UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2019-2020**
M1 Mathématiques HMMA114

Géométrie et Groupes Classiques – Examen final

Les documents et instruments électroniques ne sont pas autorisés.
L'énoncé comporte 4 pages et 6 Exercices.
Les exercices sont pour l'essentiel indépendants, sauf l'Exercice 6 où il est possible d'utiliser les exercices précédents.
L'Exercice 5 utilise des notations et le résultat introduits dans l'Exercice 4.

Exercice 1.
Montrer que pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice unitaire U et une matrice Hermitienne positive P telles que $M = UP$. La matrice P est-elle uniquement déterminée par M ? La matrice U est-elle uniquement déterminée par M ?

Exercice 2.
On rappelle qu'une matrice $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est **nilpotente** s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$.
On dit qu'une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est **unipotente** si $M - I_n$ est nilpotente.
On note :
— $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$,
— $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des matrices nilpotentes dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$,
— $\mathcal{V}_3 \subset \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices conjuguées à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

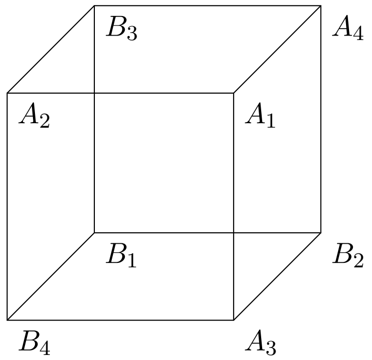
— $\mathrm{lg} : \mathrm{M}_3(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ l'application définie par

$$\mathrm{lg}(M) = M - I_3 - \frac{(M - I_3)^2}{2}.$$

1. Montrer que $\mathcal{U}_n$ est stable sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathcal{U}_n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
3. Trouver toutes les matrices Hermitiennes qui sont unipotentes, puis toutes les matrices unitaires qui sont unipotentes.
4. Décrire les classes de conjugaison de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ contenues dans $\mathcal{U}_3$.
5. Déterminer l'adhérence de $\mathcal{V}_3$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.
6. Montrer que l'exponentielle d'une matrice nilpotente est une matrice unipotente.
7. Montrer que $\mathcal{N}_3$ et $\mathcal{U}_3$ sont homéomorphes.
8. Montrer que $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{U}_3$ et $\mathcal{V}_3$ sont connexe par arcs.

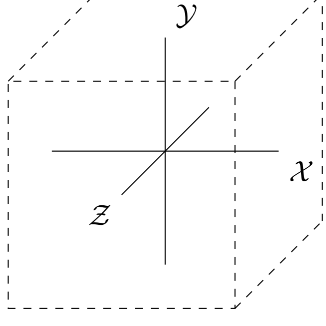
Exercice 3.
On considère le cube $C \subset \mathbb{R}^3$ dont les sommets sont donnés par

$$\begin{array}{llll} A_1 = (\ \ 1, \ \ 1, \ \ 1) & B_1 = (-1, -1, -1) & A_2 = (-1, \ \ 1, \ \ 1) & B_2 = (\ \ 1, -1, -1) \\ A_3 = (\ \ 1, -1, \ \ 1) & B_3 = (-1, \ \ 1, -1) & A_4 = (\ \ 1, \ \ 1, -1) & B_4 = (-1, -1, \ \ 1) \end{array}$$



Soit G le groupe des éléments de SO(3) qui laissent le cube C stable. Soit $\mathcal{D}_i$ la droite de $\mathbb{R}^3$ passant par les points A_i et B_i, pour $1 \leq i \leq 4$.

1. Justifier que G agit sur l'ensemble $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4\}$.
2. Trouver un élément de G qui envoie A_1 sur B_1, A_4 sur B_4, A_2 sur B_3 et A_3 sur B_2. Quelle est son action sur $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4\}$? Calculer sa trace.
3. Décrire un élément d'ordre 3 dans G qui laisse $\mathcal{D}_1$ stable. Calculer sa trace.
4. Montrer que l'action de G sur $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4\}$ est transitive.
5. Soit $\mathcal{D}$ une droite vectorielle quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les axes possibles des rotations non-triviales préservant $\mathcal{D}$.
6. En déduire qu'un élément de G qui stabilise à la fois $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ est nécessairement trivial.
7. Montrer que le morphisme de G vers $\mathfrak{S}_4$ induit par l'action sur $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4\}$ est injectif.
8. Montrer que le groupe G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.
9. Choisissez un élément de G qui est envoyé sur un 4-cycle par cet isomorphisme. Que valent sa trace et son déterminant ? Est-ce que la réponse dépend de l'élément choisi ?
10. Soient $\mathcal{X} = \mathrm{Vect}(1, 0, 0)$, $\mathcal{Y} = \mathrm{Vect}(0, 1, 0)$ et $\mathcal{Z} = \mathrm{Vect}(0, 0, 1)$ les axes de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$. Justifier que G agit sur l'ensemble $\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$.



