UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2020-2021**
M1 Mathématiques HMMA114

Exercices Chapitre 1

Exercice 1. On se propose de montrer la propriété suivante : un groupe topologique G est séparé si et seulement si $\{e\}$ est fermé.

1. Montrer que dans tout espace topologique séparé, les singletons sont fermés.
2. Trouver une application continue $G \times G \to G$ telle que l'image réciproque de $\{e\}$ soit la diagonale $\mathrm{diag}(G) = \{(g,g) \mid g \in G\}$.
3. Conclure (on utilisera le fait que la topologie produit est engendrée par les produits d'ouverts).

Exercice 2. On considère l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ par multiplication à droite par l'inverse : $A \cdot M = MA^{-1}$. Déterminer les orbites pour cette action.

Même question pour la multiplication à gauche.

Exercice 3. Montrer que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang *sans utiliser le pivot de Gauss.*

Exercice 4. Démontrer que le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est le sous-groupe formé des matrices scalaires.

Exercice 5. On note $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{D}$, resp. $\mathcal{T}$) le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices de permutation (resp. dilatation, resp. transvection.)

1. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par $\mathcal{P} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{T}$.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par $\mathcal{D} \cup \mathcal{T}$.

Exercice 6. On utilise les notations de l'exercice précédent. De plus, on note $\mathcal{T}^{\mathrm{sup}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{T}$ formé des matrices de transvections qui sont triangulaires supérieures.

1. Quel est le sous-groupe engendré par $\mathcal{D}$?
2. Soient U le sous-groupe engendré par $\mathcal{T}^{\mathrm{sup}}$, et B le sous-groupe engendré par $\mathcal{T}^{\mathrm{sup}} \cup \mathcal{D}$. Décrire U et B.
3. Montrer que U est distingué dans B.
4. Identifier le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ engendré par $\mathcal{T}$.

Exercice 7. Les groupes suivants sont-ils connexes ?

$$\{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\, |\det(M)| = 1\}, \quad \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\, |\det(M)| = 1\}.$$

Exercice 8.

1. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. En utilisant le polynôme caractéristique, montrer qu'il y a au plus un nombre fini de $z \in \mathbb{C}$ tels que la matrice $zM + (1-z)I_n$ n'est pas inversible.
2. En déduire une preuve que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
3. En déduire une preuve que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
4. Que se passe-t-il dans $\mathbb{R}$?

Exercice 9. Déterminer la forme de Jordan dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. On fixe un nombre complexe λ pendant tout l'exercice. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ qui admettent λ comme valeur propre triple.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison, c'est-à-dire que pour tout couple de matrices $(A, B) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})^2$, si $A \in \mathcal{A}$ et B est semblable à A, alors $B \in \mathcal{A}$.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ est formé de trois classes de similitude. Donner un représentant de chaque classe. Lesquelles sont finies/infinies ?

Exercice 11. On fixe un nombre complexe λ pendant tout l'exercice. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ qui admettent λ comme valeur propre triple. On rappelle que $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison et formé de trois classes de similitude, pour lesquelles on utilisera les notations suivantes :

$$\mathcal{B} = \mathrm{cl}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \mathcal{C} = \mathrm{cl}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \mathcal{D} = \mathrm{cl}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
2. La partie $\mathcal{B}$ est-elle fermée ? Bornée ? Compacte ?
3. Mêmes questions pour $\mathcal{C}$, puis $\mathcal{D}$.

Exercice 12. Décrire les classes de similitude de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Combien y en a-t-il ? Donner un représentant de chaque classe. Lesquelles sont fermées ? Bornées ? Compactes ?

Exercice 13. On considère l'ensemble $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$. Étant donné $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$ $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on définit une application $h_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ de la manière suivante :

$$h_A\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty, \qquad h_A(\infty) = \frac{a}{c} \qquad \text{et} \quad h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$$

où si $c = 0$, on identifie $-d/c$ et a/c à ∞. Les applications h_A ainsi définies s'appellent les **homographies**.

