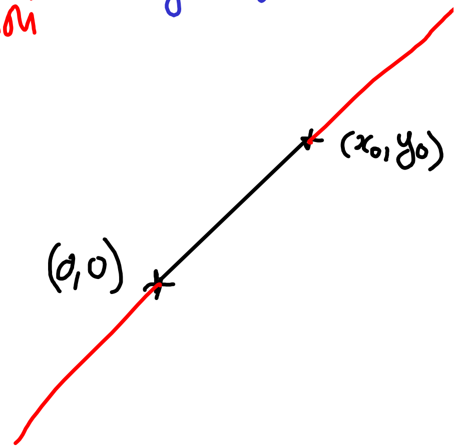
Exo 21

f C^1

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^4+2y^4$$

a priori

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x^4 \\ y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y^4 \end{cases}$$



$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(tx_0,ty_0)$$

pas idéal :

- en $t=0$, comportement différent
- on peut dépasser $t=1$ et prendre aussi $t<0$
- dérivabilité : sur un ouvert

on peut juste modifier un peu :

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(tx_0,ty_0)$$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}=\{t\in\mathbb{R}\ ;\ (tx_0,ty_0)\in\mathbb{R}^2\}$$

$$t\varphi'(t) = d\varphi_t(t) = df_{(tx_0,ty_0)}(tx_0, ty_0)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(tx_0, ty_0)\, tx_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(tx_0, ty_0)\, ty_0$$
$$= (tx_0)^4 + 2(ty_0)^4$$
$$= (x_0^4 + 2y_0^4)\, t^4$$

$$\varphi(t) = (x_0^4 + 2y_0^4)\frac{t^4}{4} + C$$

On a $C = \varphi(0) = f(0,0)$ indépendant de (x_0, y_0)

$\exists C \in \mathbb{R}$,
$\forall x_0, y_0, t$, $\quad f(tx_0, ty_0) = (tx_0)^4 + \dfrac{(ty_0)^4}{2} + C$

Tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit par exemple $(x,y) = (tx_0, ty_0)$ avec $x_0 = x$, $y_0 = y$, $t = 1$.

Réciproquement, OK.

Exo25

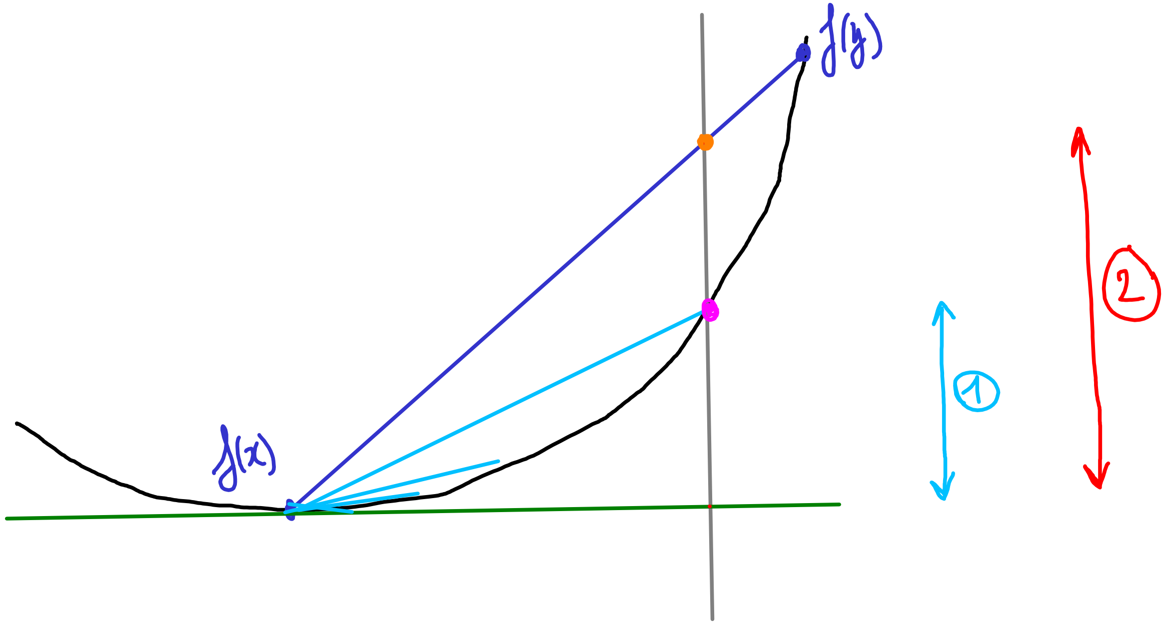
dans les calculs, remplacer $o(h)$ par $\|h\|\,\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$

$$f((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)f(x)+t\,f(y)$$

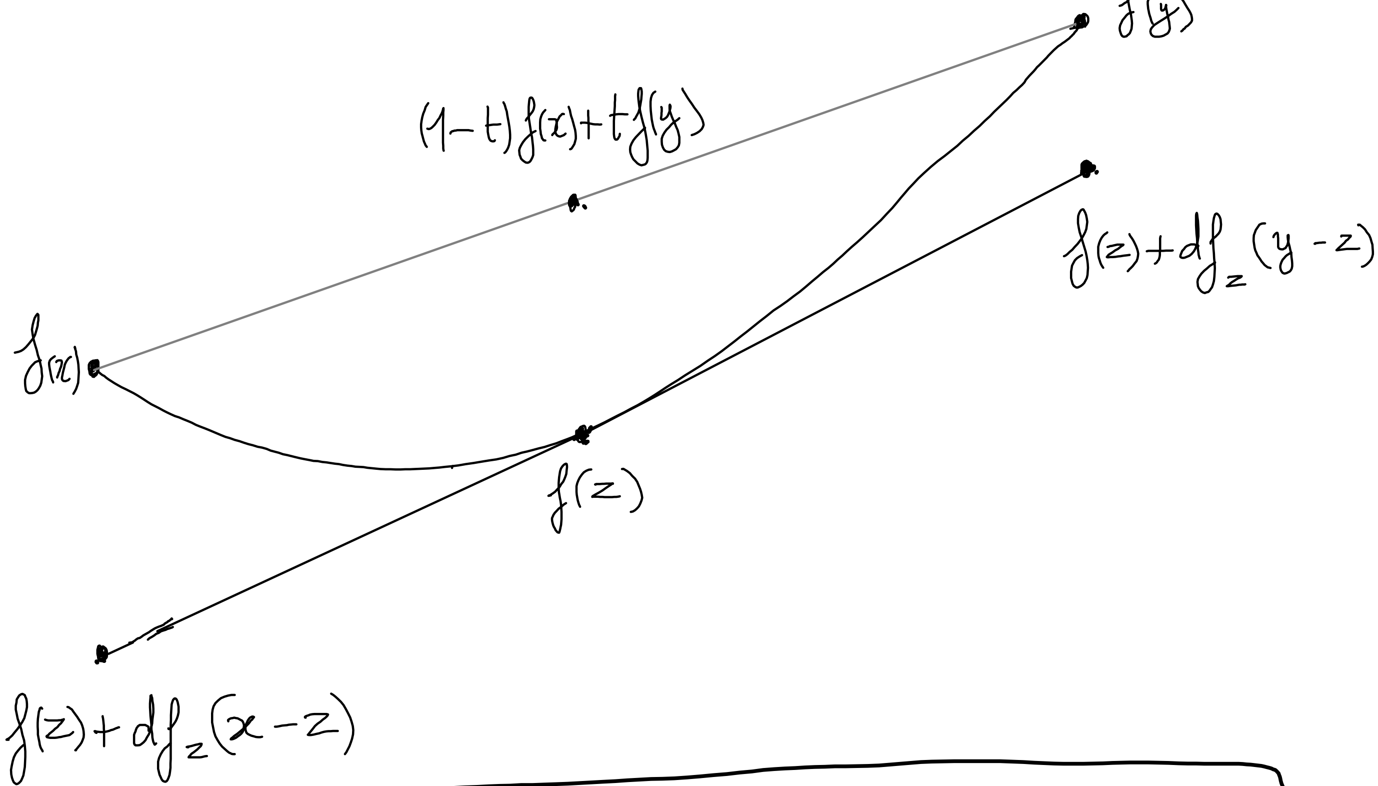
$$f(x+t(y-x))-f(x) \leqslant t\,\big(f(y)-f(x)\big)$$

1 2

$$df_x(y-x)=\lim_{\substack{t\to 0\\ >0}} \frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t} \leqslant f(y)-f(x)$$



$z = (1-t)x + ty \qquad t \in [0,1]$



$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

<u>Application tangente</u> de f en z : $x \longmapsto f(z) + df_z(x)$.

Rappels du dernier cours

$$d^2f_x(h,k) = \left(d(df)_x(h)\right)(k) \in \mathbb{R}^p$$

$$df : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$

$$d(df)_x \in \mathcal{L}(\overset{h}{\mathbb{R}^n}, \mathcal{L}(\overset{k}{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^p))$$

d^2f_x application bilinéaire <u>symétrique</u>

Thm de Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}^p$$

$$d^2 f_x(h,k) = \sum_{i,j=1}^{n} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Cas où $p = 1$:

$$D^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\right) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

<u>matrice hessienne</u>.

Définition : $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe C^2 sur U si toutes ses dérivées partielles premières et secondes existent et sont continues sur U.

Comme les dérivées partielles premières sont les composantes de df, on a

Proposition : Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe C^2 sur U, alors elle est deux fois différentiable sur U (et l'application $x \longmapsto d^2 f_x$ est continue).

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Théorème : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ deux fois différentiable en $x \in U$. Alors

$$f(x+h) - f(x) - df_x(h) - \frac{1}{2} d^2 f_x(h,h) = o(\|h\|^2)$$

La notation $o(\|h\|^2)$ signifie que le terme de gauche divisé par $\|h\|^2$ tends vers 0 quand h tend vers 0.

Preuve : Considérons la fonction

$$F : h \longmapsto f(x+h) - f(x) - df_x(h) - \frac{1}{2} d^2 f_x(h,h)$$

définie et différentiable sur un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$.

de différentielle :

$$d^2f_x(h+k,h+k) = d^2f_x(h,h) + d^2f_x(k,h) + d^2f_x(h,k) + \underbrace{d^2f_x(k,k)}_{o(k)}$$

$$dF_h(k) = df_{x+h}(k) - 0 - df_x(k) - d^2f_x(h,k)$$

$$= df_{x+h}(k) - df_x(k) - \big(d(df)_x(h)\big)(k)$$

Comme df est différentiable en x, par définition,

on a
$$df_{x+h} - df_x - d(df)_x(h) = o(h)$$

donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq

$$\|h\| < \eta \implies \underbrace{|||df_{x+h} - df_x - d(df)_x(h)|||}_{= \, |||dF_h|||} \leq \varepsilon \|h\|$$

Ainsi, pour $\|y\| < \|h\|$, $|||dF_y||| \leqslant \varepsilon \|y\| \leqslant \varepsilon \|h\|$

donc par accroissements finis,

$$\|F(h) - F(0)\| \leqslant \varepsilon \|h\| \|h - 0\|$$

c-à-d $$\|F(h)\| \leqslant \varepsilon \|h\|^2$$

C'est vrai pour tout h tq $\|h\| < y$,

donc on a montré $F(h) = o(\|h\|^2)$. $\square$

si $x, y \in E$, E $\mathbb{R}$-ev

$[x, y] = \{ (1-t)x + ty \, ; \, t \in [0,1] \}$

Après les vacances, on parlera des différentielles d'ordre ≥ 2 et des formules de Taylor d'ordre ≥ 2.

Application aux extrema locaux

On suppose dans cette section $\boxed{p = 1}$

Théorème 1 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. Si a est un minimum local de f, alors $df_a = 0$ et

$$d^2 f_a(h,h) \geq 0 \qquad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve : C'est déjà vu :

$$d^2 f_a(h,h) = g''(0) \quad \text{où } g : t \longmapsto f(a+th)$$

$\square$

$$g'(t) = df_{a+th}(h)$$

$$g''(t) = \left(d(df)_{a+th}(h)\right)(h)$$

$$g''(0) = d^2 f_a(h,h)$$

Par contre, on peut maintenant vérifier cette condition efficacement :

$$d^2 f_a(h,h) \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

$$\Longleftrightarrow \quad h^T D^2 f(a)\, h \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

$\Longleftrightarrow$ la matrice hessienne $D^2 f(a)$ (qui est symétrique réelle) est positive.

Théorème 2 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. Si $df_a = 0$ et

$$d^2 f_a(h,h) > 0 \qquad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

alors a est un minimum local de f.

Remarque : $d^2 f_a(h,h) > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\Updownarrow$$

la matrice hessienne $D^2 f(a)$
est définie positive.

Preuve : La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne :

$$f(a+h) - f(a) - df_a(h) - \frac{1}{2} d^2 f_a(h,h) = o(\|h\|^2)$$

donc

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f_a(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

On rappelle que les bilinéaires sont continues donc $d^2 f_a$ est continue.

Elle admet donc un minimum, noté C, sur l'ensemble $\{(h,h) ; \|h\| = 1\}$.

Par l'hypothèse, C est strictement positif.

Comme $\varepsilon(h) \longrightarrow 0$, il existe $\eta > 0$ tq

$$\|h\| < \eta \implies |\varepsilon(h)| < \frac{C}{4}.$$

Donc pour $0 \neq \|h\| < \eta$,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f_a(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

$$> \|h\|^2 \left(\frac{1}{2} d^2 f_a\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right) - \frac{C}{4} \right)$$

$$> \|h\|^2 \frac{C}{4} > 0.$$

Donc $f(a+h) > f(a)$ pour $0 \neq \|h\| < \eta$.

c'est-à-dire, f a un minimum local strict en a. $\square$

Pour les maximums locaux :

1) a maximum local $\Longrightarrow$ $df_a = 0$

$D^2 f(a)$ matrice symétrique réelle négative

2) $df_a = 0$

$D^2 f(a)$ matrice symétrique réelle définie négative

$\Big) \Longrightarrow$ a maximum local.

Enfin, si $df_a = 0$ et si $D^2f(a)$ n'est ni négative, ni positive, alors a ne peut être ni un maximum local, ni un minimum local.

Dans cette situation, on dit que le point critique a est un *point selle* de f.

⚠ Si on sait juste $df_a = 0$ et $D^2f(a)$ positive (mais pas définie positive) alors on ne peut *rien* dire sans argument supplémentaire.

Exemples : en $(0,0)$

Considérer : $x+y^2$

x^2+y^2

$-x^2-y^2$

x^2-y^2

x^2+y^4

x^2-y^4

Méthode de recherche d'extrema locaux en 2 variables

$f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois diff sur U

→ On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$

→ On résout $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ en (x,y)

pour obtenir les points critiques de f.

→ Si (x,y) point critique, on calcule la hessienne

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

→ on calcule son déterminant et sa trace.

Alors :

1) si $\det < 0$, alors (x,y) point selle.

2) si $\det > 0$ et $\mathrm{tr} > 0$, alors (x,y) min local.

3) si $\det > 0$ et $\mathrm{tr} < 0$, alors (x,y) max local.

Si $\det = 0$, on ne peut pas conclure sans argument supplémentaire.

De même, pour obtenir des max ou min globaux, il faut des arguments supplémentaires.

Différentielles d'ordre supérieur

$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ $\qquad$ U ouvert

$f \rightsquigarrow df : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

$\hookrightarrow d(df) : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))$

$\hookrightarrow d^2 f : U \longrightarrow \{\text{appli bilinéaire } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p\}$

Si f est deux fois différentiable sur un voisinage V de x dans U, alors $d^2 f$ est bien définie comme une application de V vers les applis bilinéaires $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

On dit que f est <u>3 fois différentiable</u> en $x \in U$ si $d^2 f$ est différentiable en x, et on appelle différentielle troisième de f en x, et on note $d^3 f_x$ l'application trilinéaire $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ définie par :

$\forall h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}^n$,

$$d^3 f_x(h_1, h_2, h_3) = \Big(d(d^2 f)_x(h_1)\Big)(h_2, h_3) \in \mathbb{R}^p$$

Plus généralement, on définit par récurrence :

<u>Définition</u> : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

- On dit que f est <u>k fois différentiable</u> en $x \in U$ si f est différentiable sur un voisinage ouvert V de x dans U, et $df : V \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est $(k-1)$-fois différentiable en x.

- Pour $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, la quantité

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}(x) := \frac{\partial \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \right)}{\partial x_{i_1}}(x)$$

(si elle existe) est appelée une <u>dérivée partielle k-ième</u> de f en x.

- On dit que f est <u>de classe C^k</u> si df est de classe C^{k-1}.
- On dit que f est <u>de classe C^∞</u> si f est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Comme d'habitude, on dit que f est k-fois différentiable sur U si f est k-fois diff en x pour tout $x \in U$.

<u>Proposition</u> : • Si f est de classe C^k sur U, alors pour tout $x \in U$, f est k fois différentiable en x.

• Si toutes les k-ièmes dérivées partielles de f existent et sont continues sur U, alors f est de classe C^k sur U.

• Si f est k-fois différentiable en $x \in U$, alors ses dérivées partielles k-ième en x existent toutes.

<u>Définition</u> : Si f est k-fois différentiable en $x \in U$, on appelle <u>différentielle k-ième</u> de f en x, et on note $d^k f_x : (\mathbb{R}^n)^k \longrightarrow \mathbb{R}^p$ l'application k-multilinéaire définie par :

$$d^k f_x\left(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}\right) = \sum_{(i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,n\}^k} h^{(1)}_{i_1} h^{(2)}_{i_2} \cdots h^{(k)}_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}(x).$$

Théorème de Schwarz (pour les différentielles supérieures)

Soit f une fonction k fois différentiable en x.
Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ (groupe symétrique)
et pour tout $(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) \in (\mathbb{R}^n)^k$

$$d^k f_x (h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) = d^k f_x (h^{(\sigma(1))}, \dots, h^{(\sigma(k))})$$

c-à-d. que l'ordre des arguments n'a pas d'importance.

En termes de dérivées partielles,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(k)}}}(x)$$

c-à-d que l'ordre des variables par rapport auxquelles on dérive n'importe pas.