11. Déterminer le noyau de l'application $\phi : G \to \mathfrak{S}_3$ induite par cette action.
12. En déduire que l'application ϕ est surjective.

Exercice 4.
Si un groupe G agit sur un ensemble X, $x \in X$ et $h \in G$, on note

$$\begin{aligned} \mathrm{Stab}_G(x) &:= \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \\ \mathrm{Fix}_G(h) &:= \{y \in X \mid h \cdot y = y\}\,. \end{aligned}$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer l'énoncé suivant. On pourra par contre l'utiliser librement dans l'Exercice 5.

Théorème (**Formule de Burnside**)**.** Soit X un ensemble fini, et G un groupe fini agissant sur X. Alors le nombre $\#(X/G)$ d'orbites de G dans X satisfait l'égalité :

$$\#(X/G) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \#(\mathrm{Fix}_X(g)).$$

1. On suppose d'abord que G agit transitivement sur X, et on considère l'ensemble
$$S = \{(x, g) \in X \times G \mid g \cdot x = x\}.$$
   (a) Exprimer le cardinal de S en fonction des cardinaux des $\mathrm{Fix}_X(g)$ pour $g \in G$.
   (b) Exprimer le cardinal de S en fonction des cardinaux des $\mathrm{Stab}_G(x)$ pour $x \in X$.
   (c) Prouver la formule de Burnside dans le cas d'une action transitive.
2. Conclure pour le cas général, en se ramenant au cas précédent.

Exercice 5.
Soit G un groupe fini, et X un ensemble fini sur lequel G agit. On rappelle que la **représentation de permutation** ρ_X associée est obtenue en considérant un espace vectoriel complexe V de dimension $\#X$, de base (e_x) pour $x \in X$, et en associant à $g \in G$ l'application linéaire qui envoie e_x sur $e_{g \cdot x}$. On note χ_X le caractère de ρ_X.

1. Donner l'expression de $\chi_X(g)$ en fonction de $\mathrm{Fix}_X(g)$, pour $g \in G$.
2. Exprimer $(\chi_X \mid \mathbf{1})$, où $\mathbf{1}$ est le caractère de la représentation triviale de degré 1.
3. En utilisant la formule de Burnside, montrer que l'action de G sur X est transitive si et seulement si $\rho_X \sim \mathbf{1} \oplus \theta$ où la représentation θ ne contient pas de sous-représentation triviale.
4. On fait agir G diagonalement sur $X^2 = X \times X$ en posant $g \cdot (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y)$ pour $g \in G$, $(x, y) \in X^2$. Montrer l'égalité $\chi_{X \times X} = \chi_X^2$.
5. Montrer que l'ensemble $\mathrm{diag}(X) = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ est stable par l'action de G.
6. On dit que l'action de G sur X est **doublement transitive** si pour tout choix de (x_1, y_1) et $(x_2, y_2) \in X^2$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x_1 = x_2$ et $g \cdot y_1 = y_2$. Montrer que l'action de G sur X est doublement transitive si et seulement si
$$(\chi_X^2 \mid \mathbf{1}) = 2.$$

7. En déduire que l'action de G sur X est doublement transitive si et seulement si la représentation θ de la question 3 est irréductible.
8. Appliquer le résultat de la question précédente pour calculer le caractère de la représentation irréductible de degré deux de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 6.
On se donne la table des caractères partielle de $\mathfrak{S}_4$ suivante. On admet pour le moment que la ligne du caractère χ_3 correspond à la représentation donnée par l'isomorphisme entre $\mathfrak{S}_4$ et le groupe des rotations du cube, qui fait l'objet de l'Exercice 3.

classe de conjugaison :	Cl(Id)	Cl((1 2))			
cardinal :	1	6	3	8	6
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
ϵ	1		1	1	-1
χ_2	2		2	-1	0
χ_3	3				1
χ_4				0	

1. Rappeler les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_4$. En déduire quelle classe de conjugaison correspond à quelle colonne dans la table.

   Les trois questions suivantes peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
2. Décrire une représentation irréductible ρ_2 de caractère χ_2 (on pourra s'aider de la fin de l'Exercice 3 et de l'Exercice 5).
3. Décrire une représentation irréductible ρ_4 de caractère χ_4 (on pourra s'inspirer de l'Exercice 3 ou utiliser l'Exercice 5).
4. Recopier la table des caractères sur votre copie, et la compléter en justifiant (on préférera l'utilisation d'exercices précédents, mais il est possible de faire sans).
