UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2019-2020**
UFR SCIENCES

M1 Mathématiques HMMA114

TD 1 : actions de groupes

Exercice 1. Soit G un groupe et a un élément de G. On considère l'application ϕ de $\mathbf{Z}$ dans G qui à un entier k associe a^k. L'ensemble $\mathbf{Z}$ est muni de sa structure canonique de groupe additif. Pour tout $n \geq 1$ on note $\pi_n : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ l'application canonique.

1. Montrer que ϕ est un morphisme de groupes.
2. Montrer que ϕ est injectif si et seulement si a est d'ordre infini.
3. Supposons que a est d'ordre fini n. Déterminer le noyau de ϕ. En déduire qu'il existe un morphisme injectif $\bar{\phi} : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to G$ tel que $\bar{\phi} \circ \pi_n = \phi$.

Exercice 2. Soit G un groupe fini. On dit que G est **cyclique** s'il existe $a \in G$ qui engendre G.

1. Soit n l'ordre de G. Montrer que G est cyclique si et seulement s'il contient un élément d'ordre n.
2. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ il existe un groupe cyclique d'ordre n et que ce groupe est unique à isomorphisme près.
3. Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre p est cyclique. En déduire qu'un tel groupe est simple.

Exercice 3. Soit G un groupe abélien non-trivial. Montrer que G est simple si et seulement s'il est fini cyclique d'ordre premier.

Exercice 4.

1. Déterminer tous les groupes finis d'ordre < 6 (à isomorphisme près).
2. On admet qu'il n'existe que deux groupes d'ordre 6 différents à isomorphisme près. Quels sont ces groupes ?

Rappels :

1. Les isométries du plan $\mathbf{R}^2$ sont les rotations, les translations, et les symétries glissées (composées d'une translation et d'une symétrie axiale, la direction de l'axe de symétrie étant la direction de translation).
2. Si (u_1, u_2) est une base du plan $\mathbf{R}^2$ et (v_1, v_2) un couple de vecteurs de ce même plan, il existe une seule application linéaire qui envoie u_i sur v_i pour $i = 1, 2$.

Exercice 5. Soit $(ABCD)$ le carré du plan défini par

$$A = (1,1) \quad B = (-1,1) \quad C = (-1,-1) \quad \text{et } D = (1,-1).$$

Soit G le groupe d'isométries de ce carré.

1. Montrer que G est d'ordre 8 et énumérer ses élements.
2. Ce groupe est-il abélien ?
3. Montrer que l'action de G sur l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ est transitive ; décrire les stabilisateurs.

Exercice 6. Soit (ABC) le triangle équilatéral du plan avec

$$A = (1,0) \quad B = (-1/2, \sqrt{3}/2) \quad \text{et } C = (-1/2, -\sqrt{3}/2).$$

Soit G le groupe d'isométries de ce triangle.

1. Décrire tous les éléments de G, en déduire que G est isomorphe à $\mathcal{S}_3$.
2. Soit E la réunion des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$. On considère l'action de G sur E obtenue par restriction de l'action canonique de $\mathbf{R}^2$.
   Décrire les orbites de cette action (et en particulier donner leur cardinal).
3. L'action est-elle transitive ?
4. Donner pour chaque point le cardinal du stabilisateur.
5. L'action est-elle libre ?
6. La représentation associée à cette action est-elle fidèle ?

Exercice 7. Soit $(A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2)$ le cube défini par

$$\begin{array}{llll} A_1 = (1,1,1) & B_1 = (-1,1,1) & C_1 = (-1,-1,1) & D_1 = (1,-1,1) \\ A_2 = (1,1,-1) & B_2 = (-1,1,-1) & C_2 = (-1,-1,-1) & D_2 = (1,-1,-1). \end{array}$$

Soit G le groupe d'isométries de ce cube. On considère l'action de G sur l'ensemble E des sommets du cube.

1. Montrer que cette action est transitive.
2. Montrer qu'elle n'est pas libre.
3. Montrer que la représentation associée de G sur E est fidèle. En déduire que G est fini et donner un majorant de son ordre.

Exercice 8. Décrire les groupes $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.

Exercice 9. Le but de cet exercice est de montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_4$ n'est pas simple. Soit E l'ensemble des paires de paires disjointes d'éléments de $\{1,2,3,4\}$. Cet ensemble a exactement trois éléments, notés $\alpha = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\beta = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$ et $\gamma = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$. On note $\phi : \mathcal{A}_4 \to \mathrm{Bij}(E)$ la représentation associée.

1. Décrire l'action sur E du 3-cycle (123) et de la double-transposition $(12)(34)$.
2. En déduire que le noyau de ϕ est un sous-groupe distingué de G d'ordre 4.

Exercice 10 (Invariants de conjugaison)**.** Soit G un groupe fini et a, b des éléments de G. On suppose que a et b sont conjugués.

1. Montrer que a et b ont même ordre.
2. On suppose que G agit sur un ensemble fini E. Si $g \in G$, on note l'ensemble des points fixes sous l'action de l'élément g par

   $$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in E \mid g \cdot x = x\}.$$

   Montrer que $\mathrm{Fix}(a)$ et $\mathrm{Fix}(b)$ ont même cardinal.
3. On suppose que G est un sous-groupe d'un groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. Montrer que a et b ont même signature.
4. On suppose que G est un sous-groupe d'un groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Montrer que a et b ont même déterminant et même trace.