Exemples élémentaires et constructions

Exemples : • Si f est l'application nulle ($f(x)=0 \ \forall x$)

alors f est différentiable et $df_x = 0 \quad \forall x$

donc df est différentiable et $d(df)_x = 0 \quad \forall x$

...

Par une récurrence immédiate, f est de classe C^∞

et $d^k f_x = 0 \quad \forall x, \quad \forall k \geq 0$

(par convention $d^0 f = f$, $d^1 f = df$)

• Si f est constante, alors df est nulle,

donc df est de classe C^∞.

Donc f est de classe C^∞ et $d^k f_x = 0 \quad \forall x$
$\forall k \geq 1$.

- Si f est linéaire, alors df est constante, donc df est de classe C^∞, donc f de classe C^∞ et $d^k f \equiv 0$ $\forall k \geqslant 2$.

- Si f est bilinéaire, alors df est linéaire donc f est de classe C^∞ et $d^k f \equiv 0$ $\forall k \geqslant 3$.

etc.

Théorème (règle de composition pour les diffs supérieures) :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ tq $f(U) \subset V$.

i) Si f est k-fois diff en $x \in U$ et g est k-fois diff en $f(x)$, alors $g \circ f$ est k-fois diff en x.

ii) Si f est de classe C^k sur U et g de classe C^k sur V, alors $g \circ f$ est de classe C^k sur U.

Preuve : cas $k = 1$: i) déjà fait au chapitre 1

ii) on a
$$d(g \circ f) : U \longrightarrow \mathbb{R}^q$$
$$x \longmapsto dg_{f(x)} \circ df_x$$

Cette fonction est continue, obtenue par composition des applications

$$\begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ x & \longmapsto & (dg_{f(x)}, df_x) \end{array}$$

continue par hypothèse : f, df, dg sont continues

et

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \\ (v, u) & \longmapsto & v \circ u \end{array}$$

continue car bilinéaire

Cas général : par récurrence sur k.

Supposons le thm montré jusqu'à $k-1$.

Sous les hypothèses du thm au rang k,

- df est $(k-1)$ différentiable en x
- $x \mapsto dg_{f(x)}$ est aussi $(k-1)$ fois différentiable, comme composée de dg et f, en appliquant l'hypothèse de récurrence.

En appliquant à nouveau la décomposition de $d(g \circ f)$ issue de la règle de composition du chapitre 1,

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df,$$

et l'hypothèse de récurrence, $d(g \circ f)$ est $(k-1)$ fois différentiable en x, d'où le point i).

Même principe pour le point ii). $\square$

Formules de Taylor

Théorème : (Taylor-Young) Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est k-fois différentiable en $x \in U$, alors

$$f(x+h) - f(x) - \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} d^m f_x(\underbrace{h, h, \ldots, h}_{m \text{ fois}}) = o(\|h\|^k)$$

Théorème (Taylor avec reste intégral) : Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe C^{k+1}, $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$ est tel que le segment $[x, x+h]$ soit inclus dans U, alors

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} d^m f_x(\underbrace{h, \ldots, h}_{m \text{ fois}}) + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f_x(h, \ldots, h)\, dt$$

Fin du chapitre 2

Chapitre 3 : Théorème d'inversion locale

On suppose toujours que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$,
et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

Difféomorphismes

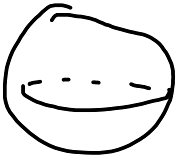
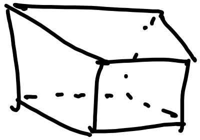
Définition : Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^p$. La fonction f est un <u>difféomorphisme</u> de U sur V si :

i) f est une bijection de U sur V

ii) f est de classe C^1

iii) sa fonction réciproque $f^{-1} : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1.

Attention : iii) n'est pas une conséquence de i) et ii).

$\mathbb{R}^3 \supset$  $\longrightarrow$ $\mathbb{R}^3 \supset$ 

Hors programme :
homéomorphes mais pas difféomorphes en tant que variétés différentiables

Exemples :

- La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$ est une bijection de classe C^1

  mais $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas de classe C^1
  (pas différentiable en 0)

- La fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une bijection de classe C^1,
  et $\tan^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est de classe C^1,
  donc $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ est un difféomorphisme.

Proposition : Si $f : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme, alors pour tout $x \in U$, df_x est inversible. Plus précisément si f^{-1} est la fonction réciproque de f, on a :

$$d(f^{-1})_y = \left(df_{f^{-1}(y)}\right)^{-1} \qquad \text{pour tout } y \in V.$$

Preuve : Notons $g = f^{-1}$. Par définition, on a $f \circ g = Id_V$.
Par règle de composition, on a :

$$Id_{\mathbb{R}^p} = d(Id_V)_y = df_{g(y)} \circ dg_y \qquad \forall y \in V$$

Donc $\left(df_{g(y)}\right)^{-1} = dg_y$

$\square$

Remarque : En particulier, si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^p$ est un difféomorphisme, on a nécessairement $n = p$.
À partir de maintenant, on suppose $n = p$ si on parle de difféomorphismes.

Difféomorphismes de classe C^k

On a vu que supposer f bijection de classe C^1 n'implique pas que f^{-1} est de classe C^1. Par contre, si f est un difféomorphisme, les régularités plus grandes de f se transfèrent à f^{-1}.

Théorème : Si $f : U \to V$ est un difféomorphisme et si f est de classe C^k, alors f^{-1} est aussi de classe C^k.

Lemme : L'application $f : GL(\mathbb{R}^n) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$
$u \longmapsto u^{-1}$

est de classe C^∞.

(rem : c'est un difféo car $f = f^{-1}$)

Démonstration :

- Remarque : $GL(\mathbb{R}^n) = \{\text{applications linéaires inversibles } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$
$= \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$

est un ouvert.

- Supposons d'abord que f est différentiable.

Considérons l'application $\phi : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$
(bilinéaire) $(u, v) \longmapsto u \circ v$

On a $\underbrace{u \circ u^{-1}}_{= Id_{\mathbb{R}^n}} = u \circ f(u) = \phi(u, f(u))$ pour tout $u \in GL(\mathbb{R}^n)$

Notons $g : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ la fonction constante égale à $Id_{\mathbb{R}^n}$.

Donc par règle de composition, pour $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\forall u \in GL(\mathbb{R}^n)$

$$0 = dg_u(h) = \phi(h, f(u)) + \phi(u, df_u(h))$$

En traduisant ϕ, on a

$$0 = h \circ f(u) + u \circ df_u(h)$$

d'où $\quad df_u(h) = -u^{-1} \circ h \circ f(u)$

$$df_u(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$$

- Vérifions que f est différentiable :
  on réinjecte l'expression cidessus dans la définition

$$f(u+h) - f(u) - \left(-u^{-1} \circ h \circ u^{-1}\right) = (u+h)^{-1} - u^{-1} + u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$$
$$= u^{-1}\left(\left(Id + h \circ u^{-1}\right)^{-1} - Id + h \circ u^{-1}\right)$$

Or pour $|||h\circ u^{-1}||| < 1$, on a

analogue de $\frac{1}{1+x} = \sum (-x)^k$ dans les evn

$Id + h\circ u^{-1}$ est inversible et

$$(Id + h\circ u^{-1})^{-1} = Id - h\circ u^{-1} + (h\circ u^{-1})^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (h\circ u^{-1})^k}_{\text{somme d'une série abs. convergente}}.$$

$$f(u+h) - f(u) - (-u^{-1}\circ h\circ u^{-1}) = u^{-1}\circ (h\circ u^{-1})^2 \circ \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (h\circ u^{-1})^k$$

sous multiplicativité de $|||\cdot|||$ et inégalité triangulaire

Finalement,

$$|||f(u+h) - f(u) + u^{-1}\circ h\circ u^{-1}||| \leq |||h|||^2 \, |||u^{-1}|||^3 \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} |||h|||^k \, |||u^{-1}|||^k}_{\text{on pourrait m̂ écrire la somme}}$$

$$= o(|||h|||)$$

cf aussi exo4 TD1.

- Posons maintenant

$$\Psi : L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\times L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \longrightarrow L(L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n), L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$$
$$(v,w) \longmapsto (h \longmapsto -v\circ h\circ w)$$

C'est une application bilinéaire, donc de classe C^∞,

et $$df_u(h) = -u^{-1}\circ h\circ u^{-1}$$
$$= (\Psi(u^{-1},u^{-1}))(h)$$

c'est-à-dire $$df_u = \Psi(u^{-1},u^{-1}) = \Psi(f(u),f(u))$$

Par règle de composition, et une récurrence immédiate, f est de classe C^∞.

$\square$

Revenons au

<u>Théorème</u>: Si $f : U \to V$ est un difféomorphisme et si f est de classe C^k, alors f^{-1} est aussi de classe C^k.

<u>Preuve</u>: Par récurrence.

Pour $k = 1$, c'est la définition de difféomorphisme.

Supposons que la réciproque de tout difféo de classe C^{k-1} est de classe C^{k-1}.

Soit f un difféo tq f soit de classe C^k.

Par définition, df est de classe C^{k-1}, et par l'hypothèse de récurrence, f^{-1} est au moins de classe C^{k-1}.

On se rappelle que :

$$d(f^{-1})_y = \left(df_{f^{-1}(y)}\right)^{-1}$$

Par composition, $y \mapsto df_{f^{-1}(y)}$ est de classe C^{k-1}.

Par le lemme, et la règle de composition à nouveau,

$y \mapsto \left(df_{f^{-1}(y)}\right)^{-1}$ est de classe C^{k-1}.

C'est-à-dire que f^{-1} est de classe C^k.

$\square$

Organisation :

cette semaine normale

mardi [16] prochain CC

vendredi 19 TD à 8h en groupe complet (avec grp A)

pas de CM le 16 ni le 18

CM mardi 23 15h

jeudi 25 11h30

exos à rendre mardi 23

éventuellement TD à 8h (en plus) groupe complet en grp B

vendredi 26

Rappels dernière séance

$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme de U sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ si :

i) $f : U \longrightarrow V$ est une bijection de U sur V

ii) f est de classe C^1

iii) f^{-1} est de classe C^1.

$$d(f^{-1})_y = \left(df_{f^{-1}(y)}\right)^{-1}$$

(en différentiant $f \circ f^{-1}$)

<u>Thm</u> : Soit f un difféo et $k \geqslant 2$.
f de classe $C^k \Rightarrow f^{-1}$ est de classe C^k.

<u>Lemme</u> : L'aplication $GL(\mathbb{R}^n) \longrightarrow GL(\mathbb{R}^n)$
$u \longmapsto u^{-1}$

est un difféomorphisme de classe C^∞.

Théorème d'inversion locale

Définition : Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un <u>difféomorphisme local autour de $x \in U$</u> s'il existe un voisinage ouvert V de x dans U et un voisinage ouvert W de $f(x)$ dans $\mathbb{R}^n$, tels que $f|_V$ soit un difféomorphisme de V sur W.

⚠ **Attention** : Un difféomorphisme local n'est pas en général un difféomorphisme global.

(on verra des exemples en TD).

Par le cours de jeudi dernier, si f est un difféo local autour de x, $df_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est inversible (et m̂ df_y est inversible pour $y \in V$ avec les notations de la définition). Le théorème d'inversion locale est une réciproque de cette propriété.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{\underline{Théorème} (Théorème d'inversion locale) : Soit } f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \text{une fonction de classe } C^1. \text{ Soit } a \in U. \\ \text{Si } df_a \text{ est inversible, alors } f \text{ est un difféomorphisme} \\ \text{local autour de } a.\end{array}}$$

C'est un des résultats les plus importants du cours !

Preuve du théorème d'inversion locale

Étape 0 : Pour simplifier les calculs et les notations, on peut, sans perte de généralité, se ramener au cas où : $a = 0 = f(a)$ et $df_a = Id_{\mathbb{R}^n}$.

En effet, on étudie à la place de la fonction f la fonction :

$$\tilde{f} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto (df_a)^{-1}\left(f(a+x) - f(a)\right)$$

où $\tilde{U} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, a + x \in U\}$ est un ouvert.

On a $\tilde{f}(0) = 0$ et $d\tilde{f}_0 = Id_{\mathbb{R}^n}$.

et si $\tilde{f}$ est un difféo local autour de 0, alors f est un difféo local autour de a.

À partir de maintenant, on suppose

$$a = 0 = f(a) \quad \text{et} \quad df_0 = Id_{\mathbb{R}^n}$$

<u>Étape 1</u> : <u>Existence d'une fonction réciproque locale</u>

Considérons la fonction $g : \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & x - f(x) \end{array}$.

C'est une fonction de classe C^1, avec $g(0) = 0$ et $dg_0 = 0$.

En particulier $|||dg_0||| = 0$.

Par continuité de la différentielle,

$\exists r > 0$ tq $\forall x \in U$, $\|x\| < 2r \Rightarrow |||dg_x||| \leqslant \frac{1}{2}$.

Appliquons le théorème des accroissements finis à la restriction de g à $\mathring{B}(0,2r)$:

$$\forall x \in \mathring{B}(0,2r), \quad \underset{\|g(x)\|}{\underset{\shortparallel}{\|g(x)-g(0)\|}} \leqslant \frac{1}{2}\|x-0\| < r$$

En d'autres termes, $g(\mathring{B}(0,2r)) \subset \mathring{B}(0,r)$.

Par continuité de g, c'est vrai aussi pour les boules fermées : $g(B(0,2r)) \subset B(0,r)$.

Montrons que, pour tout $y \in \mathring{B}(0,r)$, il existe un unique $x \in \mathring{B}(0,2r)$ tq $y = f(x)$.

Pour cela, on se ramène à un pbm de point fixe :

Fixons $y \in \mathring{B}(0,r)$ et considérons la fonction

$$\begin{aligned} h : B(0,2r) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto y + g(x). \end{aligned}$$

On a $y = f(x)$ ssi $h(x) = x$

$$h(x) = y + g(x) = y + x - f(x)$$

Nous allons appliquer le <u>théorème du point fixe de Banach</u> (dans le cas de $\mathbb{R}^n$).

Rappel (de topologie) : Soit C un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, et $h : C \longrightarrow C$ une fonction contractante (c'est-à-dire $\exists k \in]0,1[$ tq $\forall x, x' \in C$, $\|h(x) - h(x')\| \leq k \|x - x'\|$)

Alors il existe un unique $x_0 \in C$ tq $h(x_0) = x_0$.

Ici on veut à l'appliquer à notre fonction h, sur le fermé $C = B(0, 2r)$.

On commence par vérifier les hypothèses.

* $B(0,2r)$ est stable par h :

si $x \in B(0,2r)$, $\|h(x)\| = \|y + g(x)\|$

$$\leq \|y\| + \|g(x)\|$$

or $y \in \mathring{B}(0,r)$ et $g(x) \in B(0,r)$

donc $\|h(x)\| < 2r$.

En particulier, $h(x) \in B(0,2r)$.

* h est contractante (avec $k = \frac{1}{2}$) :

si $x, x' \in B(0,2r)$, $\|h(x) - h(x')\| = \|g(x) - g(x')\|$

$$\leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$$

thm des accroissements finis

Par le théorème du point fixe, h a un unique point fixe dans $B(0,2r)$.

Ce point fixe est en fait dans $\mathring{B}(0,2r)$

→ car on a vu à gauche que $h(B(0,2r)) \subset \mathring{B}(0,2r)$.

On a montré que tout $y \in \mathring{B}(0,r)$ a un unique antécédent par f.

On en déduit que la restriction de f à

$$U_0 := \mathring{B}(0,2r) \cap f^{-1}(\mathring{B}(0,r))$$

est une bijection de U_0 sur $\mathring{B}(0,r)$.

De plus, U_0 est un voisinage ouvert de 0 car intersection de deux voisinages ouverts de 0.

On note $f^{-1} : \mathring{B}(0,r) \longrightarrow U_0$ la réciproque de $f|_{U_0} : U_0 \longrightarrow \mathring{B}(0,r)$.

fin de l'étape 1.

<u>Étape 2</u> : La fonction f^{-1} est Lipschitzienne.

Soient $y = f(x)$ et $y' = f(x')$ dans $\mathring{B}(0,r)$ avec $x, x' \in \mathring{B}(0,2r)$. ($x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$)

Alors

$$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')\| = \|x - x'\|$$

$$\begin{aligned}\|x - x'\| &= \|g(x) + f(x) - (g(x') + f(x'))\| \\ &= \|g(x) + y - g(x') - y'\| \\ &\leqslant \|g(x) - g(x')\| + \|y - y'\|\end{aligned}$$

par inégalité triangulaire

$$\|x - x'\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - x'\| + \|y - y'\|$$

En faisant passer le $\frac{1}{2}\|x - x'\|$ à gauche, on obtient :

$$\frac{1}{2}\|x - x'\| \leqslant \|y - y'\|$$

c'est-à-dire

$$\|f^{-1}(y)-f^{-1}(y')\| \leqslant 2\|y-y'\|$$

c'est-à-dire que f^{-1} est 2-Lipschitzienne sur $B(0,r)$.

fin de l'étape 2

Étape 3 : La fonction f^{-1} est de classe C^1.

Comme $GL(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert, et $df_0 \in GL(\mathbb{R}^n)$, par continuité de df (on se rappelle que f est C^1), $df_x \in GL(\mathbb{R}^n)$ pour x dans un voisinage de 0.

l'image réciproque par df de $GL(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert

Quitte à diminuer r, on peut donc supposer que $df_x \in GL(\mathbb{R}^n)$ pour $x \in \mathring{B}(0,2r)$.

Par continuité de $\begin{array}{ccc} GL(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & GL(\mathbb{R}^n) \\ u & \longmapsto & u^{-1} \end{array}$,

l'application $\begin{array}{ccc} \mathring{B}(0,2r) & \longrightarrow & GL(\mathbb{R}^n) \\ x & \longmapsto & (df_x)^{-1} \end{array}$ est continue.

De plus, $df_0 = Id_{\mathbb{R}^n}$, donc $(df_0)^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n}$,

donc quitte à diminuer encore r, on peut supposer

que $|||(df_x)^{-1}||| \leqslant 2$ pour $x \in \mathring{B}(0,2r)$.