1. Montrer que l'application $A \mapsto h_A$ définit un morphisme de groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{Bij}(\hat{\mathbb{C}})$ (autrement dit, une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sur $\hat{\mathbb{C}}$).
2. Montrer que cette action est transitive.
3. Déterminer le stabilisateur d'un élément de votre choix pour cette action. En déduire une identification de $\hat{C}$ avec un ensemble étudié en cours.
4. Déterminer le noyau du morphisme $A \mapsto h_A$.
5. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est engendré par les homographies

$$\mathrm{Inv} : z \mapsto z^{-1}, \qquad T : z \mapsto z+1 \qquad \text{et} \quad D_\alpha : z \mapsto \alpha z \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{C}^*.$$

Exercice 14. Soient z_1, z_2, z_3 trois points distincts de $\hat{\mathbb{C}}$.

1. Montrer qu'il existe une unique homographie $h \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ qui envoie ces trois points respectivement sur ∞, 0 et 1. on note alors

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \hat{\mathbb{C}}$$

   l'image d'un élément $z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ par cette homographie h. C'est le **birapport** de (z_1, z_2, z_3, z_4).
2. Montrer que

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \in \mathbb{C}$$

   si z_4 est différent de z_1 et si z_1, z_2, z_3 sont dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer que les homographies préservent le birapport.
4. Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre points distincts de $\hat{\mathbb{C}}$ et $r = [z_1, z_2, z_3, z_4]$. Montrer que $[z_2, z_1, z_3, z_4] = [z_1, z_2, z_4, z_3] = \frac{1}{r}$ et que $[z_1, z_3, z_2, z_4] = 1 - r$.

Exercices Chapitre 2

Exercice 1.

1. Montrer que toute matrice de $\mathrm{SU}(2)$ s'écrit sous la forme $M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ avec α, β deux nombres complexes tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.
2. Montrer que toute matrice de $\mathrm{U}(2)$ s'écrit sous la forme $e^{i\phi}M$ avec $\phi \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathrm{SU}(2)$.

Exercice 2. On considère la partition $\hat{\mathbb{C}} = \hat{\mathbb{R}} \sqcup \mathbb{H} \sqcup \overline{\mathbb{H}}$ formée par les sous-ensembles $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ et $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) < 0\}$ (où $\Im(z)$ désigne la partie imaginaire de z). L'ensemble $\mathbb{H}$ est appelé le **demi-plan de Poincaré**.

Montrer que les orbites du sous-groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ pour l'action par homographies sont exactement les trois sous-ensembles ci-dessus.

Exercice 3. On considère $\mathrm{SU}(1,1) = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \mid MJM^* = J\}$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathrm{SU}(1,1)$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.
2. Plus précisément, montrer que c'est le groupe unitaire d'une forme hermitienne à déterminer.
3. Montrer que les matrices de $\mathrm{SU}(1,1)$ sont de la forme $\begin{pmatrix} u & \overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}$ avec u et v dans $\mathbb{C}$ tels que $|u|^2 - |v|^2 = 1$.
4. Le sous-groupe $\mathrm{SU}(1,1)$ est-il compact ?

Exercice 4. Montrer que le disque unité ouvert $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ de $\hat{\mathbb{C}}$ est stable sous l'action du groupe $\mathrm{SU}(1,1)$ par homographies.

Exercice 5. On considère l'homographie $h_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ définie par $A := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

1. Montrer que h_A détermine une bijection du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ sur le disque unité $\mathcal{D}$.
2. Déterminer le sous-groupe $A^{-1}\,\mathrm{SU}(1,1)A$.
3. Comparer les actions du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$ et du groupe $\mathrm{SU}(1,1)$ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 6.

1. Soient A, $B \in \mathrm{U}(n)$ deux matrices unitaires telles que $AB = BA$. Montrer que chaque sous-espace propre de A est stable par B. En déduire que $\mathbb{C}^n$ admet une base formée de vecteurs qui sont propres à la fois pour A et pour B.
2. Réciproquement, soient A, $B \in \mathrm{U}(n)$ deux matrices unitaires telles qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs qui sont propres à la fois pour A et pour B. Montrer que A et B commutent.