Questions subsidiaires :

— Deux matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ qui ont même déterminant et même trace sont-elles nécessairement conjuguées ?

— Trouver un groupe G, un élément $g \in G$ et deux plongements de G dans $\mathcal{S}_n$ tels que les deux images de g aient une signature différente.

Exercice 11 (Problème de conjugaison)**.** Déterminer les classes de conjugaison des groupes suivants : $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$, $\mathcal{A}_4$, et les groupes d'isométries du triangle équilatéral et du carré.

Produits semi-directs

Exercice 12. Soit N et H deux groupes. Soit $\theta : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme de groupes. On considère la loi interne sur $N \times H$ définie par

$$(n, h)(n', h') = (n\theta(h)(n'), hh')$$

On va montrer que cette loi définit une structure de groupe sur l'*ensemble* $N \times H$. On notera en général $N \rtimes_\theta H$ le groupe obtenu de cette manière, et on le note G dans la suite de cet exercice.

1. Montrer que la loi ci-dessus est associative.
2. Vérifier que (e_N, e_H) est un élément neutre pour cette loi.
3. Montrer que chaque élément admet un inverse pour cette loi, en déterminant explicitement cet inverse. En déduire que G forme bien un groupe.
4. Quel choix de θ fournit la structure de *produit direct* de groupes ?
5. Notons $N' = N \times \{e_H\} \subset G$. Montrer que N' est distingué dans G.
6. Montrer que $G/N' \simeq H$.

Exercice 13. Déterminer le groupe des automorphismes de $\mathbf{Z}$, puis de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour $n \leq 6$.

Exercice 14 (Groupes diédraux)**.** Soit n un entier naturel ≥ 2. On considère le morphisme $\theta : \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ défini par $\theta(\bar{1}) = -\mathrm{Id}$. On note $D_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rtimes_\theta \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

1. Est-ce que D_n est abélien ?
2. Identifier D_3 avec un groupe encore plus classique.
3. Montrer que D_n est isomorphe au groupe d'isométries d'un polygone régulier à n côtés.

Commutateurs

Dans les exercices suivants, si G est un groupe et a, b deux éléments de G on appelle **commutateur** de a et b l'élément $aba^{-1}b^{-1}$, que l'on notera $[a, b]$. On note $[G, G]$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs des couples d'éléments de G. Ce sous-groupe est appelé le **groupe dérivé** de G.

Exercice 15. Soit G un groupe.

1. Montrer que $[G, G]$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que le groupe quotient $G/[G, G]$ est abélien.

Exercice 16. Soit G un groupe. On définit par récurrence une suite $(G^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ de sous-groupes de G en posant $G^{(0)} = G$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}]$. On dit que G est **résoluble** s'il existe n tel que $G^{(n)}$ soit trivial.

1. Montrer que tout groupe abélien est résoluble.
2. Montrer que tout groupe simple résoluble est abélien.
3. Trouver un groupe résoluble non-abélien.

Automorphismes de graphes

Exercice 17. On appelle **graphe** un couple (S, A) formé d'un ensemble S de *sommets* et d'un sous-ensemble $A \subset (S \times S \setminus \{(s, s), s \in S\})$ d'*arêtes orientées*.

Un **automorphisme** du graphe (S, A) est une bijection de S telle que la bijection de $S \times S$ induite envoie A sur A.

On considère les quatre graphes sur $S = \{1, 2, 3, 4\}$ donnés respectivement par

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(1,3), (2,4), (3,1), (4,2)\} \\
A_2 &= \{(1,3), (2,4)\} \\
A_3 &= \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\} \\
A_4 &= \{(1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3)\}
\end{aligned}$$

1. Donner une représentation graphique de ces graphes.
2. Quels sont les groupes d'automorphismes de ces graphes ?
3. Dans chaque cas, déterminer si l'action induite sur les sommets du graphe est libre et/ou transitive.
4. Comparer ces groupes avec D_4, le groupe d'isométries du carré.

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2019-2020**
M1 Mathématiques HMMA114

TD 2 : matrices équivalentes, matrices semblables

Exercice 1. Déterminer le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Même question pour un corps quelconque $\mathbb{K}$.

Exercice 2. Soit $\phi : \mathbb{K}^* \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ un morphisme de groupe tel que $\det(\phi(\lambda)) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On considère le morphisme $\theta : \mathbb{K}^* \to \mathrm{Aut}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}))$ donné par $\theta(\lambda)(A) = \phi(\lambda)A\phi(\lambda)^{-1}$. Enfin, on considère le produit semi-direct associé : $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \rtimes_\theta \mathbb{K}^*$.

1. Donner un exemple d'un tel ϕ pour tout choix de n et $\mathbb{K}$.
2. Sous quelle condition θ est-il le morphisme trivial ?
3. [1] Montrer que dans tous les cas, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \rtimes_\theta \mathbb{K}^*$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
4. Déduire des questions précédentes des choix particuliers de n et $\mathbb{K}$ tels que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ soit isomorphe au produit direct $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^*$.