On veut vérifier que $(df_x)^{-1}$ est la différentielle de f^{-1} au point $y = f(x)$ (pour $x \in \mathring{B}(0, 2r)$).

$$\frac{\|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - (df_x)^{-1}(k)\|}{\|k\|} \xrightarrow[k \to 0]{?} 0$$

Écrivons $x + h := f^{-1}(y+k)$ (on peut le faire pour $k \in \mathring{B}(0, r - \|y\|)$)

$$\|f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)-(df_x)^{-1}(k)\|$$

$$=\|x+h-x-(df_x)^{-1}(f(x+h)-f(x))\|$$

$$=\|(df_x)^{-1}(df_x(h)-(f(x+h)-f(x))\|$$

$$\leq \underbrace{|||(df_x)^{-1}|||}_{\leq 2}\ \|f(x+h)-f(x)-df_x(h)\|$$

d'où

$$\frac{\|f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)-(df_x)^{-1}(k)\|}{\|k\|} \leq 2\underbrace{\frac{\|f(x+h)-f(x)-df_x(h)\|}{\|h\|}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}\frac{\|h\|}{\|k\|}$$

D'après l'étape 2,

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} = \frac{\|x+h-x\|}{\|y+k-y\|}$$

$$= \frac{\|f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)\|}{\|y+k-y\|} \leq 2 .$$

Ça implique aussi que h tend vers 0 si k tend vers 0.

Donc $\dfrac{\|f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)-(df_x)^{-1}(k)\|}{\|k\|} \xrightarrow[k\to 0]{} 0$.

Donc f^{-1} est différentiable et $d(f^{-1}) : y \longmapsto \left(df_{f^{-1}(y)}\right)^{-1}$ qui

est continue par composition.

Donc f^{-1} est de classe C^1. $\square$

Exo 19

f deux fois différentiable

$$\begin{tikzcd}
 & & & \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \\
 & & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \arrow[ur] \arrow[r] & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \\
 & \frac{\partial f}{\partial x} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
f \arrow[ur] \arrow[dr] & & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \arrow[uur, "S"] \arrow[r] & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \\
 & \frac{\partial f}{\partial y} \arrow[ur, "\text{Schwarz}"] \arrow[dr] & & \\
 & & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \arrow[uur, "S"] \arrow[r] & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}
\end{tikzcd}$$

$$d^3 f_{(x,y)}(u, v, w) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)\, u_1 v_1 w_1 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)\, u_2 v_2 w_2$$
$$+ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y)\left(u_1 v_1 w_2 + u_1 v_2 w_1 + u_2 v_1 w_1\right)$$
$$+ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y)\left(u_1 v_2 w_2 + u_2 v_1 w_2 + u_2 v_2 w_1\right)$$

Exo 17

(on utilise $f(x,y) = F\circ\varphi^{-1}(x,y)$)

$$F(u,v) = f(u+v,\, u-v)$$
$$= f\circ\varphi(u,v) \quad \text{où} \quad \varphi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \longmapsto (u+v,\, u-v)$$
$$\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \longleftarrow (x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u+v,\, u-v) + \frac{\partial f}{\partial y}(u+v,\, u-v)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u+v,\, u-v) - \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u+v,\, u-v)}$$
$$+ \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u+v,\, u-v)} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u+v,\, u-v)$$

Schwarz

eqn énoncé $\iff \dfrac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(u,v) = 0 \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$

Rapel :

TIL : $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1

$a \in U$ tq $df_a \in GL(\mathbb{R}^n)$

Alors f est un difféo local autour de a.

c-à-d : $\exists V$ voisinage ouvert de a dans U

$\exists W$ voisinage ouvert de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^n$

tq

$f|_V$ soit un difféomorphisme de V sur W.

<u>Corollaire</u> (Théorème d'inversion globale) :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1.
Si f est injective, et $df_x \in GL(\mathbb{R}^n)$ pour tout $x \in U$, alors f est un difféomorphisme de U sur $f(U)$.

<u>Remarques</u> : • La réciproque est vraie : si f est un difféomorphisme alors f est injective (car bijective) et $df_x \in GL(\mathbb{R}^n)$ $\forall x \in U$ (vu au 1er cours du chapitre 3).

• C'est implicite dans l'énoncé, mais ça fait partie des conclusions que $f(U)$ est un ouvert.

Preuve du corollaire : On suppose f injective, de classe C^1

et $\forall x \in U$, $df_x \in GL(\mathbb{R}^n)$.

f est injective $\Rightarrow$ f est une bijection de U sur $f(U)$.

Il reste à montrer que $f(U)$ ouvert et f^{-1} de classe C^1.

Soit $y \in f(U)$ et $x = f^{-1}(y)$.

Par le TIL, il existe un voisinage ouvert V de x et un voisinage ouvert W de y tq $f : V \to W$ soit un difféomorphisme. En particulier, comme $W = f(V) \subset f(U)$, $f(U)$ est un voisinage de y.

Ça montre que $f(U)$ est ouvert.

L'application $f^{-1} : f(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable en tout point (en $y \in f(U)$, $f^{-1}|_W$ (avec les notations précédentes) est de classe C^1)

et sa différentielle est l'application

$$\begin{aligned} f(U) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ y &\longmapsto \left(df_{f^{-1}(y)}\right)^{-1} . \end{aligned}$$

(cf 1er cours chap 3)

Cette application est continue comme composée d'applications continues, donc f^{-1} est bien de classe C^1.

$\square$

On peut énoncer le corollaire en termes des dérivées partielles, plus précisément :

<u>Définition</u> : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable en $x \in U$. On appelle <u>jacobien</u> de f en x le déterminant $\det(Df(x))$ de la matrice jacobienne de f en x.

<u>Corollaire</u> : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction injective de classe C^1. Alors f est un difféomorphisme de U sur $f(U)$ ssi son jacobien est non nul en tout point de U.

<u>Rem</u> : Pour une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, de classe C^1,

ça montre que f est un difféo ssi

$$\begin{cases} \text{soit } f' > 0 \text{ sur } I \\ \text{soit } f' < 0 \text{ sur } I, \end{cases}$$

Théorème des fonctions implicites

Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On considère ici des fonctions $f : U \subset \underset{\underset{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}}{\parallel}}{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}^p$, où $n = n_1 + n_2$

On écrira donc $f(x, y)$ pour f appliqué au couple $(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^n$ (avec $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$)

Définition : On suppose f différentiable en $(x,y)\in U$.

Les **différentielles partielles** de f (par rapport à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$) sont les applications :

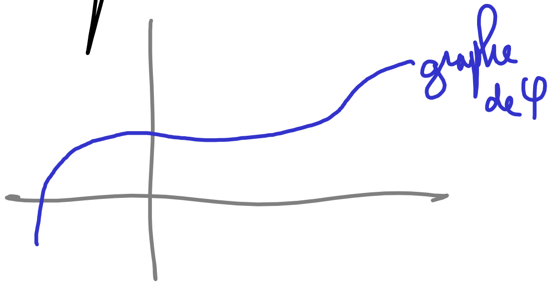
$$
\begin{array}{rccc}
d_1 f_{(x,y)} : & \mathbb{R}^{n_1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\
& h & \longmapsto & df_{(x,y)}\overbrace{(h,0)}^{\in \mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^n}
\end{array}
$$

et

$$
\begin{array}{rccc}
d_2 f_{(x,y)} : & \mathbb{R}^{n_2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\
& k & \longmapsto & df_{(x,y)}(0,k)
\end{array}
$$

Le Thm des fonctions implicites permet, sous des hypothèses qu'on va préciser, d'écrire les solutions de l'équation

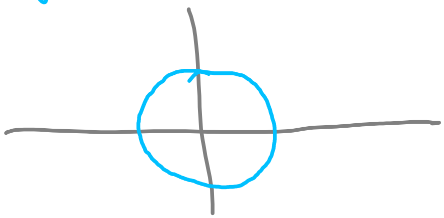
$$f(x,y)=0$$



sous la forme $\underline{(x,\varphi(x))}$ où φ est une fonction.

On verra des interprétations géométriques dans les prochaines séances.

$f(x,y)=x^2+y^2-1$



Théorème (Thm des fonctions implicites)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^1.

On suppose qu'il existe $(a,b) \in U$ tq $f(a,b) = 0$

et $d_2 f_{(a,b)}$ soit un isomorphisme de $\mathbb{R}^{n_2}$ sur $\mathbb{R}^p$.

Alors il existe un voisinage ouvert V de (a,b) dans U

il existe un voisinage ouvert W de a dans $\mathbb{R}^{n_1}$

et une fonction $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ de classe C^1,

tels que :

$$y = \varphi(x) \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} (x,y) \in V \\ \text{et} \\ f(x,y) = 0 \end{cases}$$

Remarque : Si les hypothèses sont satisfaites, alors $p = n_2$. Ça permet parfois de se rappeler sur quelle différentielle partielle porte l'hypothèse.

On va démontrer ce thm en utilisant le théorème d'inversion locale.

Preuve : On considère la fonction

$$g : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{p}$$
$$(x,y) \longmapsto (x, f(x,y))$$

C'est une fonction de classe C^1.

$\forall (x,y) \in U, \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2},$

$$dg_{(x,y)}(h,k) = (h, df_{(x,y)}(h,k))$$
$$= (h, df_{(x,y)}(h,0) + df_{(x,y)}(0,k))$$
$$= (h, d_1 f_{(x,y)}(h) + d_2 f_{(x,y)}(k))$$

On veut appliquer le TIL à g, donc on veut vérifier que $dg_{(a,b)}$ est inversible.

D'après l'hypothèse, on sait que $d_2f_{(a,b)}$ est inversible.

Écrivons
$$dg_{(a,b)}(h,k) = (h',k')$$

on veut exprimer h et k en fonction de h' et k'.

$$\left(h,\ d_1f_{(a,b)}(h) + d_2f_{(a,b)}(k)\right) = (h',k')$$

alors on a $h = h'$

$$\text{et } k' = d_1f_{(a,b)}(h) + d_2f_{(a,b)}(k)$$

On applique $\left(d_2 f_{(a,b)}\right)^{-1}$, on obtient

$$k = \left(d_2 f_{(a,b)}\right)^{-1}\left(k' - d_1 f_{(a,b)}(h)\right)$$

$$= \left(d_2 f_{(a,b)}\right)^{-1}\left(k' - d_1 f_{(a,b)}(h')\right)$$

Donc $dg_{(a,b)}$ est inversible, d'inverse

$$\left(dg_{(a,b)}\right)^{-1} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{p} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$$
$$(h', k') \longmapsto \left(h', \left(d_2 f_{(a,b)}\right)^{-1}\left(k' - d_1 f_{(a,b)}(h')\right)\right)$$

Par le TIL, g est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert V de (a,b) dans U sur un voisinage ouvert $\tilde{W}$ de $(a,0)$ dans $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^p$.

Quitte à réduire V, on peut supposer que $\tilde{W}$ est de la forme $W \times Z$ où W est un voisinage de a dans $\mathbb{R}^{n_1}$ et Z est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$.

La réciproque $g^{-1} : \tilde{W} \longrightarrow V$ de $g|_V$ est

nécessairement de la forme :

$$g^{-1}(x, z) = (x, \phi(x,z))$$

avec $\phi : W \times Z \longrightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ de classe C^1.

(car g est l'identité sur le facteur $\mathbb{R}^{n_1}$: $g(x,y) = (x, f(x,y))$)

On a donc

$$\begin{cases} (x,y) \in V \\ \text{et} \\ f(x,y) = z \end{cases} \iff \begin{cases} (x,z) \in W \times Z \\ \text{et} \\ \phi(x,z) = y \end{cases}$$

En particulier, pour $z=0$,

$$\begin{cases}(x,y)\in V\\ \text{et}\\ f(x,y)=0\end{cases} \iff \begin{cases}(x,0)\in W\times Z\\ \text{et}\\ \Phi(x,0)=y\end{cases}$$

En posant $\varphi(x)=\Phi(x,0)$, on a :

$$\begin{cases}(x,y)\in V\\ \text{et}\\ f(x,y)=0\end{cases} \iff \begin{cases}x\in W\\ \text{et}\\ y=\varphi(x)\end{cases}$$

et φ de classe C^1 par composition.

$\square$

Rappels chapitre 3

$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Définition : * f est un difféomorphisme de U sur V si :

i) f est une bijection de U sur V

ii) f est de classe C^1 sur U

iii) V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et

$f^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur V.

* f est un difféo. local autour de $x \in U$ s'il existe un voisinage ouvert V de x dans U, un voisinage ouvert W de $f(x)$ dans $\mathbb{R}^n$ tq $f|_V$ soit un difféomorphisme de V sur W.

Théorème d'inversion globale : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Alors f est un difféomorphisme ssi f est injective et $df_x \in GL(\mathbb{R}^n)$ pour tout $x \in U$.

Théorème d'inversion locale : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Alors f est un difféo local autour de $x \in U$ ssi $df_x \in GL(\mathbb{R}^n)$.

Si f est un difféomorphisme,

$$d(f^{-1})_y = \left(df_{f^{-1}(y)}\right)^{-1}.$$

Théorème des fonctions implicites

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ une fonction de classe C^1.

(rappel : différentielles partielles en $(x,y) \in U$:

$$d_1 f_{(x,y)} : \mathbb{R}^{n_1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_2}$$
$$h \longmapsto df_{(x,y)}(h,0)$$

$$d_2 f_{(x,y)} : \mathbb{R}^{n_2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_2}$$
$$k \longmapsto df_{(x,y)}(0,k)$$
)

Soit $(a,b) \in U$ tq $f(a,b) = 0$ et

$d_2 f_{(a,b)} \in GL(\mathbb{R}^{n_2})$.

Alors il existe un voisinage ouvert V de (a,b) dans U, un voisinage ouvert W de a dans $\mathbb{R}^{n_1}$, et une fonction $\varphi : W \to \mathbb{R}^{n_2}$ de classe C^1, tq

$$\begin{cases} (x,y) \in V \\ \text{et} \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in W \\ \text{et} \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

La fonction φ n'est pas explicite (d'où le nom) mais on peut par contre déterminer sa différentielle en a (et m ses différentielles supérieures si elles existent).

Ce n'est pas un théorème à retenir, il faut se rappeler comment le retrouver.

Raisonnement :

f et φ sont C^1, donc la fonction

$$\begin{aligned} W &\longrightarrow \mathbb{R}^{n_2} \\ x &\longmapsto f(x, \varphi(x)) \end{aligned}$$

est une fonction C^1.

Elle est en fait identiquement nulle.

En différentiant, on obtient $\forall h \in \mathbb{R}^{n_1}$,

$$0 = df_{(a,\varphi(a))}(h, d\varphi_a(h))$$

par linéarité

$$= d_1 f_{(a,\varphi(a))}(h) + d_2 f_{(a,\varphi(a))}(d\varphi_a(h))$$

Or $\varphi(a) = b$ (car $f(a,b) = 0$ et $(a,b) \in V$)

et $d_2 f_{(a,b)} \in GL(\mathbb{R}^{n_2})$, donc

$$\boxed{d\varphi_a(h) = -\left(d_2 f_{(a,b)}\right)^{-1}\left(d_1 f_{(a,b)}(h)\right)}$$

Cas particulier : fonctions de deux variables

Donnons à nouveau l'énoncé dans ce cas particulier.

Théorème : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

On suppose que $(x_0, y_0) \in U$ est tq

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Alors il existe $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ des réels positifs et une fonction de classe C^1

$$\varphi :]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2[\longrightarrow]y_0 - \beta_1, y_0 + \beta_2[$$

tq

$$\begin{cases} (x, y) \in]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2[\times]y_0 - \beta_1, y_0 + \beta_2[\\ \text{et} \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2[\\ \text{et} \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

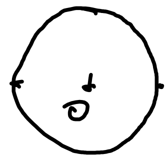
De plus, $\varphi'(x) = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$

Si f est de classe C^2, alors φ est de classe C^2

et $\varphi''(x) = \dfrac{-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\varphi(x)) - 2\varphi'(x)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,\varphi(x)) - (\varphi'(x))^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$

<u>Remarque</u>: Même dans ce cas particulier, on ne retient pas l'expression générale de φ' et φ'', on la retrouve en utilisant $f(x,\varphi(x)) = 0$ et l'expression de f qui nous intéresse.

<u>Exemple:</u> $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$



On a $f(x,y) = 0 \iff x^2 + y^2 = 1$

$\iff \|(x,y)\| = 1$

$\iff (x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ pour un $\theta \in [0, 2\pi[$.

On a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \neq 0$ ssi $y \neq 0$.

Donc le théorème des fonctions implicites s'applique en $(\cos\theta, \sin\theta)$ si $\sin\theta \neq 0$

(ie $\theta \neq 0, \pi$)

Si $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par le TFI autour d'un point (x_0, y_0), on a :

$$0 = f(x, \varphi(x)) = x^2 + (\varphi(x))^2 - 1$$

En dérivant, on obtient :

$$0 = 2x + 2\varphi'(x)\varphi(x)$$

donc $\varphi'(x) = \dfrac{-x}{\varphi(x)}$

en particulier $\varphi'(x_0) = \dfrac{-x_0}{y_0}$.

Si on dérive une fois de plus, on a :

$$0 = 2 + 2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)$$

donc $\varphi''(x) = \dfrac{-1 - (\varphi'(x))^2}{\varphi(x)}$

<u>Remarque</u> : Dans cet exemple, on peut trouver φ explicitement :

$$\left((x,y) \in]-1,1[\times]0,1] \text{ et } f(x,y)=0\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2}$$

$$\left((x,y) \in]-1,1[\times [-1,0[\text{ et } f(x,y)=0\right) \Leftrightarrow y = -\sqrt{1-x^2}$$

Par contre, on ne peut pas trouver un tel φ dans un voisinage ouvert de 1 ou de -1.

Donc dans cet exemple on n'avait pas besoin du TFI.

Arcs paramétrés : quelques mots

<u>Définition</u> : • On appelle <u>arc paramétré</u> de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k où I est un intervalle ouvert.

• Le sous-ensemble $f(I) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé le <u>support</u> de l'arc paramétré.

• On dit que deux arcs paramétrés de classe C^k $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : J \to \mathbb{R}^n$ définissent le même <u>arc géométrique</u> s'il existe un difféomorphisme θ de I sur J de classe C^k tq $g = f \circ \theta$.

↪ f et g sont appelées des <u>paramétrisations</u> de cet arc géométrique.

Attention : rappel : θ difféo $\iff$ $\theta' \neq 0$ partout.