Exercice 7.

1. Soit n un entier ≥ 1. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $U \in \mathrm{U}(n)$ telle que pour tout $Z \in \mathbb{C}^n$ on ait UZ orthogonal à Z.
2. Que se passe-t-il si l'on remplace $\mathrm{U}(n)$ par $\mathrm{O}(n)$ et $\mathbb{C}^n$ par $\mathbb{R}^n$?

Exercice 8. On considère la matrice A suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que A est orthogonale. Calculer son déterminant et sa trace.
2. L'isométrie f_A représentée par A est-elle une rotation ? Une réflexion ? Une roto-réflexion ?
3. Donner les éléments géométriques de A, c'est-à-dire son plan (s'il s'agit d'une réflexion,) ou son axe et son angle non-orienté (s'il s'agit d'une rotation ou d'une rotoréflexion.)

Exercice 9. Même exercice avec la matrice B suivante :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Même exercice avec la matrice C suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs non-colinéaires. On note S_u et S_v les symétries orthogonales par rapport aux hyperplans $(\mathbb{R}u)^\perp$ et $(\mathbb{R}v)^\perp$. On considère $R = S_u \circ S_v$.

1. Montrer que le plan $\pi = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v$, et $\pi^\perp$ sont stables par R.
2. Déterminer la restriction de R à $\pi^\perp$.
3. Montrer que la restriction de R à π est une rotation du plan euclidien π dont on déterminera l'angle en fonction de u et v.
4. Que dire de R ?

Exercice 12. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On considère le sous-ensemble de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ donné par

$$R_m := \left\{ e^{2ik\pi/m} \mid 0 \leq k \leq m-1 \right\}$$

On note $\mathrm{Isom}(R_m)$ le groupe des éléments de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ qui envoient R_m sur lui-même, et $\mathrm{Isom}^+(R_m) = \mathrm{Isom}(R_m) \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. On suppose, sauf pour la dernière question, que $m \geq 3$.

1. Déterminer $\mathrm{Isom}^+(R_m)$.
2. Soit x un point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Quel est le stabilisateur $\mathrm{Stab}(x)$ de x dans $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$?
3. Montrer que $\mathrm{Stab}(e^{2ik\pi/m}) \subset \mathrm{Isom}(R_m) \setminus \mathrm{Isom}^+(R_m)$ pour tout k.
4. Montrer que $\mathrm{Isom}(R_m)$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rtimes_\theta \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\theta : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est défini par $\theta(\bar{1}) = -\mathrm{Id}$.
5. Déterminer $\mathrm{Isom}(R_1)$ et $\mathrm{Isom}(R_2)$. La représentation induite par l'action de $\mathrm{Isom}(R_2)$ sur R_2 est-elle fidèle ?

Exercice 13. Soit $T = (ABCD)$ un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$ de centre O. On note $H = \mathrm{Isom}^+(T) \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ le groupe des rotations qui préservent T.

1. Montrer que l'action de H sur l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ est transitive et déterminer le stabilisateur de A.
2. Calculer le cardinal de H et faire la liste de ses éléments.
3. Montrer que H est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 14. Soit $T = (ABCD)$ un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$ de centre O. On note $G = \mathrm{Isom}(T) \subset \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ le groupe d'isométries de T.