Exercice 3. On considère l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ par multiplication à droite : $g \cdot A = Ag^{-1}$. Montrer que deux matrices sont dans la même orbite pour cette action si et seulement si elles ont même image.

Exercice 4. On considère l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ sur l'ensemble $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ des matrices $n \times m$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, donnée par :

$$(g, h) \cdot A = gAh^{-1} \quad \text{pour } (g, h) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \text{ et } A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K}).$$

Quelles sont les orbites pour cette action ?

Exercice 5. Donner une suite d'opérations sur les lignes et les colonnes permettant de passer de l'une à l'autre des deux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. On fixe un corps $\mathbb{K}$ et un entier $n \geq 1$. On note $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{D}$, resp. $\mathcal{T}$) le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices de permutation (resp. dilatation, resp. transvection.)

1. Donner les inverses des éléments de $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$.
2. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par $\mathcal{P} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{T}$.
3. Démontrer la formule

$$P_{ij} = D_j(-1)T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1).$$

En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par $\mathcal{D} \cup \mathcal{T}$.

1. *On pourra utiliser l'application* $(A, \lambda) \mapsto \phi(\lambda)A$ *et construire son inverse.*

Exercice 7. On utilise les notations de l'exercice précédent. De plus, on note $\mathcal{T}^{\text{sup}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{T}$ formé des matrices de transvections qui sont triangulaires supérieures.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ forme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Qu'en est-il de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$?
2. Quel est le sous-groupe engendré par $\mathcal{D}$?
3. Soient U le sous-groupe engendré par $\mathcal{T}^{\text{sup}}$, et B le sous-groupe engendré par $\mathcal{T}^{\text{sup}} \cup \mathcal{D}$. Décrire U et B.
4. [2] Montrer que U est distingué dans B.
5. Identifier le sous-groupe S de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ engendré par $\mathcal{T}$.

Exercice 8. Déterminer la forme de Jordan dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. On fixe un nombre complexe λ pendant tout l'exercice. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ qui admettent λ comme valeur propre triple.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison, c'est-à-dire que pour tout couple de matrices $(A, B) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})^2$, si $A \in \mathcal{A}$ et B est semblable à A, alors $B \in \mathcal{A}$.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ est formé de trois classes de similitude. Donner un représentant de chaque classe. Lesquelles sont finies/infinies ?

Exercice 10. Décrire les classes de similitude de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Combien y en a-t-il ? Donner un représentant de chaque classe. Lesquelles sont finies/infinies ?

Exercice 11. Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos. Soit M une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^2 = 0$. Choisissons $(f_1, \ldots, f_k)$ une base de l'espace vectoriel quotient $\mathbb{K}^n / \operatorname{Ker}(M)$, et $e_j \in f_j + \operatorname{Ker}(M)$ pour $1 \leq j \leq k$.

1. Montrer que $(Me_1, e_1, Me_2, e_2, \ldots, Me_k, e_k)$ est une famille de vecteurs indépendants de $\mathbb{K}^n$.
2. Écrire la matrice de l'application linéaire $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ définie par M dans une base obtenue en complétant la famille $(Me_1, e_1, Me_2, e_2, \ldots, Me_k, e_k)$ en une base de $\mathbb{K}^n$.
3. (*) En déduire une preuve de l'existence d'une décomposition de Jordan pour toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme minimal est de degré au plus deux.

---

2. *On pourra construire un morphisme de groupe $B \to (\mathbb{K}^*)^n$.*

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2019-2020**
M1 Mathématiques HMMA114

TD 3 : Topologie et groupes

Exercice 1. Soit G un groupe topologique quelconque.

1. Soit H un sous-groupe ouvert de G. Montrer que H est fermé.
2. Supposons G connexe, et soit U un ouvert de G contenant l'élément neutre e. Montrer que la partie U engendre le groupe G.

Exercice 2. On se propose de montrer la propriété suivante : un groupe topologique G est séparé si et seulement si $\{e\}$ est fermé.

1. Montrer que dans tout espace topologique séparé, les singletons sont fermés.
2. Trouver une application continue $G \times G \to G$ telle que l'image réciproque de $\{e\}$ soit la diagonale $\mathrm{diag}(G) = \{(g, g) \mid g \in G\}$.
3. Conclure (on utilisera le fait que la topologie produit est engendrée par les produits d'ouverts).

Exercice 3. Soit Γ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. On pose $x_\Gamma := \inf(\Gamma \cap \mathbb{R}_+^*)$.

1. Supposons que $x_\Gamma = 0$. Montrer que Γ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Supposons que $x_\Gamma \neq 0$. Montrer que $\Gamma = x_\Gamma \mathbb{Z}$.
3. Soient x et y deux réels. A quelle condition le sous-groupe $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$ est-il dense dans $\mathbb{R}$?
4. En appliquant les réponses précédentes, identifier les sous-groupes du cercle unité S^1 dans $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas denses.

Exercice 4. Les groupes suivants sont-ils connexes ?

$$\{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ |\det(M)| = 1\}, \quad \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ |\det(M)| = 1\}.$$

Exercice 5.

1. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. En utilisant le polynôme caractéristique, montrer qu'il y a au plus un nombre fini de $z \in \mathbb{C}$ tels que la matrice $zM + (1 - z)I_n$ n'est pas inversible.
2. En déduire une preuve que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
3. En déduire une preuve que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
4. Que se passe-t-il dans $\mathbb{R}$?