<u>Remarque</u> : • Si f et g sont deux paramétrisation du même arc géométrique, alors leurs supports coïncident.

• Par contre, deux arcs géométrique <u>différents</u> peuvent avoir le même support.

↳ <u>Exemple</u> : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ sont deux arcs paramétrés, de même support $f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, mais ne définissent pas le même arc géométrique :

si $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ difféomorphisme, alors

$(f \circ \theta)'(0) = \theta'(0) \neq 0$ et $g'(0) = 0$

donc on ne peut pas avoir $g = f \circ \theta$.

Définition : Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ un arc paramétré. Soit $t \in I$.

- On dit que t définit un <u>point régulier</u> de f si $f'(t) \neq 0$.
- On dit que l'arc paramétré f est <u>régulier</u> si tout $s \in I$ définit un point régulier.

<u>Remarque</u> : Si f et g définissent le m̂ arc géométrique et f est régulier, alors g est aussi régulier :

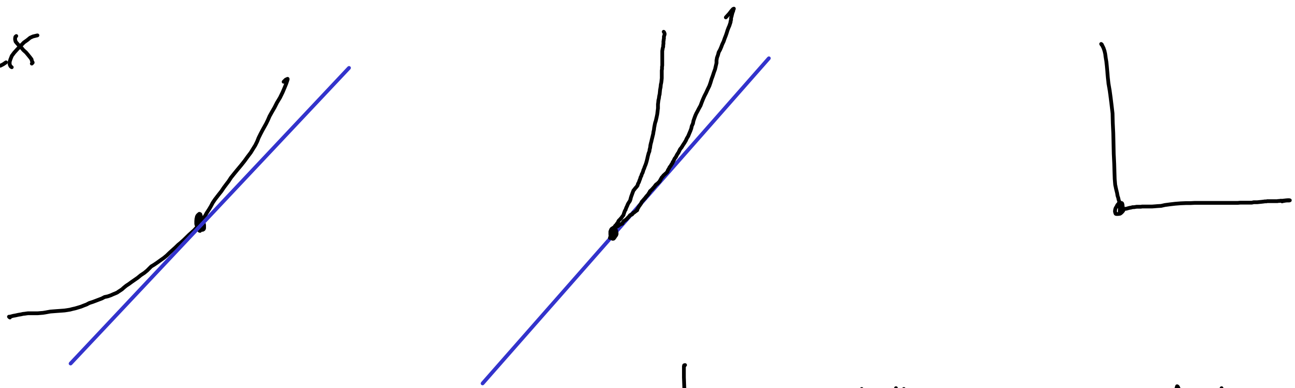
si $g = f \circ \theta$ avec θ difféo, alors $g'(t) = \underbrace{\theta'(t)}_{\substack{\neq 0 \\ \theta \text{ difféo}}} \underbrace{f'(\theta(t))}_{\substack{\neq 0 \\ f \text{ régulier}}} \neq 0$

Définition : Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ un arc paramétré, et $t \in I$ qui définit un point régulier. On appelle <u>tangente à l'arc f en $f(t)$</u> la droite passant par $f(t)$ de vecteur directeur $f'(t)$.

<u>Rem</u>: Là encore, comme $g'(t) = \theta'(t) f'(\theta(t))$ si $g = f \circ \theta$, la tangente ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

⚠ Pour un arc paramétré $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k, si $f'(t) = 0$, il peut se passer plein de choses différentes au point $f(t)$:

par ex



"point ordinaire" "point de rebroussement" pas de tangente

$\underbrace{\text{"point ordinaire" \quad "point de rebroussement"}}_{\text{il y a quand même une "tangente"}}$

Cas particulier : paramétrisation par l'abscisse

(dans le plan $\mathbb{R}^2$)

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe C^1, et $t_0 \in I$ tq $f_1'(t_0) \neq 0$ où $f = (f_1, f_2)$.

En particulier, t_0 définit un point régulier de f.
(rappel : $f' = (f_1', f_2')$)

Par inversion locale, f_1 admet un inverse $\theta : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sur un voisinage ouvert J de t_0 dans I qui est un difféomorphisme sur son image.

Alors $f \circ \theta$ définit le m̂ arc géométrique que $f|_{\theta(J)}$

($\theta(J)$ est un voisinage ouvert de t_0)

De plus, $(f\circ\theta)(t) = (t, (f_2\circ\theta)(t))$

$\longrightarrow$ paramétrisation par l'abscisse.

Ça revient aussi à décrire le support de $f|_{\theta(J)}$ comme le graphe d'une fonction (la fonction $f_2\circ\theta$)

La tangente à cet arc en $f(t_0)$ est la droite passant par $f(t_0)$ et dirigée par $f'(t_0)$.

(de manière équivalente, dirigée par

$$(f\circ\theta)'(\theta^{-1}(t_0)) = \theta'(\theta^{-1}(t_0))\, f'(t_0) = \frac{f'(t_0)}{f_1'(t_0)} = \left(1, \frac{f_2'(t_0)}{f_1'(t_0)}\right))$$

par reparamétrisation

Dans le cas des arc paramétrés plan,
on peut comparer le support à sa tangente
en disant s'il est

- au-dessus de sa tangente en $f(t_0)$
- en-dessous
- traverse sa tangente en $f(t_0)$.

$f : U \longrightarrow f(U)$ difféo

$\Rightarrow f^{-1} : f(U) \longrightarrow U$ de classe C^1

en part C^0

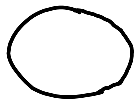
donc $\left(f^{-1}\right)^{-1}(U) = f(U)$ est un ouvert.

Fin du complément de mardi.

Qu'est-ce qu'une courbe dans $\mathbb{R}^2$?

est-ce que c'est l'image d'un arc paramétré $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$?

est-ce que c'est défini par une équation ?

$x^2+y^2=1 \rightsquigarrow$ cercle 

TIL et TFI montrent que :

avec assez de "régularité", les deux réponses coïncident, au moins localement.

Vu mardi : comment passer d'un arc paramétré à une équation, autour d'un point régulier.

En effet, si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un arc paramétré par l'abscisse $f(t) = (t, f_2(t))$, alors

$$f(I) = \{ (x,y) \in I \times \mathbb{R} \,;\; y - f_2(x) = 0 \}$$

De m̂ si f est paramétré par l'ordonnée.

Pour passer d'une courbe à un arc

(dans $\mathbb{R}^2$)

Définition : • Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k ($k \geq 1$). On dit que $\Gamma = \{(x,y) \in U \, ; \, f(x,y) = 0\}$ est une courbe régulière si $\Gamma \neq \emptyset$ et

$$\forall (x,y) \in \Gamma, \qquad d_{(x,y)} f \neq 0 .$$

• On dit que f définit une équation de la courbe régulière Γ.

Soit Γ une courbe régulière d'équation

$f(x,y) = 0$.

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ et $(x_0, y_0) \in \Gamma$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à f en (x_0, y_0) pour obtenir une fonction C^k

$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où I intervalle ouvert contenant x_0, un ouvert V de U contenant (x_0, y_0) tq

$$\begin{cases} (x,y) \in V \\ \text{et} \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in I \\ \text{et} \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$(x,y) \in V \cap \Gamma$$

Donc Γ est localement décrite par l'arc paramétré $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (t, \varphi(t))$$

(de classe C^k, régulier, paramétré par l'abscisse).

c'est-à-dire $V \cap \Gamma = \gamma(I)$.

Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ alors nécessairement

(car $(x_0, y_0) \in \Gamma$, donc $df_{(x_0,y_0)} \neq 0$)

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, donc on peut appliquer le théorème des fonctions implicites en échangeant l'ordre des deux variables.

fin chapitre 3

Chapitre 4 : Équations différentielles

Partie I : Théorème de Cauchy-Lipschitz

→ Qu'est ce qu'une équation différentielle ?

Définition : On appelle équation différentielle d'ordre k une équation de la forme

$$u^{(k)} = f(t, u, u', u'', \dots, u^{(k-1)})$$

où : * l'inconnue est la fonction u qui est une fonction d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

* $u^{(m)}$ est la dérivée m-ième de u $\left(u^{(m)} = (u')^{(m-1)}\right)$

* $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fonction

* I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$
* U est un ouvert de $(\mathbb{R}^n)^k$.

→ Plus important : qu'est-ce qu'une solution ?

<u>Définition</u> : Étant donné $f : I \times U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction $u : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k (où $J \subset I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) telle que

$$\forall t \in J, \qquad (u(t), u'(t), \dots, u^{(k-1)}(t)) \in U$$

$$\text{et} \quad u^{(k)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k-1)}(t))$$

est une <u>solution</u> de l'équation différentielle précédente.

Attention : La donnée d'une fonction contient celle de son ensemble de définition. Ici l'intervalle J fait partie de l'information sur une solution.
En général, $J \neq I$.

Exemple 0 d'équa diff

$\circledast$ $u' = 0$ (c'est-à-dire $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \longmapsto 0$)

Comme une solution est définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, qui est donc connexe, les solutions sont les fonctions constantes.

Exemple 1

(**) $u' = v'$ avec $v : I \to \mathbb{R}^n$ fonction de classe C^1 fixée

(c'est-à-dire $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t,x) \longmapsto v'(t)$)

Alors u est solution de (**) ssi $u - v$ est solution de (*)

donc les solutions de (**) sont les fonctions

$$\begin{aligned} J &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto v(t) + C \end{aligned}$$

où $J \subset I$ intervalle ouvert et $C \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 2

(***) $\quad u'' = 0 \qquad \left(\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x_1, x_2) \longmapsto 0 \end{array} \right)$

Alors u est solution de (***) ssi u' est solution de (*), donc u' est égale à une constante $C \in \mathbb{R}^n$.

Si on fixe cette constante C, alors u est solution de l'équa diff $u' = C$ (de la forme (**) avec $v(t) = tC$) dont les solutions sont les fonctions $\begin{array}{l} J \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto tC + D \end{array}$

$J \subset I$ intervalle ouvert

$D \in \mathbb{R}^n$.

Se ramener à des équa diff d'ordre 1

Si on s'intéresse à une équa diff d'ordre k

$$u^{(k)} = f(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}) \quad \text{avec } f : I \times U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

On peut la remplacer par une équa diff d'ordre 1 équivalente, de la manière suivante.

Posons $\quad g : I \times U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^k$ tq

$$g(t, y_1, \dots, y_k) = (y_2, y_3, \dots, y_k, f(t, y_1, \dots, y_k)).$$

Alors l'équa diff d'ordre 1

$$v' = g(t, v)$$

est équivalente à l'équa diff initiale en écrivant $v = (u, u', u'', \dots, u^{(k-1)})$.

(alors $v' = (u', u'', \dots, u^{(k)})$ si u solution de l'équa diff initiale

$= (u', u'', \dots, u^{(k-1)}, f(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}))$

$= g(t, u, u', \dots, u^{(k-1)})$

$= g(t, v)$

et l'autre sens est tout aussi immédiat)

⚠ On gagne quelque chose en réduisant l'ordre mais la contrepartie est que l'espace d'arrivée est plus grand).

Dans l'exemple 2, on avait utilisé

$$u'' = 0 \iff \begin{cases} u' = u' \\ u'' = 0 \end{cases}$$

$$\iff (u, u')' = (u', 0) .$$

À partir de maintenant, on se concentre pour le cours sur les équations d'ordre 1.

Problèmes de Cauchy

Souvent, ce qui nous intéressera n'est pas une solution quelconque à une équa diff donnée, mais une solution qui vérifie une condition particulière, par exemple, que sa valeur en un point donnée est fixée par avance.
On appelle ça une condition initiale.
On appelle <u>problème de Cauchy</u> la donnée d'une équa diff <u>et</u> d'une condition initiale

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} f : I \times U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t_0 \in I \\ x_0 \in U \end{array}$$

Une solution au pbm de Cauchy consiste en la donnée d'une solution $u : J \to \mathbb{R}^n$ de l'équa diff, telle que $u(t_0) = x_0$.

Rappel : Problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t,u) & (*) \text{ "équation différentielle"} \\ u(t_0) = x_0 & (**) \text{ "condition initiale"} \end{cases}$$

données :
- $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$

  I intervalle ouvert

  U ouvert de $\mathbb{R}^n$
- $t_0 \in I$
- $x_0 \in U$

inconnue : fonction u

solution : une fonction $u : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1, avec J intervalle ouvert inclu dans I tq $u(t_0) = x_0$ et $\forall t \in J$, $u'(t) = f(t, u(t))$

Solutions maximales / Solutions globales

Définition :

- Soient $u_1 : J_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $u_2 : J_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux solutions de l'équa diff ⊛. On dit que u_2 est un <u>prolongement de u_1</u> si :

$$J_1 \subsetneq J_2 \quad \text{et} \quad u_2\big|_{J_1} = u_1 .$$

- On dit qu'une solution $u : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de ⊛ est une <u>solution maximale</u> si elle n'admet aucun prolongement.
- Une solution $u : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de ⊛ avec $J = I$ est appelée une <u>solution globale</u>.

Remarque : Une solution globale est maximale, mais il peut exister des solutions maximales qui ne sont pas globales.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz va montrer que, sous certaines hypothèses sur f, il existe une unique solution maximale satisfaisant une condition initiale fixée (on peut dire une solution maximale à un problème de Cauchy pour f).
Par contre, il ne dit jamais (seul) quand la solution est globale.

Définition : • $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est
$(t,x) \longmapsto f(t,x)$

<u>lipschitzienne par rapport à la variable x</u>

sur $I \times U$ s'il existe un réel $\lambda \geqslant 0$ tq

$\forall t \in I$, $\forall x_1, x_2 \in U$,

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leqslant \lambda \|x_1 - x_2\|$$

⚠ un seul et m̂ t

- $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est
  $(t, x) \longmapsto f(t,x)$

<u>localement lipschitzienne par rapport à x</u>

sur $I \times U$ si :

pour tout $(t_0, x_0) \in I \times U$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\lambda \geq 0$

tq $\forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, $\forall x_1, x_2 \in \mathring{B}(x_0, \varepsilon)$,

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq \lambda \|x_1 - x_2\|$$

⚠ à la fois ε <u>et</u> λ peuvent dépendre de (t_0, x_0).

<u>Remarque:</u> f lipschitzienne

$\Downarrow$

f lipschitzienne par rapport à x

$\Downarrow$

f localement lipschitzienne par rapport à x

<u>Remarque importante</u>: Soit $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. Alors par le théorème des accroissements finis, si B est une boule fermée (donc compacte) centrée en $(t_0, x_0) \in I \times U$, et incluse dans $I \times U$, alors $\forall (t, x_1), (t, x_2) \in B$,

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant \lambda \|x_1 - x_2\|$$

où $\lambda = \max\limits_{(t,x)\in B} |||df_{(t,x)}|||$.

Donc f est localement lipschitzienne par rapport à x.

<u>Exemple</u> : $f(t,x) = tx^2$ défini une fonction localement lipschitzienne par rapport à x (car C^1) mais pas "globalement" lipschitzienne par rapport à x.

Théorème de Cauchy-Lipschitz :

I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$

$(t_0, x_0) \in I \times U$.

Soit $f : \begin{array}{l} I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) \longmapsto f(t, x) \end{array}$ une fonction continue

et localement lipschitzienne par rapport à x sur $I \times U$.

Alors le problème de Cauchy $\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$

admet une unique solution maximale

$u : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1 sur J.

Remarque :

Il y a deux hypothèses sur f :

f est continue sur $I \times U$

et f est loc. Lipschitz. par rapport à x sur $I \times U$.

et plusieurs conclusions :

$\longrightarrow$ il existe une solution au pbm de Cauchy (par définition de classe C^1)

$\longrightarrow$ il existe une solution maximale

$\longrightarrow$ elle est unique.

Exemple de première application

(pour des raisonnements par séparation des variables)

Problème de Cauchy (*) $\begin{cases} u' = u \\ u(0) = x_0 \end{cases}$ dans $\mathbb{R}$

(c'est-à-dire $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) \longmapsto x \end{array}$, $t_0 = 0$, $x_0 > 0$)

On veut résoudre ce pb par séparation des variables

en notant que $\dfrac{u'(t)}{u(t)} = \left(\ln \circ u\right)'(t)$.

(alors on a $(\ln\circ u)'(t) = 1$ d'où $(\ln\circ u)(t) = t + C$)

Problème : • pour diviser par $u(t)$, il faut savoir *a priori* que $u(t) \neq 0$ partout.

• pour prendre le ln, il faut que $u(t) > 0$ partout.

Solution en 3 étapes :

1) La fonction constante égale à 0 est une solution globale (donc maximale) des problèmes de Cauchy $\begin{cases} u' = u \\ u(t_0) = 0 \end{cases}$ pour tout choix de $t_0 \in \mathbb{R}$.

2) Soit $u : J \to \mathbb{R}$ une solution maximale de ⊛, avec $x_0 > 0$.

Supposons par l'absurde que $u(t_0) = 0$ pour un $t_0 \in J$.

Alors u est solution du pbm de Cauchy $\begin{cases} u' = u \\ u(t_0) = 0 \end{cases}$,

donc par unicité dans le thm de Cauchy-Lipschitz, u est la fonction nulle ! Contradiction avec $u(0) = x_0 \neq 0$.

Donc $u(t) \neq 0$ pour tout $t \in J$. Par TVI et comme $u(t_0) = x_0 > 0$, $u(t) > 0$ pour tout $t \in J$.

3) On reprend le raisonnement initial :

on a maintenant le droit de diviser par $u(t)$,

donc d'écrire que $(\ln \circ u)'(t) = 1$, donc

$(\ln \circ u)(t) = t + C$ avec $C = \ln(x_0)$ par la C.I.,

donc $u(t) = x_0 e^t$ pour tout $t \in J$.

Reste à montrer que $J = \mathbb{R}$.

Par l'absurde si $J \subsetneq \mathbb{R}$, la fonction $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto x_0 e^t \end{array}$

est un prolongement de u. Contradiction avec u <u>maximale</u>.