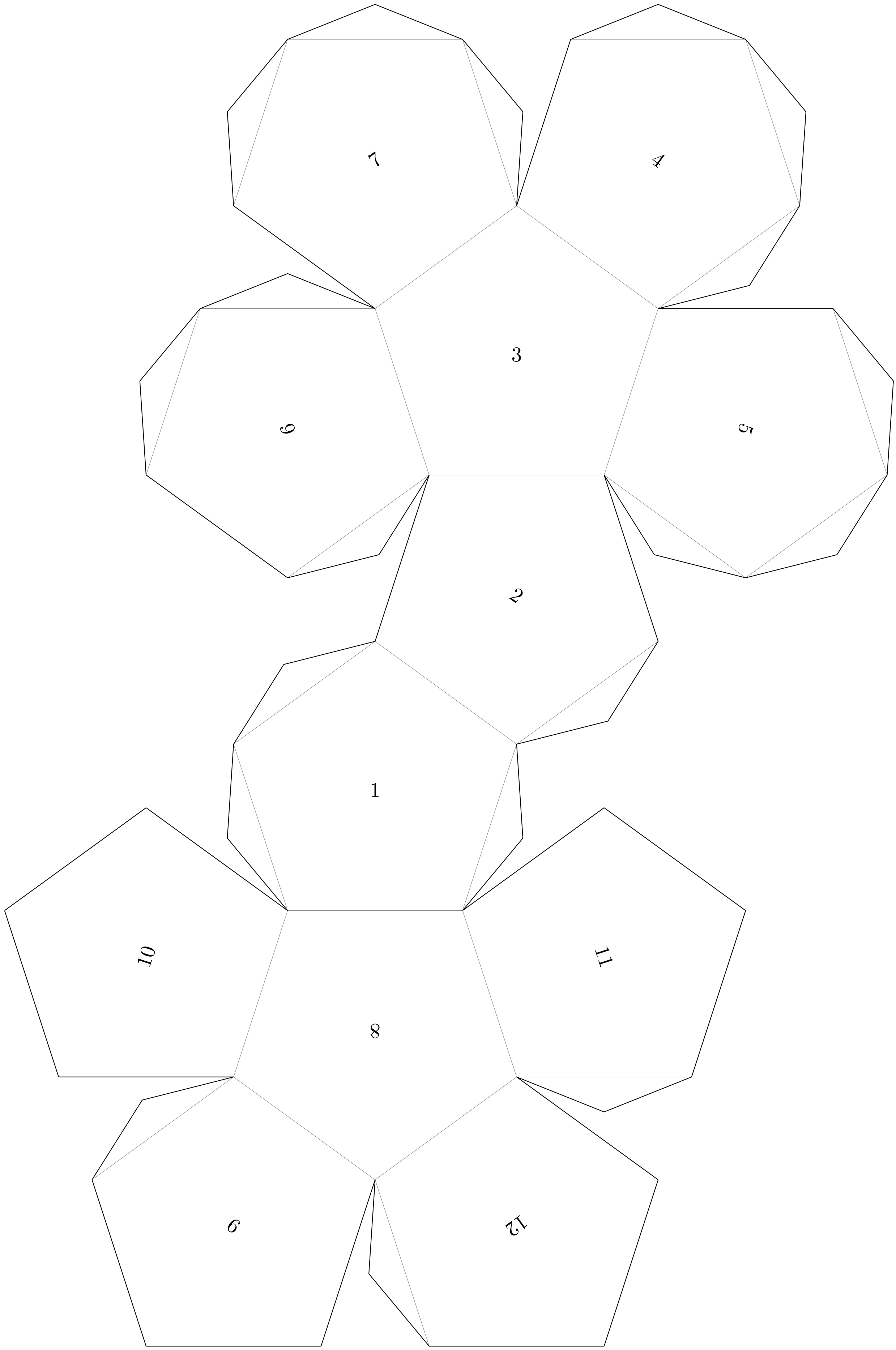
1. Montrer que l'action de G sur l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ est transitive et déterminer le stabilisateur de A.
2. Calculer le cardinal de G et faire la liste de ses éléments.
3. Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 15. Etudier les groupes $\mathrm{Isom}^+(Q)$ et $\mathrm{Isom}^+(D)$ où Q est un cube et D un dodécaèdre régulier. Montrer que le premier de ces groupes est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ et le deuxième à $\mathfrak{A}_5$.

Montrer que pour le cube Q et le dodécaèdre régulier D on a $\mathrm{Isom}(Q) \cong \mathrm{Isom}^+(Q) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Isom}(D) \cong \mathrm{Isom}^+(D) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'énoncé correspondant est-il vrai pour le tétraèdre régulier ?

Exercice 16. Déterminer les classes de conjugaison dans les groupes suivants : $\mathrm{SO}(2)$, $\mathrm{O}(2)$, $\mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{O}(3)$.