Exercice 6. Quelle est l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang r dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ pour $0 \leq r \leq n$?

Exercice 7. On fixe un nombre complexe λ pendant tout l'exercice. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ qui admettent λ comme valeur propre triple. On rappelle que $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison et formé de trois classes de similitude, pour lesquelles on utilisera les notations suivantes :

$$\mathcal{B} = \mathrm{cl}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \mathcal{C} = \mathrm{cl}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \mathcal{D} = \mathrm{cl}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
2. La partie $\mathcal{B}$ est-elle fermée ? Bornée ? Compacte ?
3. Mêmes questions pour $\mathcal{C}$, puis $\mathcal{D}$.

Exercice 8. Décrire les classes de similitude de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Combien y en a-t-il ? Donner un représentant de chaque classe. Lesquelles sont fermées ? Bornées ? Compactes ?

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2019-2020**
M1 Mathématiques HMMA114

TD 4 : Groupe orthogonal

Exercice 1. On considère la matrice A suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que A est orthogonale. Calculer son déterminant et sa trace.
2. L'isométrie f_A représentée par A est-elle une rotation ? Une réflexion ? Une rotoréflexion ?
3. Donner les éléments géométriques de A, c'est-à-dire son plan (s'il s'agit d'une réflexion,) ou son axe et son angle non-orienté (s'il s'agit d'une rotation ou d'une rotoréflexion.)

Exercice 2. Même exercice avec la matrice B suivante :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Même exercice avec la matrice C suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs non-colinéaires. On note S_u et S_v les symétries orthogonales par rapport aux hyperplans $(\mathbb{R}u)^\perp$ et $(\mathbb{R}v)^\perp$. On considère $R = S_u \circ S_v$.

1. Montrer que le plan $\pi = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v$, et $\pi^\perp$ sont stables par R.
2. Déterminer la restriction de R à $\pi^\perp$.
3. Montrer que la restriction de R à π est une rotation du plan euclidien π dont on déterminera l'angle en fonction de u et v.
4. Que dire de R ?

Exercice 5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On considère le sous-ensemble de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ donné par

$$R_m := \left\{ e^{2ik\pi/m} \mid 0 \leq k \leq m-1 \right\}$$

On note $\mathrm{Isom}(R_m)$ le groupe des éléments de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ qui envoient R_m sur lui-même, et $\mathrm{Isom}^+(R_m) = \mathrm{Isom}(R_m) \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. On suppose, sauf pour la dernière question, que $m \geq 3$.

1. Déterminer $\mathrm{Isom}^+(R_m)$.
2. Soit x un point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Quel est le stabilisateur $\mathrm{Stab}(x)$ de x dans $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$?
3. Montrer que $\mathrm{Stab}(e^{2ik\pi/m}) \subset \mathrm{Isom}(R_m) \setminus \mathrm{Isom}^+(R_m)$ pour tout k.
4. Montrer que $\mathrm{Isom}(R_m)$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rtimes_\theta \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\theta : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est défini par $\theta(\bar{1}) = -\mathrm{Id}$.
5. Déterminer $\mathrm{Isom}(R_1)$ et $\mathrm{Isom}(R_2)$. La représentation induite par l'action de $\mathrm{Isom}(R_2)$ sur R_2 est-elle fidèle ?

Exercice 6. Soit $T = (ABCD)$ un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$ de centre O. On note $H = \mathrm{Isom}^+(T) \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ le groupe des rotations qui préservent T.

1. Montrer que l'action de H sur l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ est transitive et déterminer le stabilisateur de A.
2. Calculer le cardinal de H et faire la liste de ses éléments.
3. Montrer que H est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$.