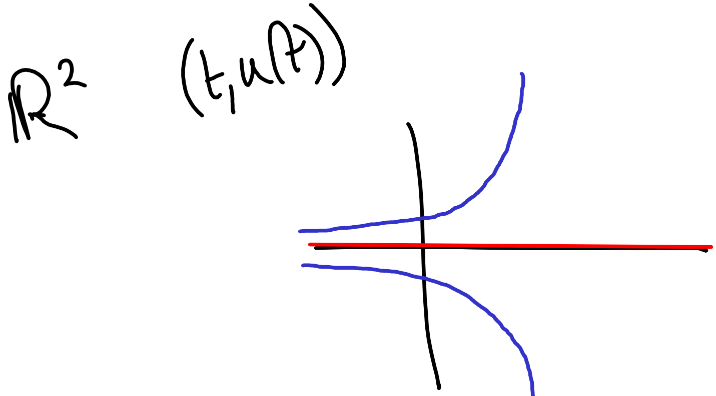
Par unicité encore, le pb est complètement résolu.

Remarque : • On aurait dû écrire que toutes les hypothèses du thm de Cauchy Lipschitz étaient satisfaites :

$$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t,x) \longmapsto x$$

est C^1 donc continue et loc. lipschitz.

• Ici, on a seulement utilisé l'unicité dans le thm de Cauchy Lipschitz.



<u>Moralité</u> : Sous les hypothèses de Cauchy Lipschitz, deux solutions maximales distinctes ne peuvent pas se "croiser".

(si u_1 et u_2 sont deux solutions maximales de la n̂ équa diff $u' = f(t,u)$, et $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, alors $u_1 = u_2$ partout).

On va donner des éléments de preuve de Cauchy-Lipschitz progressivement, en passant en revue certains outils qui sont aussi importants indépendamment.

Formulation intégrale

Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$

(avec f au moins continue) équivaut à résoudre le problème intégral

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

(c'est-à-dire trouver une fonction continue
$u : J \to \mathbb{R}^n$ telle que)

En effet, dans ce cas, le terme de droite est dérivable, de dérivée $t \mapsto f(t, u(t))$, donc u est de classe C^1 et vérifie

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in J, \text{ et } u(t_0) = x_0 .$$

Ce sera dans la preuve de Cauchy-Lipschitz mais aussi en général dans l'étude qualitative des équa. diff.

Remarque sur la régularité des solutions

Rappel : par définition, les solutions aux équa diffs sont au moins de classe C^1.

Si f est de classe C^k, alors u (solution) est de classe C^{k+1}.

Par récurrence : si u et f sont de classe C^k, alors $u' : t \longmapsto f(t, u(t))$ est de classe C^k par composition, donc u est de classe C^{k+1}.

Lemme de Grönwall

Lemme de Gronwall : Soit $t_0 < t_1$ des réels, K un réel, $a : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs positives $(\forall t \in [t_0, t_1],\ a(t) \geqslant 0)$ et $u : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue tq :

$$\forall t \in [t_0, t_1] \qquad u(t) \leqslant K + \int_{t_0}^{t} a(s)\, u(s)\, ds$$

alors

$$\forall t \in [t_0, t_1] \qquad u(t) \leqslant K \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)$$

Preuve : Posons $v(t) = K + \int_{t_0}^{t} a(s)\, u(s)\, ds$ le second membre de l'inégalité en hypothèse.

Le principe de la preuve est qu'il suffit de majorer $v(t)$ par le second membre de l'inégalité en conclusion.

On remarque que v est de classe C^1, avec $v'(t) = a(t)\, u(t)$.

Or $a(t) \geq 0$, donc

$$v'(t) \leq a(t)\, v(t)$$

Multiplions par $e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}$, on a

$$\left(v'(t) - a(t)v(t)\right) e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \leq 0$$

$$\iff \quad w'(t) \leq 0$$

où $w(t) = v(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$.

Donc la fonction w est décroissante, donc

$\forall t \in [t_0, t_1]$, $w(t) \leq w(t_0) = v(t_0) = K$

En conclusion,

$$u(t) \leq v(t) \leq K e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}.$$

$\square$

On appliquera ce lemme pour l'unicité dans Cauchy Lipschitz.

Rappel :

Lemme de Grönwall : Soient $t_0 < t_1$, K des réels

$a : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive

$u : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue tq

$$\forall t \in [t_0, t_1] \qquad u(t) \leqslant K + \int_{t_0}^{t} a(s)\, u(s)\, ds$$

alors

$$\forall t \in [t_0, t_1] \qquad u(t) \leqslant K \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)$$

Cas particulier : Si $K = 0$, alors la conclusion du lemme est $u(t) \leqslant 0$.

Élément de preuve de Cauchy-Lipschitz

Unicité "locale"

$I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert
$U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert

Lemme : $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ continue, loc. lipschitz par rapport à x
$(t,x) \mapsto f(t,x)$

Si $u_1 : J_1 \to \mathbb{R}^n$ et $u_2 : J_2 \to \mathbb{R}^n$ ~~sont~~ deux solutions du même pbm de Cauchy $\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$

alors il existe un intervalle ouvert J tel que $t_0 \in J \subset J_1 \cap J_2$ et $u_1|_J = u_2|_J$.

Preuve : Comme f est loc. lipschitz. par rapport à x, il existe $\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \varepsilon > 0 \end{cases}$ tq $\forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$,

$\forall x_1, x_2 \in \mathring{B}(x_0, \varepsilon)$, $\quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \lambda \|x_1 - x_2\|$

Comme u_1 est C^1 et $u_1(t_0) = x_0$, il existe $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ tq $\forall t \in]t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1[$, $u_1(t) \in \mathring{B}(x_0, \varepsilon)$.

De même pour u_2 : il existe $0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ tq $\forall t \in]t_0 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_2[$, $\begin{cases} u_2(t) \in \mathring{B}(x_0, \varepsilon). \\ u_1(t) \in \mathring{B}(x_0, \varepsilon) \end{cases}$

Par la formulation intégrale du pbm de Cauchy :

$$u_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_2(s))\, ds$$

$$u_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_1(s))\, ds$$

donc

$$u_2(t) - u_1(t) = \int_{t_0}^{t} \left(f(s, u_2(s)) - f(s, u_1(s)) \right) ds$$

Pour appliquer le lemme de Grönwall, on se ramène à une fonction à valeurs réelles en prenant la norme :

$$\| u_2(t) - u_1(t) \| \leqslant \int_{t_0}^{t} \| f(s, u_2(s)) - f(s, u_1(s)) \|\, ds$$

Pour $t \in]t_0 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_2[$

et $s \in [t_0, t]$, on a

$$\| f(s, u_2(s)) - f(s, u_1(s)) \| \leqslant \lambda \| u_2(s) - u_1(s) \|$$

(car $u_1(s)$ et $u_2(s)$ sont dans $\mathring{B}(x_0, \varepsilon)$)

Donc

$$\| u_2(t) - u_1(t) \| \leqslant \int_{t_0}^{t} \lambda \| u_2(s) - u_1(s) \| \, ds$$

qui est l'hypothèse du lemme de Gronwall

pour $u(t) = \| u_2(t) - u_1(t) \|$

$a(t) = \lambda$

$K = 0$

La conclusion du lemme de Grönwall est :

$$\|u_2(t) - u_1(t)\| \leq 0 \quad \text{pour tout } t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_2[.$$

On a le m̂ résultat pour $t \in]t_0 - \varepsilon_2, t_0]$, quitte à remplacer t par $t_0 - t$ dans le raisonnement.

Donc $u_2(t) = u_1(t)$ pour $t \in]t_0 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_2[$.

$\square$

On va maintenant démontrer la partie "unicité" dans le thm de Cauchy-Lipschitz, c-à-d l'unicité des solutions maximales.

Unicité des solutions maximales

Toujours les m̂ hypothèses sur f

<u>Lemme</u> : Si $u_1 : J_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $u_2 : J_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux solutions de l'équa diff $u' = f(t,u)$ et s'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tq $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, alors $\forall t \in J_1 \cap J_2$, $u_1(t) = u_2(t)$.

<u>Preuve</u> : C'est un raisonnement de connexité.

On considère l'ensemble

$$A := \{ t \in J_1 \cap J_2 \mid u_1(t) = u_2(t) \}$$

On a $t_0 \in A$ par hypothèse, donc $A \neq \emptyset$

A est fermé par continuité de u_1 et u_2

$$\left(A = f^{-1}(\{0\}) \text{ avec } \begin{array}{l} f : J_1 \cap J_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \qquad t \longmapsto u_1(t) - u_2(t) \end{array} \right)$$

Mq A est ouvert.

Soit $s \in A$, posons $y = u_1(s) = u_2(s)$.

Alors u_1 et u_2 sont solutions du même pbm de Cauchy $\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(s) = y \end{cases}$

donc par le lemme précédent, il existe $\varepsilon > 0$ tq $\forall t \in]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$, $u_1(t) = u_2(t)$.

C'est-à-dire $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\subset A$.

Donc A est ouvert.

A est un ouvert fermé non vide de $J_1 \cap J_2$.
Or $J_1 \cap J_2$ est un intervalle donc connexe,
donc $A = J_1 \cap J_2$. $\square$

Il ne reste plus qu'à montrer l'existence de solutions pour prouver Cauchy-Lipschitz.
Avant ça, passons par un autre résultat très utile, qui permet souvent de déterminer si une solution maximale est globale.

Explosion en temps fini / Sortie de tout compact

Théorème (de sortie de tout compact) :

$f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue, loc. lipschitz par rapport à x.
$(t, x) \longmapsto f(t,x)$

Soit $u : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $u' = f(t, u)$.
$J =]\alpha, \beta[$

i) Si $\sup J \in I$, alors u "sort de tout compact de U" : ($\sup J = \beta$)

pour tout compact $K \subset U$, il existe $\eta < \beta$ tq

$\forall t \in [\eta, \beta[\, , \quad u(t) \in U \setminus K$

ii) Si $\alpha \in I$, alors pour tout compact $K \subset U$, il existe $y > \alpha$ tq $\forall t \in]\alpha, y]$, $u(t) \in U \setminus K$.

Preuve :

Il suffit de montrer i).

Pour ii), appliquer i) à la fonction $g(t,x) = f(-t,x)$.

Supposons $\beta \in I$ et raisonnons par l'absurde.

On suppose qu'il existe un compact $K \subset U$ tq $\forall y < \beta$, $\exists t \in [y, \beta[$, $u(t) \in K$.

En particulier, on peut construire une suite (t_n) à valeurs dans J telle que $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$ et $u(t_n) \in K$.

Comme K est compact, quitte à remplacer (t_n) par une sous-suite, la suite $(u(t_n))$ converge vers un élément $y \in K$.

On peut trouver $\varepsilon > 0$ tq $[\beta-\varepsilon, \beta] \times K \subset I \times U$ et $[\beta-\varepsilon, \beta[\subset J$. Comme $[\beta-\varepsilon, \beta] \times K$ est compact, f est bornée dessus. Comme $u'(t) = f(t, u(t))$, u' est bornée sur $[\beta-\varepsilon, \beta[$.

Par le théorème des accroissements finis appliqué à u sur $]\beta-\varepsilon, \beta[$, u est lipschitzienne sur $]\beta-\varepsilon, \beta[$.

On a donc en fait $\lim_{t \to \beta} u(t) = y$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \beta - t < \eta \Rightarrow \|u(t) - y\| < \varepsilon$ $\leq \|u(t) - u(t_n)\| + \|u(t_n) - y\|$

Soit $v : J' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une solution au problème de Cauchy $\begin{cases} v' = f(t, v) \\ v(\beta) = y \end{cases}$ (qui existe par le thm de Cauchy Lipschitz)

Posons $w : J \cup (J' \cap [\beta, +\infty[) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in J \\ v(t) & \text{si } t \geq \beta. \end{cases}$$

On a $J \subsetneq J \cup (J' \cap [\beta, +\infty[)$ qui est un intervalle ouvert (car J' est un intervalle ouvert contenant β)

et w est solution de l'équa diff définie par f, ce qui contredit la maximalité de u.

$\square$

→ Pourquoi w est-elle solution en β ?

Il suffit de passer par la formulation intégrale :

$$w(t) = y + \int_{\beta}^{t} f(s, w(s))\, ds$$

Cas particulier :

ici, $U = \mathbb{R}^n$!

Théorème (d'explosion en temps fini) :

Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue, loc lipschitz par rapport à x

$(t, x) \longmapsto f(t, x)$

Soit $u :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale de l'équa diff $u' = f(t, u)$. Alors

i) si $\beta \in I$, alors $\lim_{t \to \beta} \|u(t)\| = +\infty$

ii) si $\alpha \in I$, alors $\lim_{t \to \alpha} \|u(t)\| = +\infty$.

demain

exos 1, 5, 6 de la feuille TD4 partie I.

<u>Théorème d'explosion en temps fini</u> : Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$(t, x) \longmapsto f(t,x)$

continue, loc. lipschitz. par rapport à x. Soit $u :]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $u' = f(t,u)$. Alors

- si $\beta \in I$, alors $\lim_{t \to \beta} \|u(t)\| = +\infty$
- si $\alpha \in I$, alors $\lim_{t \to \alpha} \|u(t)\| = +\infty$.

<u>Exemple</u> : On considère le pb de Cauchy

$$\begin{cases} x' = e^{-tx} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

(c'est-à-dire $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1)
$$(t, x) \longmapsto e^{-tx}$$

Soit $x :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale à ce pb de Cauchy. On veut montrer que x est en fait une solution globale.

Comme $x'(t) = e^{-tx(t)} > 0$ pour $t \in]\alpha, \beta[$, la fonction x est strictement croissante.

Comme $x(0)=0$, on a $x(t)\geqslant 0$ pour $t\in[0,\beta[$

$x(t)\leqslant 0$ pour $t\in]\alpha,0]$.

On en déduit $0\leqslant x'(t)\leqslant e^0=1$ pour $t\in]\alpha,\beta[$.

en effet :

pour $t\in]\alpha,0]$, on a

$t\leqslant 0$, $x(t)\leqslant 0$ donc $tx(t)\geqslant 0$

donc $\underbrace{e^{-tx(t)}}_{=\,x'(t)}\leqslant e^0$

de m̂ pour $t\in[0,\beta[$.

Par intégration, on en déduit :

$$\forall t \in [0,\beta[\,, \quad x(t) - x(0) \leqslant t - 0$$

donc $\quad 0 \leqslant x(t) \leqslant t < \beta$

Par le théorème d'explosion en temps fini, on en déduit que $\beta = +\infty$.

Sinon, on aurait $x_{|[0,\beta[}$ bornée, donc on ne pourrait pas avoir $\lim\limits_{t \to \beta} |x(t)| = +\infty$.

De m, $\forall t \in]\alpha, 0]$, $x(0) - x(t) \leq 0 - t$

$\iff x(t) \geq t$

donc $\alpha < t \leq x(t) \leq 0$

ça contredit le théorème d'explosion en temps fini si $\alpha \in \mathbb{R}$. Donc $\alpha = -\infty$.

On a $]\alpha, \beta[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, donc x est une solution globale.

Exemple de "sortie de tout compact"

On considère le pbm de Cauchy $\begin{cases} x' = \frac{-1}{x} \\ x(0) = 1 \end{cases}$

(c'est-à-dire $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \longmapsto \frac{-1}{x}$ qui est une fonction C^1

ici $U = \mathbb{R}^* \neq \mathbb{R}$ donc on n'est pas dans le cadre du thm d'explosion en temps fini)

Pour résoudre le pbm, on peut raisonner par séparation des variables.

$$x(t)\, x'(t) = -1$$

en intégrant, $\frac{1}{2}(x(t))^2 - \frac{1}{2}(x(0))^2 = -t$

donc $(x(t))^2 = 1 - 2t$ ⊛

Si $x : J \to \mathbb{R}$ est une solution maximale du pbm de Cauchy, alors x est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, et comme J est un intervalle et $x(0)=1$, x est à valeurs dans $]0,+\infty[$.

Donc par ⊛, $x(t) = \sqrt{1-2t}$ pour $t \in J$.

Cette fonction est définie sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$, et on vérifie qu'elle est solution sur cet intervalle, donc $J =]-\infty, \frac{1}{2}[$.

On a $\lim_{t \to \frac{1}{2}} x(t) = 0$.

En particulier, $x(t)$ sort de tout compact K inclus dans $]0,+\infty[$.

Existence de solutions (pour la preuve de Cauchy-Lipschitz)

Lemme: Soit $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$ continue, loc lipschitz par rapport à x. Soit $(t_0, x_0) \in I \times U$. Alors il existe une solution au problème de Cauchy $\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$.

Preuve: On considère la formulation intégrale:

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

qu'on veut résoudre par le thm du point fixe de Banach.

L'application naturelle à considérer est l'application

$$\Phi : \underset{\text{fonction}}{u} \longmapsto \left(t \longmapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \right)$$

dans un espace de fonctions continues à déterminer.

Formellement, on a

$$\left\| \left(\Phi(u) - \Phi(v) \right)(t) \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \left(f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \right) ds \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \| f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \| ds$$

Si f est Lipschitz par rapport à x, de rapport λ, on aurait

$$\left\|\left(\Phi(u)-\Phi(v)\right)(t)\right\| \leqslant \lambda \int_{t_0}^{t} \|u(s)-v(s)\| ds$$

$$\leqslant \lambda |t-t_0| \sup_{s\in[t_0,t]} \|u(s)-v(s)\|$$

et on peut espérer, en imposant que $|t-t_0|$ soit assez petit, que Φ soit contractante pour la norme infinie.

C'est ce qu'on va faire précisément maintenant.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\lambda \geq 0$ tq $\forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$,

$\forall x, y \in \mathring{B}(x_0, \varepsilon)$, $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \lambda \|x - y\|$.

Soit $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$, et

$$M := \sup \Big\{ \|f(t,x)\| \; ; \; (t,x) \in \underbrace{[t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1] \times B(x_0, \varepsilon_1)}_{\text{compact}} \Big\}.$$

Prenons finalement $0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ tel que

$$\lambda \varepsilon_2 < 1 \qquad \text{et} \qquad M \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1 .$$

Alors l'application

$$\Phi : C^0([t_0-\varepsilon_2, t_0+\varepsilon_2], B(x_0,\varepsilon_1)) \longrightarrow C^0([t_0-\varepsilon_2, t_0+\varepsilon_2], B(x_0,\varepsilon_1))$$
$$u \longmapsto \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\,ds\right)$$

est bien définie, c'est-à-dire, bien à valeurs dans cet espace :

$\forall t \in [t_0-\varepsilon_2, t_0+\varepsilon_2]$, on a pour $u \in C^0([t_0-\varepsilon_2, t_0+\varepsilon_2], B(x_0,\varepsilon_1))$

$$\begin{aligned}\left\|\int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\,ds\right\| &\leq |t-t_0| M \\ &\leq \varepsilon_2 M \\ &\leq \varepsilon_1\end{aligned}$$

donc $\Phi(u) \in C^0([t_0-\varepsilon_2, t_0+\varepsilon_2], B(x_0,\varepsilon_1))$.