Exercice 17. (*) Quels sont les groupes finis qui sont isomorphes à un sous-groupe de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$? De $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$? De $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$?


7
4
3
6
5
2
1
10
11
8
9
12

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2020-2021**
M1 Mathématiques HMMA114

TD Chapitre 3

Exercice 1. On rappelle que H_n désigne l'ensemble des matrices hermitiennes, H_n^+ désigne l'ensemble des matrices hermitiennes positives et H_n^{++} désigne l'ensemble des matrices hermitiennes définies positives.

1. Est-ce que H_n, H_n^+ et H_n^{++} sont fermés ?
2. Montrer que H_n^{++} est un ouvert dense dans H_n^+.
3. Montrer que H_n^+ et H_n^{++} sont des ensembles convexes. Sont-ils connexes ?

Exercice 2. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice 2×2. Sous les trois hypothèses suivantes, est-il possible que M soit dans H_2 ? dans H_2^+ ? dans H_2^{++} ?

1. On suppose $\mathrm{tr}(M) = 2$ et $\det(M) = 2$.
2. On suppose $\mathrm{tr}(M) = 7$ et $\det(M) = 12$.
3. On suppose que le polynôme caractéristique de M est $X^2 - 1$.

Déterminer toutes les matrices hermitiennes $M \in H_2$ telles que $\mathrm{tr}(M)^2 = 4\det(M)$.

Exercice 3. On considère les normes matricielles $|||\cdot|||_1$, $|||\cdot|||_2$ et $|||\cdot|||_\infty$ associées aux normes 1, 2, ∞ standards sur $\mathbb{C}^n$. Pour une matrice quelconque $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(M)$ son *rayon spectral*, qui est par définition égal au maximum des modules de ses valeurs propres. Soit A, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}$ les coefficients de A.

1. Montrer que $|||AB|||_2 \leq |||A|||_2 |||B|||_2$. Est-ce vrai si on remplace 2 par 1 ? par ∞ ?
2. Montrer que $|||A|||_1 = \sup_j \sum_i |a_{i,j}|$ et $|||A|||_\infty = \sup_i \sum_j |a_{i,j}|$.
3. Que vaut $|||A|||_2$ si A est unitaire ?
4. Montrer que $|||A|||_2 = (\rho(A^*A))^{1/2}$.
5. Montrer que, si $A \in H_n^+$, alors $|||A|||_2 = \left|\left|\left|\sqrt{A}\right|\right|\right|_2^2$. En déduire que, si (A_k) est une suite bornée dans H_n^+, alors $(\sqrt{A_k})$ est une suite bornée dans H_n^+.

Exercice 4.

1. Soit U une matrice unitaire, construire une racine carrée de U. Est-elle unique ?
2. Soit $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Montrer qu'il existe une matrice hermitienne $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 = B$.
3. Soit $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. On suppose que B est *négative*, c'est-à-dire que pour tout $Z \in \mathbb{C}^n$ on a $Z^*BZ \leq 0$.
   (a) Montrer que toutes les valeurs propres de B sont négatives.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice anti-hermitienne $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = B$. Une telle matrice est-elle unique ?

Exercice 5.

1. Soit A une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un unique couple (P, U) tel que $U \in U(n)$, $P \in H_n^{++}$ et $A = PU$.
2. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Existe-t-il $U \in U(n)$ et $P \in H_n^{+}$ telles que $M = UP$? S'il existe, un tel couple est-il unique ?

Exercice 6. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que par décomposition polaire réelle, il existe des matrices $\Omega \in \mathrm{O}(n)$ et $P \in S_n^{++}$ telles que $A = \Omega P$. On rappelle aussi que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles à déterminant strictement positif.

1. Que peut-on dire de Ω si $A \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $\exp(S_n) = S_n^{++}$.
3. En déduire que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe.

Exercice 7. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A et $\exp(A)$ commutent.
2. Montrer que si λ est valeur propre de A alors e^{λ} est valeur propre de $\exp A$.
3. Soit μ une valeur propre de $\exp A$ et $Z \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. Supposons que AZ est non-nul. Montrer que AZ est vecteur propre de $\exp A$ pour la valeur propre μ.
4. Montrer que, pour A, $B \in H_n$, $\exp(A) = \exp(B)$ si et seulement si $A = B$.