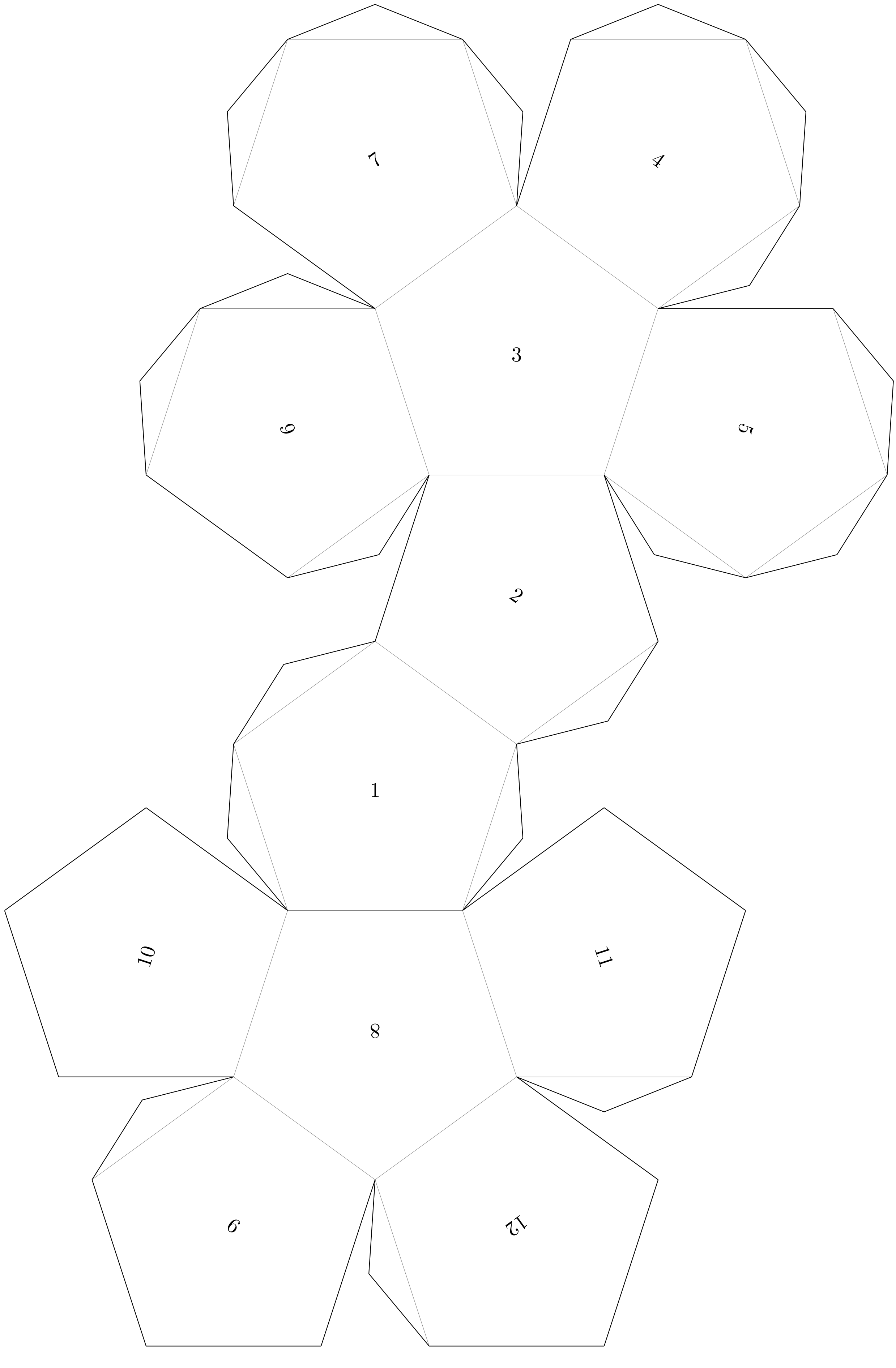
Exercice 7. Soit $T = (ABCD)$ un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$ de centre O. On note $G = \mathrm{Isom}(T) \subset \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ le groupe d'isométries de T.

1. Montrer que l'action de G sur l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ est transitive et déterminer le stabilisateur de A.
2. Calculer le cardinal de G et faire la liste de ses éléments.
3. Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 8. Etudier les groupes $\mathrm{Isom}^+(Q)$ et $\mathrm{Isom}^+(D)$ où Q est un cube et D un dodécaèdre régulier. Montrer que le premier de ces groupes est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ et le deuxième à $\mathfrak{A}_5$.

Montrer que pour le cube Q et le dodécaèdre régulier D on a $\mathrm{Isom}(Q) \cong \mathrm{Isom}^+(Q) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Isom}(D) \cong \mathrm{Isom}^+(D) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'énoncé correspondant est-il vrai pour le tétraèdre régulier ?

Exercice 9. (*) Quels sont les groupes finis qui sont isomorphes à un sous-groupe de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$? De $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$? De $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$?



7
4
3
6
5
2
1
10
11
8
9
12

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2019-2020**
M1 Mathématiques HMMA114

TD 5 : Groupe unitaire ; homographies

Exercice 1.

1. Montrer que toute matrice de SU(2) s'écrit sous la forme $M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ avec α, β deux nombres complexes tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.
2. Montrer que toute matrice de U(2) s'écrit sous la forme $e^{i\phi}M$ avec $\phi \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathrm{SU}(2)$.

Exercice 2.

1. Soient A, $B \in \mathrm{U}(n)$ deux matrices unitaires telles que $AB = BA$. Montrer que chaque sous-espace propre de A est stable par B. En déduire que $\mathbb{C}^n$ admet une base formée de vecteurs qui sont propres à la fois pour A et pour B.
2. Réciproquement, soient A, $B \in \mathrm{U}(n)$ deux matrices unitaires telles qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs qui sont propres à la fois pour A et pour B. Montrer que A et B commutent.

Exercice 3.

1. Soit n un entier ≥ 1. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $U \in \mathrm{U}(n)$ telle que pour tout $Z \in \mathbb{C}^n$ on ait UZ orthogonal à Z.
2. Que se passe-t-il si l'on remplace $\mathrm{U}(n)$ par $\mathrm{O}(n)$ et $\mathbb{C}^n$ par $\mathbb{R}^n$?

Exercice 4. On considère l'ensemble $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$. Étant donné $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on définit une application $h_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ de la manière suivante :

$$h_A\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty, \qquad h_A(\infty) = \frac{a}{c} \qquad \text{et} \quad h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$$

où si $c = 0$, on identifie $-d/c$ et a/c à ∞. Les applications h_A ainsi définies s'appellent les **homographies**.