Φ est contractante pour la norme infinie sur $[t_0-\varepsilon_2, t_0+\varepsilon_2]$:

$$\|(\Phi(u)-\Phi(v))(t)\| \leqslant \lambda |t-t_0| \, \|u-v\|_\infty \quad \text{(déjà vu)}$$
$$\leqslant \lambda \varepsilon_2 \|u-v\|_\infty$$

donc $\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_\infty \leqslant \underbrace{(\lambda\varepsilon_2)}_{<1} \|u-v\|_\infty$.

Enfin, $\left(C^0\left([t_0-\varepsilon_2, t_0+\varepsilon_2], \mathcal{B}(x_0,\varepsilon_1)\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ est un espace de Banach, donc on peut appliquer le thm du point fixe de Banach :

Φ admet un unique point fixe dans

$$C^0\left([t_0-\varepsilon_2, t_0+\varepsilon_2], \mathcal{B}(x_0,\varepsilon_1)\right).$$

On se rappelle que la formulation intégrale montre qu'en fait u est une solution du pbm de Cauchy sur $]t_0-\varepsilon_2, t_0+\varepsilon_2[$, ce qui termine la preuve. $\square$

Fin de la preuve de Cauchy-Lipschitz :

Par le dernier lemme, il existe une solution.

Par l'unicité locale, on peut la prolonger en une solution maximale.

Par l'unicité des solutions maximales, on a fini.

$\square$

Partie II : Équations différentielles linéaires

Définition : Si on peut écrire $f : I \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

sous la forme $f(t,x) = A(t)x + b(t)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{où } A(t) \in M_n(\mathbb{R}) \quad (\text{matrice } n \times n) \\ \text{et } b(t) \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \forall t \in I$$

on dit que l'équa diff $u' = f(t,u)$ est linéaire.

On abrège par EDL.

Remarque : Dans ce cas, on a $U = \mathbb{R}^n$!

Définition : • Une EDL est dite homogène si $b = 0$.

• Sinon, on appelle la fonction b le terme source de l'EDL.

→ On sait résoudre un certain nombre d'EDL.

→ L'ensemble des solutions maximales a une structure forte.

EDL scalaires d'ordre 1

Soient a et b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

On cherche les solutions de l'EDL définie par $f(t,x) = a(t)x + b(t)$.

(c-à-d les fonction $u : J \to \mathbb{R}$ C^1 (J intervalle ouvert) tq $u'(t) = a(t)\,u(t) + b(t)$ pour tout $t \in J$).

Soit $u : J \to \mathbb{R}$ une solution.

Soit $t_0 \in J$.

Multiplions par $e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$ on obtient

$$\underbrace{\left(u'(t) - a(t)\,u(t)\right) e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}}_{\text{dérivée de } t \mapsto u(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}} = b(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$$

Donc

$$u(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} b(w)\, e^{-\int_{t_0}^{w} a(s)ds}\, dw$$

d'où

$$\boxed{u(t) = u(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} b(w)\, e^{\int_{w}^{t} a(s)ds}\, dw}$$

Pour tout choix de $u(t_0) \in \mathbb{R}$, la fonction de droite donne une solution, définie sur I, donc une solution globale, de l'EDL, et il n'y en a pas d'autre.

<u>Remarque</u> : Le fait que les solutions maximales soient globales est vrai pour toutes les EDL, on devrait le voir plus tard.

<u>Attention</u> : cette solution générale n'est pas à retenir absolument.

<u>Méthode habituelle de résolution</u>

de (E) : $u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$

1) On traite d'abord l'équation homogène

$$(H) \quad u'(t) = a(t)\,u(t)$$

Pour ça, on retient que les solutions sont les fonctions

$$u_0(t) = C e^{\tilde{a}(t)} \qquad C \in \mathbb{R}$$

$\tilde{a}$ primitive de a

2) On cherche une solution particulière v

→ évidente ?

→ variation de la constante

(ça revient essentiellement au calcul fait plus tôt)

3) Les solutions de (E) sont de la forme

$$Ce^{\tilde{a}(t)} + v(t) \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Exemples EDL scalaires d'ordre 1

• pbm de Cauchy $\begin{cases} x' = \frac{2}{t} x \\ x(1) = 2 \end{cases}$

C'est une EDL homogène avec $a(t) = \frac{2}{t}$ sur $]0,+\infty[$.

On a comme primitive $\tilde{a}(t) = 2\ln(t)$

donc une solution de l'équation différentielle $x' = \frac{2}{t} x$

est de la forme $x(t) = C e^{2\ln t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

$$= C t^2$$

Pour une telle solution on a $x(1) = C$

Donc la solution maximale au pbm de Cauchy est la

fonction $x :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto 2t^2$$

- pbm de Cauchy $\begin{cases} x' = \dfrac{t}{t^2-1}\, x + 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

C'est une EDL avec $a :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto \dfrac{t}{t^2-1}$

$b :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto 1$

Pour l'EDL homogène $x' = \dfrac{t}{t^2-1}\, x$:

on cherche une primitive de a.

$$\frac{t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ \frac{-2t}{1-t^2}$$

Donc $\tilde{a} : t \longmapsto \frac{1}{2} \ln(1-t^2)$ est une primitive de a sur $]-1,1[$.

donc les solutions de l'EDL homogène sont les

$$t \mapsto C\sqrt{1-t^2} \quad \text{pour } C \in \mathbb{R}.$$

Pour une solution particulière : variation de la constante

considérons $x : t \mapsto C(t)\sqrt{1-t^2}$ où C fonction C^1

alors $x'(t) = C'(t)\sqrt{1-t^2} - \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}C(t)$

Donc $x(t)$ est solution de l'équa diff si

$$C'(t)\sqrt{1-t^2} - \cancel{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}C(t)} = \cancel{\frac{t}{t^2-1}C(t)\sqrt{1-t^2}} + 1$$

$$C'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$\rightsquigarrow$ dérivée usuelle (de arcsin)

→ solution particulière : $x(t) = \operatorname{arcsin}(t)\sqrt{1-t^2}$.

Solution générale : $x(t) = (C + \operatorname{arcsin}(t))\sqrt{1-t^2}$ pour $C \in \mathbb{R}$.

Solution au pb de Cauchy : $x(t) = (1 + \operatorname{arcsin}(t))\sqrt{1-t^2}$.

vers les EDL en dim quelconque
à coeffs constants

Exponentielles de matrices

<u>Proposition/définition</u> : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ (matrice $n \times n$ réelle).
Alors la série de terme général $\frac{A^k}{k!}$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$. Sa somme est appelée l'<u>exponentielle</u> de A, notée $\exp(A)$ ou e^A.

<u>Preuve</u> : On choisit une norme triple $|||\cdot|||$ sur $M_n(\mathbb{R})$, de sorte que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $|||AB||| \leq |||A|||\cdot|||B|||$.

Comme $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ est un ev de dim finie, donc complet, il suffit de montrer que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente, c'est à dire que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\left|\left| \frac{A^k}{k!} \right|\right|\right| < +\infty.$$

Comme la norme est sous multiplicative,

$\forall k,\ |||A^k||| \leq |||A|||^k$, donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\left|\left| \frac{A^k}{k!} \right|\right|\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|||A|||^k}{k!} = \exp(|||A|||) < +\infty.$$

$\square$

Exemples: • $\exp(0_n) = I_n$

• Si $A = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ est diagonale, alors

$\forall k,\ A^k = \mathrm{diag}(a_1^k, \dots, a_n^k)$,

donc $\exp(A) = \mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_n^k}{k!} \right) = \mathrm{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})$.

- $\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdots$

car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $k \geqslant 2$.

Proposition : Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$, alors

$$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}.$$

Preuve : Sur les sommes partielles, on a :

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(PAP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{PA^kP^{-1}}{k!}$$

$$= P\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}\right)P^{-1}$$

On passe à la limite quand $m \to \infty$.

(on peut à droite car le produit de matrices est continu (polynomial)) $\square$

Cette proposition permet de calculer l'exponentielle de matrices qu'on sait diagonaliser.

Proposition : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. L'application $\phi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto e^{tA}$

est de classe C^1, et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Preuve : D'après la définition de l'exponentielle de matrices, ϕ est la somme de la série de fonctions de terme général

$$\phi_k : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R}), \quad t \mapsto t^k \frac{A^k}{k!}.$$

Les ϕ_k sont clairement C^1, avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_0'(t) = 0$$

$$\phi_k'(t) = t^{k-1} \frac{A^k}{(k-1)!} \qquad \forall k > 0.$$

Pour tout $T > 0$, on a :

$$\forall t \in [-T, T], \ \forall k \in \mathbb{N}^*, \ |||\phi_k'(t)||| \leq |t|^{k-1} \frac{|||A|||^k}{(k-1)!}$$

$$\leq |||A||| \underbrace{\frac{(T|||A|||)^{k-1}}{(k-1)!}}_{\text{terme général de } \exp(T|||A|||)}$$

donc la série $\sum_{k \geq 0} \phi_k'$ est normalement convergente sur $[-T, T]$.

On en déduit que ϕ est de classe C^1 sur $[-T,T]$ et que

$$\phi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} \frac{A^k}{(k-1)!}$$

$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(tA)^{k-1}}{(k-1)!} = A e^{tA}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(tA)^{k-1}}{(k-1)!} \right) A = e^{tA} A .$$

$\square$

EDL homogènes à coefficients constants

<u>Théorème</u> : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

Alors le problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$

admet une unique solution globale : la fonction

$$X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto \underbrace{e^{tA}}_{\text{matrice } n \times n} \underbrace{X_0}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Preuve :

- Il est clair que la fonction $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, X) \longmapsto AX$

est linéaire, donc C^1, donc vérifie les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.

$\longrightarrow$ Il existe une unique solution maximale.

- Il suffit donc de vérifier que $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto e^{tA}X_0$

est solution globale.

On a bien $X(0) = e^{0_n}X_0 = I_nX_0 = X_0$.

De plus, par composition et par la proposition précédente,

$$X'(t) = Ae^{tA}X_0$$
$$= AX(t) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Application

Proposition : Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui **commutent**. Alors

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A).$$

Preuve : Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

Considérons $\begin{array}{rl}\Phi : \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto e^{tA}e^{tB}X_0\end{array}$ et $\begin{array}{rl}\Psi : \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto e^{t(A+B)}X_0\end{array}$

Ψ est l'unique sol max du pbm de Cauchy $\begin{cases} X' = (A+B)X \\ X(0) = X_0 \end{cases}$.

On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi'(t) = Ae^{tA}e^{tB}X_0 + e^{tA}Be^{tB}X_0$

On vérifie facilement que $AB=BA \Rightarrow e^{tA}B = Be^{tA}$

(même preuve que pour la conjugaison)

donc $$\phi'(t) = (A+B)\, e^{tA} e^{tB} X_0$$
$$= (A+B)\,\phi(t)$$

De plus $\phi(0) = X_0$.

Donc $\phi = \psi$ par unicité.

En prenant $t=1$, on obtient $e^A e^B X_0 = e^{A+B} X_0$.

C'est vrai pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $e^A e^B = e^{A+B}$.

$\square$

⚠ Ce n'est pas vrai en général si A et B ne commutent pas.

<u>Corollaire</u> : Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $e^A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

<u>Preuve</u> : $I_n = \exp(0_n) = \exp(A - A) = e^A e^{-A}$ $\square$

Rappel de jeudi

<u>Théorème</u> : $A \in M_n(\mathbb{R})$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

La fonction $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est
$t \longmapsto e^{tA} X_0$

l'unique solution globale du pbm de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

<u>Exemple</u> : Résolvons l'EDL $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$.

(C'est une autre manière d'écrire

$X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.)

Il suffit de calculer $\exp(tA)$.

On peut essayer de diagonaliser A.

On peut remarquer que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre -1.

Si λ est l'autre vp de A, on a $\lambda - 1 = \mathrm{tr}(A) = 0$, donc $\lambda = 1$.

On peut en effet trouver un vecteur propre pour la vp 1 ($\Leftrightarrow$ un élément non nul du noyau de $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$) : par exemple $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

et

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$\hookrightarrow$ On pourrait calculer la matrice inverse et le produit pour conclure.

Sinon, on peut aussi décrire les solutions dans la base de vecteurs propres :

si $X_0 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

alors
$$e^{tA} X_0 = \alpha_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-t} + 3\alpha_2 e^{t} \\ -\alpha_1 e^{-t} - \alpha_2 e^{t} \end{pmatrix}.$$

En effet : si Y est vecteur propre de A pour une valeur propre λ, alors Y est vecteur propre de e^{tA} pour la valeur propre $e^{t\lambda}$.

Application aux EDL scalaires d'ordre 2 homogène à coeffs constants

Considérons l'EDL $x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$

avec $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

Comme on a vu au début du chapitre 4, on peut se ramener à une équa diff d'ordre 1 :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \text{ solution de } X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} X$$

Un pb de Cauchy pour une telle équation consiste en la donnée d'une condition initiale

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x(t_0) = \alpha \\ x'(t_0) = \beta. \end{cases}$$

(la valeur de x et de sa dérivée au même point sont fixées).

Par le théorème rappelé plus tôt, le pbm de Cauchy $\begin{cases} x''+a_1x'+a_0x=0 \\ x(0)=\alpha, \quad x'(0)=\beta \end{cases}$ admet une unique solution globale : la fonction

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$t \longmapsto$ la première coordonnée du vecteur

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de savoir calculer l'exponentielle d'une matrice réelle 2×2 pour conclure.

<u>Définition</u> : L'<u>équation caractéristique</u> associée à l'équa diff $x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$ est l'équation du second degré $r^2 + a_1 r + a_0 = 0$.

<u>Remarque</u> : Cette équation correspond exactement au polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$!

$$\det\begin{pmatrix} -r & 1 \\ -a_0 & -r-a_1 \end{pmatrix} = r^2 + a_1 r + a_0 .$$

Les solutions de l'équation caractéristique fournissent donc les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} =: A$

On a différents cas à traiter :

① si il y a deux solutions réelles r_1 et r_2 distinctes, alors A est diagonalisable :

$$A = P \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

et $\exp(tA) = P \begin{pmatrix} e^{tr_1} & 0 \\ 0 & e^{tr_2} \end{pmatrix} P^{-1}$

On a alors $X(t) = P \begin{pmatrix} e^{tr_1} & 0 \\ 0 & e^{tr_2} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

donc $x(t) = \gamma e^{tr_1} + \delta e^{tr_2}$ avec $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

$$x'(t) = \gamma r_1 e^{tr_1} + \delta r_2 e^{tr_2}$$

On n'est pas obligé de calculer P, P^{-1} etc pour déterminer γ et δ : il suffit de revenir à la condition initiale

$$\begin{cases} x(0)=\alpha \\ x'(0)=\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \gamma+\delta=\alpha \\ \gamma r_1+\delta r_2=\beta \end{cases}.$$

<u>Moralité</u> : Dans cette situation (deux solutions réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ à l'équation caractéristique), on retient que les solutions sont de la forme $x(t)=\gamma e^{r_1 t}+\delta e^{r_2 t}$ et on identifie γ et δ avec les conditions initiales.

(2) si on a une racine réelle double r,
alors A n'est pas diagonalisable

$$\underset{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}}{\overset{\shortparallel}{A}}$$

(sinon, $A = P\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}P^{-1} = rI_2$, absurde).

Par réduction de Jordan (cf cours alg linéaire et grps)
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.

On a $\exp\left(t\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}\right) = \exp\left(trI_2 + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

ces deux matrices commutent

$$= \exp(trI_2)\exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^{tr}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$X(t) = P e^{tr}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

et donc

$$\underline{x(t) = \gamma e^{tr} + \delta t e^{tr}} \quad \text{avec } \gamma \in \mathbb{R},\ \delta \in \mathbb{R}.$$

$$x'(t) = \gamma r e^{tr} + \delta e^{tr} + \delta r t e^{tr}$$

Là encore, on retient que les solutions sont de cette forme, et on retrouve γ et δ avec les conditions initiales.

$$\begin{cases} x(0) = \alpha \\ x'(0) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = \alpha \\ \gamma r + \delta = \beta \end{cases}$$

③ enfin, si l'équation caractéristique a deux solutions complexes non réelles conjuguées

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

La forme réduite de Jordan réelle de A est

$\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda + i\mu$ solution de l'équation caractéristique.

On a alors

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\right) = \exp\left(t\lambda I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -t\mu \\ t\mu & 0 \end{pmatrix}\right)$$

commutent

$$= e^{t\lambda} \exp\begin{pmatrix} 0 & -t\mu \\ t\mu & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice</u> : $\exp\begin{pmatrix} 0 & -t\mu \\ t\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t\mu) & -\sin(t\mu) \\ \sin(t\mu) & \cos(t\mu) \end{pmatrix}$

On a donc $X(t) = P e^{t\lambda} \begin{pmatrix} \cos(t\mu) & -\sin(t\mu) \\ \sin(t\mu) & \cos(t\mu) \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

donc $\underline{x(t) = \gamma e^{t\lambda} \cos(t\mu) + \delta e^{t\lambda} \sin(t\mu)}$.

et on identifie γ et δ avec les conditions initiales.

<u>Exemple</u> : $x'' = s x$ avec $s \in \mathbb{R}$ fixé.

$\rightsquigarrow$ équation caractéristique $r^2 = s$

① si $s > 0$, deux racines réelles $\pm\sqrt{s}$, donc une solution est de la forme $x(t) = \gamma e^{\sqrt{s}\, t} + \delta e^{-\sqrt{s}\, t}$

② si $s = 0$, une racine double 0, donc une solution est de la forme $x(t) = \gamma + \delta t$

③ si $s < 0$, deux racines cplx conjuguées $\pm i\sqrt{s}$, donc une solution est de la forme $x(t) = \gamma \cos(\sqrt{s}\, t) + \delta \sin(\sqrt{s}\, t)$.