Exercice 9. Montrer que l'application de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ qui à A associe $\exp A$ est surjective. (Indication : utiliser la réduction de Jordan.)

Exercice 10.

1. Existe-t-il une matrice réelle A telle que $\exp(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?
2. Existe-t-il une matrice réelle A telle que $\exp(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

Exercice 11. Montrer qu'une matrice $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est l'exponentielle d'une matrice réelle si et seulement si elle admet une racine carrée réelle.

Exercice 12. * Généraliser les cas particuliers précédents à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $\operatorname{tr} A = 0$ alors $\det(\exp A) = 1$.
2. Montrer que si A est hermitienne et $\det(\exp A) = 1$ alors $\operatorname{tr} A = 0$.
3. En déduire une preuve de la connexité de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 14. On considère la norme $|||\cdot|||_2$ associée à la norme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$. Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|||A - I_n|||_2 < 1$, on définit

$$\log(A) := \sum_{m \geq 1} (-1)^{m+1} \frac{(A - I_n)^m}{m}.$$

1. Montrer que log est bien définie, et continue sur son ensemble de définition.
2. Montrer que $\log \circ \exp(B) = B$ si $|||B|||_2 < \ln(2)$ (on pourra commencer par traiter le cas des matrices diagonalisables).
3. Montrer que $\exp \circ \log(A) = A$ si $|||A - I_n|||_2 < 1$.

Exercices Chapitre 4

Exercice 1. Soit H_8 le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Ce groupe est appelé le groupe des *quaternions* (fini). Montrer que la représentation naturelle $H_8 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ induite par cette définition est une représentation irréductible du groupe H_8.

Exercice 2. Déterminer toutes les représentations irréductibles du groupe (abélien) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à équivalence près.

Exercice 3. On considère encore le groupe de Klein

$$\mathrm{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\mathrm{Id}, a, b, ab\},$$

dont les caractères irréductibles sont notés $\mathbf{1}$, χ_1, χ_2 et $\chi_1\chi_2$.

1. Soit ρ la représentation de K de degré 2 qui associe à a et b les matrices dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ de deux réflexions orthogonales d'axes orthogonaux dans $\mathbb{R}^2$.
   (a) Calculer le caractère χ de ρ.
   (b) Calculer $(\chi|\chi)$. La représentation ρ est-elle irréductible ?
   (c) Décomposer χ en somme de caractères irréductibles.
2. Mêmes questions pour la représentation ρ' de K de degré 3 qui associe à a et b les réflexions de matrices respectives

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Interpréter la relation entre ρ et ρ' géométriquement, puis en termes de leurs caractères.

Exercice 4. Combien y a-t-il de représentations de degré 3 de $\mathfrak{S}_3$ à équivalence près ? (On commencera par compléter la table de caractères de $\mathfrak{S}_3$ située plus loin dans le TD).

Exercice 5. Soit G un groupe fini. Déterminer (en fonction de G), tous les entiers m tels qu'il existe une représentation ρ de G dont le caractère χ_ρ satisfait $\chi_\rho(e) = m$ et $\chi_\rho(g) = 0$ pour $g \neq e$.

Exercice 6. On considère l'action habituelle de $\mathfrak{S}_4$ sur $\{1, 2, 3, 4\}$ et la représentation de permutation $\rho : \mathfrak{S}_4 \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ associée. On considère les sous-espaces vectoriels V et W de $\mathbb{C}^4$ définis par

$$V = \mathbb{C}(1, 1, 1, 1)$$
$$W = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \mid z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0\}$$

1. Rappeler les classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_4$, et déterminer le caractère de ρ.
2. Montrer que V et W sont stables par ρ et que $\mathbb{C}^4 = V \oplus W$.
3. Montrer que la restriction de ρ à V est la représentation triviale.
4. Soit π la restriction de ρ à W. Calculer le caractère de π.
5. En déduire que π est irréductible.