1. Montrer que l'application $A \mapsto h_A$ définit un morphisme de groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{Bij}(\hat{\mathbb{C}})$. Déterminer son noyau.
2. On note $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ l'image de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ par ce morphisme. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est engendré par les homographies

$$\mathrm{Inv} : z \mapsto z^{-1}, \qquad T : z \mapsto z+1 \qquad \text{et} \qquad D_\alpha : z \mapsto \alpha z \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{C}^*.$$

Remarque 1. On peut voir $\hat{\mathbb{C}}$ comme le *compactifié d'Alexandrov* de $\mathbb{C}$ et le munir ainsi d'une structure d'espace topologique compact. On pourrait montrer, avec les outils à notre disposition, que l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ définie par les homographies est une action continue du groupe topologique $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sur l'espace topologique $\hat{\mathbb{C}}$. Il y a en réalité une structure encore plus riche, et il s'agit d'une action algébrique du groupe algébrique $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sur la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq \hat{\mathbb{C}}$, qui est une variété algébrique.

Exercice 5. Soient z_1, z_2, z_3 trois points distincts de $\hat{\mathbb{C}}$.

1. Montrer qu'il existe une unique homographie $h \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ qui envoie ces trois points respectivement sur ∞, 0 et 1. on note alors
$$[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \hat{\mathbb{C}}$$
l'image d'un élément $z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ par cette homographie h. C'est le **birapport** de (z_1, z_2, z_3, z_4).
2. Montrer que
$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \in \mathbb{C}$$
si z_4 est différent de z_1 et si z_1, z_2, z_3 sont dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer que les homographies préservent le birapport.
4. Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre points distincts de $\hat{\mathbb{C}}$ et $r = [z_1, z_2, z_3, z_4]$. Montrer que $[z_2, z_1, z_3, z_4] = [z_1, z_2, z_4, z_3] = \frac{1}{r}$ et que $[z_1, z_3, z_2, z_4] = 1 - r$.

Exercice 6. On considère maintenant la partition $\hat{\mathbb{C}} = \hat{\mathbb{R}} \sqcup \mathbb{H} \sqcup \overline{\mathbb{H}}$ formée par les sous-ensembles $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ et $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) < 0\}$. L'ensemble $\mathbb{H}$ est appelé le **demi-plan de Poincaré**. Montrer que les orbites du sous-groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ pour l'action par homographies sont exactement les trois sous-ensembles ci-dessus.

Exercice 7. On considère $\mathrm{SU}(1,1) = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \mid MJM^* = J\}$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathrm{SU}(1,1)$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.
2. Montrer que les matrices de $\mathrm{SU}(1,1)$ sont de la forme $\begin{pmatrix} u & \overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}$ avec u et v dans $\mathbb{C}$ tels que $|u|^2 - |v|^2 = 1$.
3. Le sous-groupe $\mathrm{SU}(1,1)$ est-il compact ?

Exercice 8. Montrer que le disque unité ouvert $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ de $\hat{\mathbb{C}}$ est stable sous l'action du groupe $\mathrm{SU}(1,1)$ par homographies.

Exercice 9. On considère l'homographie $h_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ définie par $A := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

1. Montrer que h_A détermine une bijection du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ sur le disque unité $\mathcal{D}$.
2. Déterminer le sous-groupe $A^{-1}\,\mathrm{SU}(1,1)A$.
3. Comparer les actions du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$ et du groupe $\mathrm{SU}(1,1)$ sur $\mathcal{D}$.

TD 6 : Matrices Hermitiennes, décomposition polaire

Exercice 1. On rappelle que H_n désigne l'ensemble des matrices Hermitiennes, H_n^+ désigne l'ensemble des matrices Hermitiennes positives et H_n^{++} désigne l'ensemble des matrices Hermitiennes définies positives.

1. Est-ce que H_n, H_n^+ et H_n^{++} sont fermés ?
2. Montrer que H_n^{++} est un ouvert dense dans H_n^+.
3. Montrer que H_n^+ et H_n^{++} sont des ensembles convexes. Sont-ils connexes ?

Exercice 2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice 2×2. Sous les trois hypothèses suivantes, est-il possible que M soit dans H_2 ? dans H_2^+ ? dans H_2^{++} ?

1. On suppose $\operatorname{tr}(M) = 2$ et $\det(M) = 2$.
2. On suppose $\operatorname{tr}(M) = 7$ et $\det(M) = 12$.
3. On suppose que le polynôme caractéristique de M est $X^2 - 1$.

Déterminer toutes les matrices Hermitiennes $M \in H_2$ telles que $\operatorname{tr}(M)^2 = 4\det(M)$.

Exercice 3. On considère les normes matricielles $|||\cdot|||_1$, $|||\cdot|||_2$ et $|||\cdot|||_\infty$ associées aux normes 1, 2, ∞ standards sur $\mathbb{C}^n$. Pour une matrice quelconque $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(M)$ son *rayon spectral*, qui est par définition égal au maximum des modules de ses valeurs propres. Soit A, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}$ les coefficients de A.