Les solutions maximales d'une EDL sont globales

<u>Théorème</u> (parfois appelé thm de Cauchy-Lipschitz linéaire).
Soient $A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues. Soit $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors le pbm de Cauchy $\begin{cases} X' = A(t)X + b \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ admet une unique solution maximale, qui est globale.

<u>Preuve</u> : La fonction
$$f : \begin{array}{rcl} I \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (t, X) & \longmapsto & A(t)X + b(t) \end{array}$$
est continue et localement Lipschitzienne par rapport à X :

pour tout segment $K \subset I$, $\forall t \in K$, $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|f(t,X_1) - f(t,X_2)\| &= \|A(t)(X_1 - X_2)\| \\ &\leq |||A(t)|||\, \|X_1 - X_2\| \\ &\leq \lambda_K \|X_1 - X_2\| \end{aligned}$$

où $\lambda_K = \sup \{ |||A(t)||| \,;\, t \in K \}$.

Donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, et il existe une unique solution maximale.

Pour montrer qu'elle est globale, on va redémontrer son existence en reprenant l'approche par point fixe.

Montrons l'existence pour $t \geq t_0$.

Définissons par récurrence une suite de fonctions sur I.

$\forall t \in I$

$$\phi_0(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds$$

$$\phi_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(s)\,\phi_n(s) + b(s)\big)\,ds$$

Ce sont des fonctions continues sur I,

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in I$,

$$\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\big(\phi_n(s) - \phi_{n-1}(s)\big)\,ds$$

Pour $t \geq t_0$

$$\|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(s)(\phi_n(s) - \phi_{n-1}(s))\|\,ds$$

Donc, pour $K = [t_0, t_1] \subset I$, et $t \in K$,

$$\|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)\| \leq \lambda_K \int_{t_0}^{t} \|\phi_n(s) - \phi_{n-1}(s)\| ds.$$

Soit $N := \sup_{t \in K} \|\phi_1(t) - \phi_0(t)\|$.

alors on a $\|\phi_2(t) - \phi_1(t)\| \leq \lambda_K \int_{t_0}^{t} N \, ds = \lambda_K N (t - t_0)$

puis $\|\phi_3(t) - \phi_2(t)\| \leq \lambda_K \int_{t_0}^{t} \lambda_K N (s - t_0) \, ds$

$$\leq \lambda_K^2 N \frac{(t-t_0)^2}{2}$$

si on continue, par récurrence, on obtient

$$\|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)\| \leqslant N \underbrace{\frac{(\lambda_K(t-t_0))^n}{n!}}_{\text{terme général de la série de somme } \exp(\lambda_K(t-t_0))}$$

Donc (ϕ_n) est une suite de Cauchy dans $\underbrace{C^0(K, \mathbb{R}^n)}_{\text{espace de Banach}}$ pour la norme uniforme sur K.

Donc (ϕ_n) converge vers une fonction continue $\phi : K \to \mathbb{R}^n$, qui, par passage à la limite dans la relation de récurrence, est solution du problème de Cauchy.

Par unicité des solutions, Φ coïncide sur K avec la solution maximale au pb de Cauchy.

Comme on peut recouvrir $I \cap [t_0, +\infty[$ par des segments de la forme $[t_0, t_1]$, on en déduit que la solution maximale au pb de Cauchy est définie sur $I \cap [t_0, +\infty[$.

L'autre côté $(I \cap]-\infty, t_0])$ se montre de la même manière.

$\square$

Par la même preuve, on peut montrer le résultat plus général :

<u>Théorème</u> (de Cauchy-Lipschitz global) : Si

$$f : \begin{array}{l} I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t,x) \longmapsto f(t,x) \end{array}$$ est continue et

$\forall t_0 \in I, \exists \varepsilon > 0, \exists \lambda \geq 0$ tq

$\forall t \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[, \forall x_1, x_2 \in U,$

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq \lambda \|x_1 - x_2\|$$

alors toute solution maximale à l'équa diff

$x' = f(t,x)$ est <u>globale</u>.

Aujourd'hui : • remarques sur les exos (corrigés sur Moodle)

• structure des solutions des EDL

• méthode de variation des constantes

} fin de la partie II

2 CM semaine prochaine : petite partie III équations différentielles autonomes

Sur les exos :

→ pour EDL homogènes : pas besoin de variation de la constante !!!

→ pour EDL avec terme source $b(t)$:

tjrs essayer de deviner une solution particulière

↳ chercher une solution polynomiale

par ex si $A(t)$ et $b(t)$ sont polynomiales

par ex : exo 2.3)

→ Quand on utilise des thm (par ex dérivabilité des intégrales à paramètres), donner leur nom si possible, et vérifier toutes les hypothèses clairement (par ex en l'annonçant)

Structure des solutions des EDL homogènes

<u>Théorème</u> : Soit $A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ une fonction continue.
Alors l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions globales à l'EDL $X' = A(t)X$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, de dimension n,
Plus précisément, si $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, et $\forall i$, Φ_i est la solution au ~~pm~~ de Cauchy

$$\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(0) = X_i \end{cases}$$

alors $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ est une base de $\mathcal{E}$.

<u>Lemme</u> : Soit $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ une famille de solutions de $X' = A(t)X$. Alors les ASSE :

i) $\forall t \in I$, $(\Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t))$ est libre

ii) $\exists t \in I$, $(\Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t))$ est libre

<u>Preuve</u> : i) $\Rightarrow$ ii) évident. Montrons ii) $\Rightarrow$ i) :

Supposons que $(\Phi_1(t_0), \dots, \Phi_n(t_0))$ soit libre pour un $t_0 \in I$.

Soit $t_1 \in I$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi_i(t_1) = 0$$

Par linéarité de l'équa diff, la fonction $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi_i$ est solution au pbm de Cauchy

$$\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(t_1) = 0 \end{cases}.$$

Or l'unique solution maximale (globale) est la fonction nulle.

Donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi_i$ est la fonction nulle,

donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi_i(t_0) = 0$.

Comme $(\Phi_1(t_0), \dots, \Phi_n(t_0))$ est libre, ça implique $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Donc $(\Phi_1(t_1), \dots, \Phi_n(t_1))$ est libre. $\square$

<u>Preuve du thm</u> : C'est essentiellement évident maintenant :

$\mathcal{E}$ est non vide $(0 \in \mathcal{E})$

$\mathcal{E} \subset C^1(I, \mathbb{R}^n)$ par défn des solutions

$\mathcal{E}$ est stable par combinaisons linéaires

$\left.\right\}$ c'est un sev.

Considérons la famille $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ de l'énoncé.

Par le lemme, c'est une famille libre.

Vérifions qu'elle est génératrice :

Soit $\Phi \in \mathcal{E}$, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

tq $\Phi(0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi_i(0)$.

Donc ϕ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i$ sont solutions du même pbm de Cauchy $\begin{cases} X' = A(t) X \\ X(0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \end{cases}$

donc par unicité $\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i$.

Donc $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est bien une base de $\mathcal{E}$, qui est de dimension n. $\square$

Cas des EDL non homogènes

ça va vite :

<u>Remarque clef</u> : Soit Φ_0 une solution de $\left(X' = A(t)X + b(t) \right)$ $\circledast$

alors Φ est solution de $\circledast$

ssi

$\Phi - \Phi_0$ est solution de $\left(X' = A(t)X \right)^{\circledast\circledast}$

<u>Conséquence</u> : L'ensemble $\mathcal{A}$ des solution de l'EDL $\circledast$ est un sous-espace <u>affine</u> de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, dont la direction est donnée par l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des solutions de $\circledast\circledast$.

Variation des constantes

$\rightsquigarrow$ comment trouver une solution particulière Φ_0 à une EDL non homogène.

Mise en garde préalable : ⚠ en général (si $A(t)$ n'est pas constante), on ne sait déjà pas trouver les solutions d'une EDL homogène.

La méthode de variation des constantes repose sur le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Soit $\phi_1, \dots, \phi_n$ des fonctions de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ telles que pour tout $t \in I$, la famille $(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$ soit libre. Soit $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Alors il existe un unique n-uplet de fonctions $(u_1, \dots, u_n)$ de $C^1(I, \mathbb{R})$ tel que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, \phi_i(t).$$

<u>Preuve</u> : Notons

$$u : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto (u_1(t), \dots, u_n(t))$$

et

$$M : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & \cdots & \phi_n(t) \end{pmatrix}$$

colonnes de la matrice

La conclusion du lemme est :

$$\underbrace{f(t)}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{M(t)}_{\in M_n(\mathbb{R})} \; \underbrace{u(t)}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Comme les $(\Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t))$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ pour tout t, la fonction M est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$.

On a vu au chapitre 3 que
$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) &\to GL_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^{-1} \end{aligned}$$
est un difféomorphisme, donc

$t \mapsto (M(t))^{-1}$ est une fonction C^1 (par composition).

Donc $\begin{array}{rcl} u : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & (M(t))^{-1} f(t) \end{array}$ est une fonction $\underline{\underline{C^1}}$

et bien sûr la seule qui vérifie $f(t) = M(t)u(t)$. $\square$

<u>Remarque</u> : On a vu dans le lemme pour la structure des EDL homogènes comment produire des n-uplets de fonctions $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ qui vérifient les hypothèses : il suffit de prendre une base de l'espace des solutions d'une EDL homogène sur I.

<u>Théorème</u> : Soient $A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des fonctions continues. Soit $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ une base des solutions de l'EDL homogène $X' = A(t)X$.
Soit $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Notons $(u_1, \dots, u_n) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction C^1 telle que $f = \sum_{i=1}^{n} u_i \Phi_i$.
Alors f est solution de l'EDL $X' = A(t)X + b(t)$ si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad \sum_{j=1}^{n} u_j'(t)\, \Phi_j(t) = b(t)$$

Remarque : On se rappelle de la preuve précédente que la matrice $(\Phi_1 \cdots \Phi_n)$ est inversible, donc on peut (en théorie) trouver les u_j' en résolvant le système, puis intégrer.

Preuve : f est solution ssi

$$\left(\sum_{j=1}^{n} u_j \phi_j\right)'(t) = A(t)\left(\sum_{j=1}^{n} u_j(t)\phi_j(t)\right) + b(t)$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_j' \phi_j + \sum_{j=1}^{n} u_j \phi_j' = \sum_{j=1}^{n} u_j \quad A \phi_j + b$$ (appliqué en t)

or par hypothèse, $\phi_j' = A\phi_j$, donc f est solution ssi $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j' \phi_j = b$

$\square$

Cas des coeff constants : formule de Duhamel

Terminologie : L'équa diff $X' = A(t)X + b(t)$ est dite à coefficients constants si $A(t)$ est constante. (mais $b(t)$ ne l'est pas nécessairement).

Théorème (formule de Duhamel) : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b : I \to \mathbb{R}^n$ continue, $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors l'unique solution globale au pbm de Cauchy $\begin{cases} X' = AX + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

est la fonction $\Phi : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & e^{(t-t_0)A} X_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s)\, ds \end{array}$.

Preuve : Il suffit de vérifier que ϕ est solution, mais on va plutôt vérifier que la méthode de variation des constantes fonctionne dans ce cas.

Les solutions de l'EDL homogène $X' = AX$ sont de la forme $t \mapsto e^{tA} Y_0$ avec $Y_0 \in \mathbb{R}^n$.

On écrit $\phi(t) = e^{tA} Y(t)$

Comme $t \mapsto e^{tA}$ et son inverse $t \mapsto e^{-tA}$ sont des difféos, ϕ est C^1 ssi Y l'est.

On a dans ce cas

$$\phi'(t) - A\phi(t) = \cancel{Ae^{tA}Y(t)} + e^{tA}Y'(t) - \cancel{Ae^{tA}Y(t)}$$

$$= e^{tA}Y'(t)$$

Donc ϕ est solution de $X' = AX + b(t)$ ssi

$$Y'(t) = e^{-tA}b(t),$$

donc ssi il existe $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ tq

$$\forall t \in I \qquad Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s)\,ds.$$

Comme $Y_0 = Y(t_0) = e^{-t_0A}\phi(t_0) = e^{-t_0A}X_0$,

on obtient la formule de Duhamel. $\square$

fin partie II

Fin de l'<u>exo 15</u> du TD partie I

$$t x' = t + x^2$$

soit $x :]0, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale de cette équation.

On a vu que x est strictement croissante, donc $x(t)$ admet une limite (finie ou $-\infty$) quand $t \longrightarrow 0$.

Pour $0 < t \leq 1$

on a

$$\frac{1}{t} = \frac{x'}{t+x^2} \leq \frac{x'}{x^2}$$

On intègre entre t et 1

$$\int_t^1 \frac{1}{s}\,ds \leq \int_t^1 \frac{x'(s)}{x^2(s)}\,ds$$

$$\underbrace{-\ln t}_{\xrightarrow[t \to 0]{} +\infty} \leq \frac{-1}{x(1)} - \frac{-1}{x(t)}$$

Donc $x(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ (sinon la limite à droite serait finie)

Partie III : Équations différentielles autonomes

$\rightsquigarrow$ Pousser plus loin l'étude qualitative des équa diff

Équa diff autonomes

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$
$$\cup$$

<u>Définition</u> : Une équa diff $x' = f(t,x)$ avec $f : I\times U \to \mathbb{R}^n$ est dite autonome si $f(t,x)$ ne dépend pas de t.

Dans ce cas, on supposera toujours $I = \mathbb{R}$.

<u>Exemple</u> : • $x' = 0$, $x' = x$ sont autonomes

$x' = t$ n'est pas autonome.

- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, l'EDL à coefficients constants $x' = Ax$ est une équa diff autonome.

On ne perd pas en généralité si on ne considère que les équa diff autonome :

si $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dépend de t,

on considère $y = (t, x)$ comme variable,

alors

$$\underbrace{x' = f(t, x)}_{\text{équa diff non autonome}} \iff \underbrace{y' = (1, f(y))}_{\text{équa diff autonome}}$$

pour les conditions initiales :

$$x(t_0) = x_0 \iff y(t_0) = (t_0, x_0)$$

⚠ Comme quand on passe d'une équa diff d'ordre 2 à une équa diff d'ordre 1, on travaille dans un espace de dimension plus grande.

Définition : Pour une équa diff autonome $x' = F(x)$, avec $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on appelle U l'<u>espace des phases</u>.

<u>Exemple</u> : • $x' = x^2$ dans $\mathbb{R}$ → équa diff autonome
⇝ l'espace des phases est $\mathbb{R}$.

• $x' = tx$ dans $\mathbb{R}$ ⇝ non autonome

$\Updownarrow$ $y = (y_1, y_2) = (t, x)$

$y' = (1, y_1 y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$ ⇝ équa diff autonome

⇝ l'espace des phases est $\mathbb{R}^2$.

- $x'' = f(x)$ dans $\mathbb{R}$ autonome, mais d'ordre 2

$$\Big\Updownarrow \quad y = (y_1, y_2) = (x, x')$$

$$y' = (y_2, f(y_1))$$ autonome d'ordre 1

$\rightsquigarrow$ l'espace des phases est $\mathbb{R}^2$.

- $x'' = f(t, x)$ dans $\mathbb{R}$

$$\Big\Updownarrow \quad y = (x, x')$$

$$y' = (y_2, f(t, y_1)) =: g(t, y)$$

$$\Big\Updownarrow \quad z = (t, y)$$

$$z' = (1, g(z)).$$

$\rightsquigarrow$ l'espace des phases est $\mathbb{R}^3$.

<u>Remarque</u> : $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fixée $\rightsquigarrow$ $x' = F(x)$ équa diff <u>autonome</u>

$]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$

$\gamma :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ fonction et $\tilde{\gamma} :]\alpha - t_0, \beta - t_0[\longrightarrow \mathbb{R}^n$
$$t \longmapsto \gamma(t + t_0)$$

On a une équivalence :

γ est solution de $x' = F(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\tilde{\gamma}$ est solution de $x' = F(x)$.

Conséquence : pour une équa diff autonome, on ne s'interessera en général qu'à des pbm de Cauchy en 0.

Champs de vecteurs et flot

<u>Définition</u>: (Pour ce cours) On appelle <u>champ de vecteurs</u> sur U (ouvert de $\mathbb{R}^n$) une fonction $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement Lipschitzienne.

Conséquence de la définition : Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équa diff autonome associée $x' = F(x)$.

On se fixe pour la suite un champ de vecteur $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Pour tout $x_0 \in U$, on note $\gamma_{x_0} : I_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la solution maximale au pb de Cauchy $\begin{cases} x' = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

(donc I_{x_0} est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient 0).

__Définition__ : On appelle __flot__ du champ de vecteur F l'application

$$\begin{aligned} \phi : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto \phi(t,x) = \gamma_x(t) \end{aligned}$$

définie sur l'ensemble $\Omega = \bigcup_{x \in U} I_x \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times U$.

__Exemple__ : Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$, son flot est donné par

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto e^{tA} x \end{aligned}.$$

Définition : Un champ de vecteur F est dit complet si son flot est défini sur $\mathbb{R}\times U$. Autrement dit, si toutes les solutions maximales de l'équa diff autonome $x' = F(x)$ sont globales.

Exemples : • Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $x \longmapsto Ax$ est complet

• On a déjà vu des exemples d'équa diff autonomes où les solutions ne sont pas toutes globales.

Par ex : $x' = \frac{-1}{x}$ (CM du 6 avril).

Notons que $\phi(0,x) = x$ pour tout $x \in U$, et

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = F(\phi(t,x)) \text{ pour } x \in U \text{ et } t \in I_x.$$

Continuité du flot

<u>Théorème</u> : L'ensemble de définition Ω du flot est <u>ouvert</u>, et le flot $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est <u>continu</u>.

<u>Preuve</u> : $x_0 \in U$ fixé, $t_0 \in I_{x_0}$, supposons $t_0 \geq 0$ pour simplifier.

$[0, t_0]$ segment $\subset I_{x_0}$

$\Rightarrow \gamma_{x_0}([0, t_0])$ est un compact dans U

donc on peut trouver $r > 0$ tq

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; d(x, \gamma_{x_0}([0, t_0])) \leq r\} \subset U$$

Ce K est compact aussi.