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, calculer le caractère de la représentation donnée, puis montrer qu'elle est irréductible.

1. Un isomorphisme entre $\mathfrak{A}_4$ et le groupe de rotations du tétraèdre.
   (On rappelle que ce groupe a quatre classes de conjugaison :
   — $\{\mathrm{Id}\}$,
   — $\{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (2\ 4\ 3)\}$,
   — $\{(1\ 3\ 2), (1\ 4\ 3), (1\ 2\ 4), (2\ 3\ 4)\}$ et
   — $\{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.)
2. Un isomorphisme entre $\mathfrak{S}_4$ et le groupe de rotations du cube.
3. Un isomorphisme entre $\mathfrak{S}_4$ et le groupe d'isométries du tétraèdre.

Exercice 8. Compléter les tables de caractères suivantes en s'aidant des autres exercices de la feuille de TD (il est utile d'inclure également le cardinal des classes de conjugaison).

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{1}\}$
1		
χ		

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{1}\}$	$\{\bar{2}\}$
1			
χ			
$\bar{\chi}$			

$\mathfrak{S}_3$	$\{e\}$	2-cycles	3-cycles
$\mathbf{1}$	1	1	1
ϵ			
χ			

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{1}\}$	$\{\bar{2}\}$	$\{\bar{3}\}$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1
χ	1			
χ^2	1			
χ^3	1			

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$\{(\bar{0},\bar{0})\}$	$\{(\bar{0},\bar{1})\}$	$\{(\bar{1},\bar{0})\}$	$\{(\bar{1},\bar{1})\}$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1
χ_1	1	1	-1	
χ_2	1	-1		
$\chi_1\chi_2$	1			

$\mathfrak{S}_4$	$\{\mathrm{Id}\}$	Cl((1 2))	Cl((1 2)(3 4))	Cl((1 2 3))	Cl((1 2 3 4))
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1				
χ_{tri}	2				
χ_{tetra}					
χ_{cube}					

$\mathfrak{A}_4$	$\{\mathrm{Id}\}$	Cl((1 2 3))	Cl((1 3 2))	Cl((1 2)(3 4))
$\mathbf{1}$	1	1	1	1
χ	1			
χ^2				
χ_{tetra}				

Exercice 9. Soit G un groupe fini. Dans cet exercice, on va montrer qu'il y a autant de classes de conjugaisons dans G que de classes d'équivalences de représentations linéaires complexes irréductibles (de degré fini) de G. On considère pour cela l'ensemble

$$F := \left\{ f : G \to \mathbb{C} \mid \forall g, h \in G, f(ghg^{-1}) = f(h) \right\}$$

des fonctions centrales sur G.

1. Montrer que F est un espace vectoriel complexe de dimension finie, et que cette dimension est égale au nombre de classes de conjugaisons dans G.
2. On rappelle que F est muni du produit scalaire hermitien

$$(f_1 \mid f_2) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}$$

   Soient $\rho_1, \ldots, \rho_k$ des représentants des k classes d'équivalences de représentations irréductibles de G. Montrer que la famille des caractères de ces représentations $(\chi_{\rho_1}, \ldots, \chi_{\rho_k})$ est une famille libre.
3. On veut montrer que la famille $(\chi_{\rho_1}, \ldots, \chi_{\rho_k})$ engendre F. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une fonction centrale $f \in F \setminus \{0\}$ qui vérifie

$$(f \mid \chi_{\rho_i}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq k.$$

   Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation quelconque de G, on pose

$$\phi_\rho := \sum_{g \in G} f(g) \rho(g).$$

   (a) Montrer que ϕ_ρ est un endomorphisme de V qui satisfait $\phi_\rho \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \phi_\rho$ pour tout $g \in G$.
   (b) Si V est irréductible, montrer que ϕ_ρ est nulle (penser au Lemme de Schur).
   (c) En déduire que ϕ_ρ est nulle pour toute représentation ρ.
   (d) En considérant la représentation régulière par exemple, en déduire que $f(g) = 0$ pour tout $g \in G$.
4. Conclure