1. Montrer que $|||AB|||_2 \leq |||A|||_2 |||B|||_2$. Est-ce vrai si on remplace 2 par 1 ? par ∞ ?
2. Montrer que $|||A|||_1 = \sup_j \sum_i |a_{i,j}|$ et $|||A|||_\infty = \sup_i \sum_j |a_{i,j}|$.
3. Que vaut $|||A|||_2$ si A est unitaire ?
4. Montrer que $|||A|||_2 = (\rho(A^*A))^{1/2}$.
5. Montrer que, si $A \in H_n^+$, alors $|||A|||_2 = \left|\left|\left|\sqrt{A}\right|\right|\right|_2^2$. En déduire que, si (A_k) est une suite bornée dans H_n^+, alors $(\sqrt{A_k})$ est une suite bornée dans H_n^+.

Exercice 4.

1. Soit U une matrice unitaire, construire une racine carrée de U. Est-elle unique ?
2. Soit $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Montrer qu'il existe une matrice hermitienne $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 = B$.
3. Soit $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. On suppose que B est *négative*, c'est-à-dire que pour tout $Z \in \mathbb{C}^n$ on a $Z^*BZ \leq 0$.
   (a) Montrer que toutes les valeurs propres de B sont négatives.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice anti-Hermitienne $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = B$. Une telle matrice est-elle unique ?

Exercice 5.

1. Soit A une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un unique couple (P, U) tel que $U \in U(n)$, $P \in H_n^{++}$ et $A = PU$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Existe-t-il $U \in U(n)$ et $P \in H_n^+$ telles que $M = UP$? S'il existe, un tel couple est-il unique ?

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2019-2020**
M1 Mathématiques HMMA114

TD 7 : Exponentielle de matrices

Exercice 1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que par décomposition polaire réelle, il existe des matrices $\Omega \in \mathrm{O}(n)$ et $P \in S_n^{++}$ telles que $A = \Omega P$. On rappelle aussi que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles à déterminant strictement positif.

1. Que peut-on dire de Ω si $A \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $\exp(S_n) = S_n^{++}$.
3. En déduire que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe.

Exercice 2. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A et $\exp(A)$ commutent.
2. Montrer que si λ est valeur propre de A alors e^λ est valeur propre de $\exp A$.
3. Soit μ une valeur propre de $\exp A$ et $Z \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. Supposons que AZ est non-nul. Montrer que AZ est vecteur propre de $\exp A$ pour la valeur propre μ.
4. Montrer que, pour A, $B \in H_n$, $\exp(A) = \exp(B)$ si et seulement si $A = B$.

Exercice 4. Montrer que l'application de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ qui à A associe $\exp A$ est surjective. (Indication : utiliser la réduction de Jordan.)

Exercice 5.

1. Existe-t-il une matrice réelle A telle que $\exp(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?
2. Existe-t-il une matrice réelle A telle que $\exp(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

Exercice 6. Montrer qu'une matrice $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est l'exponentielle d'une matrice réelle si et seulement si elle admet une racine carrée réelle.

Exercice 7. * Généraliser les cas particuliers précédents à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $\operatorname{tr} A = 0$ alors $\det(\exp A) = 1$.
2. Montrer que si A est Hermitienne et $\det(\exp A) = 1$ alors $\operatorname{tr} A = 0$.
3. En déduire une preuve de la connexité de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 9. On considère la norme $|||\cdot|||_2$ associée à la norme Hermitienne sur $\mathbb{C}^n$. Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|||A - I_n|||_2 < 1$, on définit

$$\log(A) := \sum_{m \geq 1} (-1)^{m+1} \frac{(A - I_n)^m}{m}.$$

1. Montrer que log est bien définie, et continue sur son ensemble de définition.
2. Montrer que $\log \circ \exp(B) = B$ si $|||B|||_2 < \ln(2)$ (on pourra commencer par traiter le cas des matrices diagonalisables).
3. Montrer que $\exp \circ \log(A) = A$ si $|||A - I_n|||_2 < 1$.

TD 8 : Représentations de groupes finis

Exercice 1. Soit H_8 le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Ce groupe est appelé le groupe des *quaternions* (fini). Montrer que la représentation naturelle $H_8 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ induite par cette définition est une représentation irréductible du groupe H_8.

Exercice 2. Déterminer toutes les représentations irréductibles du groupe (abélien) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à équivalence près.

Exercice 3. On considère encore le groupe de Klein

$$\mathrm{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\mathrm{Id}, a, b, ab\},$$

dont les caractères irréductibles sont notés $\mathbf{1}$, χ_1, χ_2 et $\chi_1\chi_2$.

1. Soit ρ la représentation de K de degré 2 qui associe à a et b les matrices dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ de deux réflexions orthogonales d'axes orthogonaux dans $\mathbb{R}^2$.
   (a) Calculer le caractère χ de ρ.
   (b) Calculer $(\chi|\chi)$. La représentation ρ est-elle irréductible ?
   (c) Décomposer χ en somme de caractères irréductibles.
2. Mêmes questions pour la représentation ρ' de K de degré 3 qui associe à a et b les réflexions de matrices respectives

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Interpréter la relation entre ρ et ρ' géométriquement, puis en termes de leurs caractères.

Exercice 4. Combien y a-t-il de représentations de degré 3 de $\mathfrak{S}_3$ à équivalence près ? (On commencera par compléter la table de caractères de $\mathfrak{S}_3$ située plus loin dans le TD).