Comme F est localement Lipschitz, il existe un $\lambda \geq 0$ tq $\forall x_1, x_2 \in K$,

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq \lambda \|x_1 - x_2\| .$$

Soit $x \in U$ tq $\|x - x_0\| < r$, alors pour t assez petit, $\gamma_x(t) \in K$.

Tant que $\gamma_x(t) \in K$, $t \geq 0$, on a :

$$\|\gamma_x(t) - \gamma_{x_0}(t)\| = \left\|x + \int_0^t \left(F(\gamma_x(s)) - F(\gamma_{x_0}(s))\right) ds - x_0\right\|$$

par formulation intégrale

$$\leq \|x - x_0\| + \int_0^t \|F(\gamma_x(s)) - F(\gamma_{x_0}(s))\| ds$$

$$\|\gamma_x(t) - \gamma_{x_0}(t)\| \leq \|x - x_0\| + \lambda \int_0^t \|\gamma_x(s) - \gamma_{x_0}(s)\| ds$$

d'où, par le lemme de Grönwall,

$$\circledast \quad \underline{\|\gamma_x(t)-\gamma_{x_0}(t)\| \leq \|x-x_0\| e^{t\lambda}} \leq \|x-x_0\| e^{t_0\lambda}$$

Conséquence 1 : Pour $\|x-x_0\|$ assez petit,
(c'est-à-dire $\|x-x_0\| \leq r e^{-t_0\lambda}$)

on a $\gamma_x(t) \in K$ pour tout $t \in I_x \cap [0,t_0]$,

donc par thm de sortie de tout compact, $I_x \supset [0,t_0]$.

Conséquence 2 : En appliquant le m̂ raisonnement pour une solution maximale au pbm de Cauchy $\begin{cases} y' = F(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

on obtient que $[0,t_0] \times \{x \in \mathbb{R}^n ; d(x, \gamma_{x_0}([0,t_0])) \leq \varepsilon\}$ est inclu dans Ω, pour ε assez petit.

$\leadsto$ ça permet de montrer que Ω est ouvert.

(je ne fais pas tous les détails).

Conséquence 3 (continuité) :

Soient $t, t' \in [0, t_0]$ et $\|x_0 - x_0'\| \leq r e^{-t_0 \lambda}$.

Posons $M := \sup\{\|F(x)\| ; x \in K\} < +\infty$ car K compact.

Alors $\|\phi(t, x_0) - \phi(t', x_0')\| = \|\gamma_{x_0}(t) - \gamma_{x_0'}(t')\|$

$$\leq \|\gamma_{x_0}(t) - \gamma_{x_0'}(t)\| + \|\gamma_{x_0'}(t) - \gamma_{x_0'}(t')\|$$

$$\leq \|x - x_0\| e^{t_0 \lambda} + \left\|\int_t^{t'} F(\gamma_{x_0'}(s))\,ds\right\|$$

$$\leq \|x - x_0\| e^{t_0 \lambda} + |t - t'| M$$

$$\xrightarrow[(t', x_0') \to (t, x_0)]{} 0$$

$\square$

<u>Remarque</u> : Ce théorème s'applique dans le cas des équas diff générales (non autonomes) pour montrer la continuité par rapport aux solutions initiales.

Formule du flot

Théorème (facile) : Si $t_1 \in I_x$ et $t_2 \in I_{\phi(t_1,x)}$, alors $t_1+t_2 \in I_x$, et :

$$\phi(t_1+t_2, x) = \phi(t_2, \phi(t_1,x))$$

Preuve : La fonction $t \mapsto \phi(t_1+t, x)$, définie sur $I_x - t_1$, est solution du pblm de Cauchy $\begin{cases} x' = F(x) \\ x(0) = \phi(t_1,x) \end{cases}$.

C'est donc exactement la fonction $t \mapsto \phi(t, \phi(t_1,x))$. $\square$

Corollaire : Supposons que le champ de vecteur F est complet.

Alors $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times U & \longrightarrow & U \\ (t,x) & \longmapsto & \phi(t,x) \end{array}$ définit une action

de groupe du groupe additif $(\mathbb{R},+)$ sur l'ensemble U.

De plus, pour tout $t\in\mathbb{R}$, l'application $\begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & U \\ x & \longmapsto & \phi(t,x) \end{array}$

est un homéomorphisme de U sur U.

Preuve : La formule du flot permet d'obtenir directement les axiomes d'action de groupe.

Pour homéo : ϕ continue $\Rightarrow$ $x\mapsto \phi(t,x)$ est continue.

par la formule du flot, $x\mapsto\phi(-t,x)$ est la fonction réciproque de $x\mapsto\phi(t,x)$, et elle est continue aussi. $\square$

Portrait de phase

<u>Définition</u> : On appelle <u>orbite</u> de $x_0 \in U$ l'ensemble
$$\mathrm{orb}(x_0) := \{ \phi(t, x_0) \ ; \ t \in I_{x_0} \}$$

Rem : Dans le cas où le champ de vecteurs est complet, c'est vraiment l'orbite de x_0 pour l'action du groupe $(\mathbb{R}, +)$.

<u>Définition</u> : On appelle <u>point d'équilibre</u> un $x_0 \in U$ tel que $\mathrm{orb}(x_0) = \{x_0\}$.

<u>Proposition (immédiate)</u> : x_0 est un point d'équilibre
ssi $F(x_0) = 0$
ssi γ_{x_0} est constante.

<u>Exemple</u> : Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, le champ de vecteur $x \mapsto Ax$ admet pour points d'équilibres tous les points de $\ker A$.
En particulier, 0 est toujours point d'équilibre pour $x \mapsto Ax$.

on a vu orbites $\rightsquigarrow$ "stabilisateurs" ?

Portrait de phase

Rappel : • $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ champ de vecteur (fonction continue, loc. Lipschitz)

• $x' = F(x)$ équation autonome associée vérifie hypothèses Cauchy-Lipschitz

• flot $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue (thm de mardi)

$$(t, x_0) \longmapsto \phi(t, x_0)$$

tq $t \mapsto \phi(t, x_0)$ sol. maximale de $\begin{cases} x' = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Formule du flot : $\phi(t_1, \phi(t_2, x)) = \Phi(t_1 + t_2, x)$.

Définition : • orbite de x_0 :

$$\text{orb}(x_0) = \{ \Phi(t, x_0) \ ; \ t \in I_{x_0} \}$$

$\left(I_{x_0} = \Omega \cap (\mathbb{R} \times \{x_0\}) \right)$
intervalle de défn
de la sol. maximale

• point d'équilibre : $x_0 \in U$ tq $\text{orb}(x_0) = x_0$

Rem : x_0 point d'équilibre $\Longleftrightarrow F(x_0) = 0$.

<u>Proposition</u> : Pour tout $x_0 \in U$, on a l'alternative suivante :

- soit $$\begin{aligned} I_{x_0} &\longrightarrow orb(x_0) \\ t &\longmapsto \phi(t, x_0) \end{aligned}$$ est injective

- soit $I_{x_0} = \mathbb{R}$ et $t \mapsto \phi(t, x_0)$ est périodique.

<u>Preuve</u> : Supposons que l'application n'est pas injective :
$t_1 < t_2$ deux réels tq $\phi(t_1, x_0) = \phi(t_2, x_0)$.
Alors par la formule du flot, pour t quelconque :

$$\begin{aligned} \phi(t, x_0) &= \phi(t - t_1, \phi(t_1, x_0)) \\ &= \phi(t - t_1, \phi(t_2, x_0)) \\ &= \phi(t + (t_2 - t_1), x_0) \end{aligned}$$

donc $t \mapsto \phi(t, x_0)$ est périodique, de période $t_2 - t_1$.

$\square$

Définition : Si x_0 est tq $t \mapsto \phi(t, x_0)$ est périodique, on dit que $orb(x_0)$ est une orbite *périodique*.

Remarque : Si toutes les orbites sont périodiques, alors le champ de vecteur est complet.

Proposition : La relation $y \in orb(x)$ est une relation d'équivalence.

Preuve : • Reflexivité : $x \in orb(x)$ évident car $x = \phi(0, x)$.

On suppose $y \in orb(x)$ et $z \in orb(y)$, c'est à dire $\exists t, u \in \mathbb{R}$ tq $y = \phi(t, x)$ et $z = \phi(u, y)$.

• Symétrie : $x = \phi(0, x) = \phi(-t, \phi(t, x)) = \phi(-t, y)$ donc $x \in orb(y)$

• Transitivité : $z = \phi(u, \phi(t, x)) = \phi(u + t, x)$ donc $z \in orb(x)$

$\square$

Corollaire : Les orbites forment une partition de U.

Terminologie : On appelle portrait de phase cette partition

Exemples en dimension 1

Exemple 1 : $x' = \lambda x$ sur $\mathbb{R}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ c'est un champ de vecteur complet (car linéaire)

On peut comprendre le comportement des solutions avec le champ de vecteur $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lambda x$ seul.

- si $\lambda = 0$, tous les points de $\mathbb{R}$ sont points d'équilibre

  $\rightarrow$ toutes les solutions sont constantes.

- si $\lambda > 0$: 0 est le seul point d'équilibre

$\rightarrow$ si $x_0 = 0$, la solution est constante

$\rightarrow$ si $x_0 > 0$, l'orbite de x_0 (qui est connexe) ne peut pas traverser $\{0\}$, donc elle est incluse dans $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $x' = F(x) = \lambda x > 0$ pour $x > 0$, la solution $x(t)$ est strictement croissante.

Si elle admet une limite finie $x_1 \in \mathbb{R}_+$ quand $t \to +\infty$, alors $x'(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ (par TAF)

alors par continuité de F, $F(x_1) = 0$.

Donc $x_1 = 0$ ce qui contredit $x_0 > 0$ et x croissante.

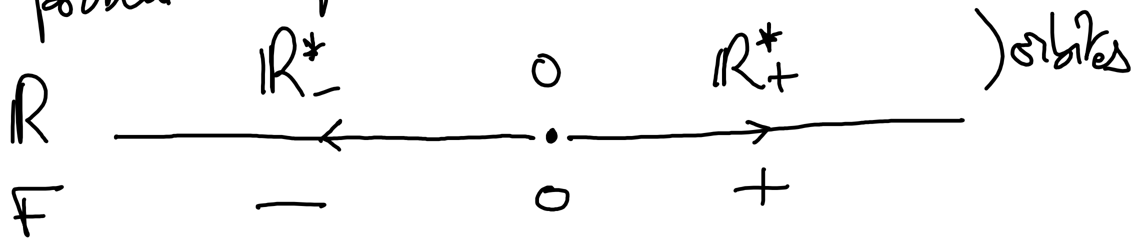
Donc $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$

Quand $t \to -\infty$, le même type de raisonnement montre que $x(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$.

→ De même, si $x(0) < 0$, on a $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$

et $x(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$

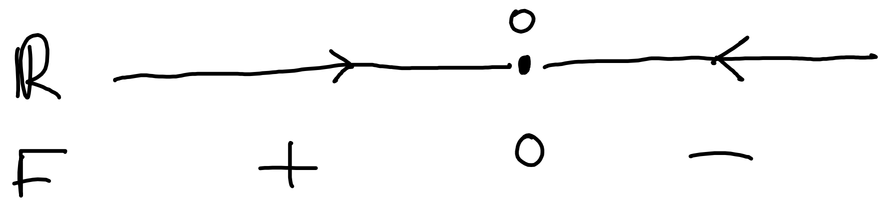
portrait de phase



• si $\lambda < 0$:

→ si $x_0 > 0$, $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

$x(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} +\infty$.

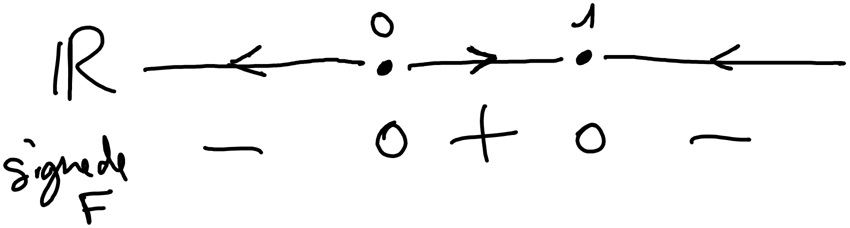


Exemple 2 : Équation logistique $\begin{cases} x' = x(1-x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ dans $\mathbb{R}$

$F(x) = x(1-x)$

$F(x) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = 1$

$\rightsquigarrow$ les deux seuls points d'équilibre sont 0 et 1



portrait de phase

Le portrait de phase permet de dire :

- si $x_0 = 0$ ou 1, la solution est constante
- si $0 < x_0 < 1$, la solution est globale ($0 < x(t) < 1$) + thm d'explosion en tps fini

strictement croissante, et par les arguments de l'exemple précédent, $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$ et $x(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$.

- si $1 < x_0$, la solution reste dans $]1,+\infty[$, elle est strictement décroissante, elle est définie sur $[0,+\infty[$ (par théorème d'explosion en temps fini) et $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$.

$\rightsquigarrow$ est-elle globale ?

quel est son comportement pour les temps négatifs ?

Réponse en TD demain.

- si $x_0 < 0$, la solution est strictement décroissante, définie sur $]-\infty,0]$ et $x(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$.

$\rightsquigarrow$ est-elle globale ?

quel est son comportement pour les temps positifs ?

Intégrales premières

Définition : On appelle <u>intégrale première</u> d'un champ de vecteur $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ toute fonction $\mathcal{H} : U \to \mathbb{R}$ qui est constante sur les orbites de F.

Autrement dit, $\forall x \in U$, la fonction $t \mapsto \mathcal{H}(\phi(t,x))$ est constante.

Par règle de composition, si $\mathcal{H}$ est différentiable sur U, alors $\mathcal{H}$ est une intégrale première de F si et seulement si $\forall x \in U$, $\forall t \in I_x$, $d\mathcal{H}_{\phi(t,x)}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x)\right) = 0$

ssi $\quad \forall x \in U, \ \forall t \in I_x, \quad d\mathcal{H}_{\phi(t,x)}\big(F(\phi(t,x))\big) = 0$

ssi $\quad \forall x \in U, \quad d\mathcal{H}_x\big(F(x)\big) = 0$

ssi $\quad \forall x \in U, \quad \big(\nabla \mathcal{H}(x)\big)^T F(x) = 0$

ssi "le gradient de $\mathcal{H}$ est orthogonal au champ de vecteur F".

Connaître une intégrale première $\mathcal{H}$ donne des infos sur le portrait de phase :
les orbites de F sont incluses dans les ensembles de niveau de $\mathcal{H}$.

⚠ elles peuvent être strictement incluses.

C'est particulièrement utile en dimension 2 : les ensembles de niveau de $\mathcal{H}$ sont alors (souvent) des courbes.

<u>Exemple</u> : Considérons le champ de vecteur $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tq $F(x,y) = (-y, x)$.

Pour que $\mathcal{H}$ soit une intégrale première, on veut

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x,y) \times (-y) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(x,y) \times x = 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On peut parfois (comme ici) chercher $\mathcal{H}$ sous la forme $\mathcal{H}(x,y) = f(x) + g(y)$, et se ramener à un calcul de primitive :

si $f'(x)=x$ et $g'(y)=y$ on aura

$$f'(x)\times(-y)+g'(y)\times x=0$$

donc $\mathcal{H}$ intégrale première.

$\Longrightarrow$ on peut prendre $\mathcal{H}(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2}$.

$\longrightarrow$ les lignes de niveau de $\mathcal{H}$ sont les cercles centrés en O.

$\hookrightarrow$ toutes les orbites de F sont bornées

$\Rightarrow$ le champ de vecteur F est complet.

Stabilité

F champ de vecteur

Définition : Un point d'équilibre x_0 de F est dit stable si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq si $\|x - x_0\| \leq \delta$, alors

$$\forall t \geq 0, \ \|\phi(t,x) - x_0\| \leq \varepsilon .$$

En termes moins précis : l'orbite future d'un point proche de x_0 reste proche de x_0.

En particulier, par thm de sortie de tout compact, pour x assez proche de x_0, $t \mapsto \phi(t,x)$ est défini sur $[0, +\infty[$.

Exemple : 1) L'origine est un point d'équilibre stable du champ de vecteur $F : (x,y) \longmapsto (-y, x)$ sur $\mathbb{R}^2$.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, si $\|x\| < \varepsilon$, alors $\|\phi(t,x)\| = \|x\|$ (par l'intégrale première précédente) donc $\|\phi(t,x)\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$.

2) L'origine est un point d'équilibre instable du champ de vecteur $F : (x,y) \longmapsto (-x, y)$ sur $\mathbb{R}^2$.

En effet, le flot est donné par $\phi(t,x,y) = (e^{-t}x, e^{t}y)$ et si $y \neq 0$, $\|\phi(t,x,y)\| \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

Remarque : Ces deux exemples sont linéaires à coeff constants.

Exercice : Montrer que si $A \in M_2(\mathbb{R})$, 0 est stable pour $x \mapsto Ax$ ssi les valeurs propres de A ont une partie réelle négative et A est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$).

Stabilité asymptotique

Définition : Un point d'équilibre x_0 de F est *asymptotiquement stable* si il est stable et s'il existe un voisinage U de x_0 tq $\forall x \in U$, $\lim_{t \to +\infty} \phi(t,x) = x_0$.

<u>Exercice</u> : Pour une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que 0 soit asymptotiquement stable.

<u>Exemple</u> : 0 n'est pas asymptotiquement stable pour $(x,y) \mapsto (-y, x)$.

Fonction de Lyapunov

Définition : Soit $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteur $x_0 \in U$, V un voisinage de x_0 dans U. On dit que $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov pour F au voisinage de x_0 si L est décroissante le long de toute orbite dans V.

$$(\forall x \in V, \quad t \mapsto L(\Phi(t,x)) \text{ décroissante})$$

Remarque : Si L est différentiable, alors L est une fonction de Lyapunov ssi

$$\forall x \in V, \qquad dL_x(F(x)) \leqslant 0.$$

Théorème de Lyapunov : Soit L une fonction de Lyapunov de classe C^1 sur V, qui admet un minimum strict en x_0, et tq $dL_x(F(x))<0$ pour $x \neq x_0$ dans V. Alors x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.