Exercice 5. Soit G un groupe fini. Déterminer (en fonction de G), tous les entiers m tels qu'il existe une représentation ρ de G dont le caractère χ_ρ satisfait $\chi_\rho(e) = m$ et $\chi_\rho(g) = 0$ pour $g \neq e$.

Exercice 6. On considère l'action habituelle de $\mathfrak{S}_4$ sur $\{1, 2, 3, 4\}$ et la représentation de permutation $\rho : \mathfrak{S}_4 \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ associée. On considère les sous-espaces vectoriels V et W de $\mathbb{C}^4$ définis par

$$V = \mathbb{C}(1, 1, 1, 1)$$
$$W = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \mid z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0\}$$

1. Rappeler les classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_4$, et déterminer le caractère de ρ.
2. Montrer que V et W sont stables par ρ et que $\mathbb{C}^4 = V \oplus W$.
3. Montrer que la restriction de ρ à V est la représentation triviale.
4. Soit π la restriction de ρ à W. Calculer le caractère de π.
5. En déduire que π est irréductible.

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, calculer le caractère de la représentation donnée, puis montrer qu'elle est irréductible.

1. Un isomorphisme entre $\mathfrak{A}_4$ et le groupe de rotations du tétraèdre.
   (On rappelle que ce groupe a quatre classes de conjugaison :
   — $\{\mathrm{Id}\}$,
   — $\{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (2\ 4\ 3)\}$,
   — $\{(1\ 3\ 2), (1\ 4\ 3), (1\ 2\ 4), (2\ 3\ 4)\}$ et
   — $\{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.)
2. Un isomorphisme entre $\mathfrak{S}_4$ et le groupe de rotations du cube.
3. Un isomorphisme entre $\mathfrak{S}_4$ et le groupe d'isométries du tétraèdre.

Exercice 8. Compléter les tables de caractères suivantes en s'aidant des autres exercices de la feuille de TD (il est utile d'inclure également le cardinal des classes de conjugaison).

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{1}\}$
1		
χ		

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{1}\}$	$\{\bar{2}\}$
1			
χ			
$\bar{\chi}$			

$\mathfrak{S}_3$	$\{e\}$	2-cycles	3-cycles
$\mathbf{1}$	1	1	1
ϵ			
χ			

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{1}\}$	$\{\bar{2}\}$	$\{\bar{3}\}$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1
χ	1			
χ^2	1			
χ^3	1			

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$\{(\bar{0},\bar{0})\}$	$\{(\bar{0},\bar{1})\}$	$\{(\bar{1},\bar{0})\}$	$\{(\bar{1},\bar{1})\}$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1
χ_1	1	1	-1	
χ_2	1	-1		
$\chi_1\chi_2$	1			

$\mathfrak{S}_4$	$\{\mathrm{Id}\}$	$\mathrm{Cl}((1\ 2))$	$\mathrm{Cl}((1\ 2)(3\ 4))$	$\mathrm{Cl}((1\ 2\ 3))$	$\mathrm{Cl}((1\ 2\ 3\ 4))$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1				
χ_{tri}	2				
χ_{tetra}					
χ_{cube}					

$\mathfrak{A}_4$	$\{\mathrm{Id}\}$	$\mathrm{Cl}((1\ 2\ 3))$	$\mathrm{Cl}((1\ 3\ 2))$	$\mathrm{Cl}((1\ 2)(3\ 4))$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1
χ	1			
χ^2				
χ_{tetra}				

Exercice 9. Soit G un groupe fini. Dans cet exercice, on va montrer qu'il y a autant de classes de conjugaisons dans G que de classes d'équivalences de représentations linéaires complexes irréductibles (de degré fini) de G. On considère pour cela l'ensemble

$$F := \left\{ f : G \to \mathbb{C} \mid \forall g, h \in G, f(ghg^{-1}) = f(h) \right\}$$

des fonctions centrales sur G.

1. Montrer que F est un espace vectoriel complexe de dimension finie, et que cette dimension est égale au nombre de classes de conjugaisons dans G.
2. On rappelle que F est muni du produit scalaire Hermitien

$$(f_1 \mid f_2) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}$$

   Soient $\rho_1, \ldots, \rho_k$ des représentants des k classes d'équivalences de représentations irréductibles de G. Montrer que la famille des caractères de ces représentations $(\chi_{\rho_1}, \ldots, \chi_{\rho_k})$ est une famille libre.
3. On veut montrer que la famille $(\chi_{\rho_1}, \ldots, \chi_{\rho_k})$ engendre F. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une fonction centrale $f \in F \setminus \{0\}$ qui vérifie

$$(f \mid \chi_{\rho_i}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq k.$$

   Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation quelconque de G, on pose

$$\phi_\rho := \sum_{g \in G} f(g)\rho(g).$$

   (a) Montrer que ϕ_ρ est un endomorphisme de V qui satisfait $\phi_\rho \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \phi_\rho$ pour tout $g \in G$.

   (b) Si V est irréductible, montrer que ϕ_ρ est nulle (penser au Lemme de Schur).

   (c) En déduire que ϕ_ρ est nulle pour toute représentation ρ.

   (d) En considérant la représentation régulière par exemple, en déduire que $f(g) = 0$ pour tout $g \in G$.
4. Conclure