# Rappels de la semaine dernière

Déf (plats / fermés)

$M = (E, \mathcal{I})$ $\quad A \subset E$

- $cl(A) = \{x \in E \mid rg_M(A) = rg_M(A \cup \{x\})\}$

clôture

- A est plat si $A = cl(A)$

A est plat si
$\forall x \in E \setminus A$
$rg(A \cup \{x\}) > rg(A)$

Rque : Déf. alternative des matroïdes avec les plats
↳ cf. ci-dessous

Déf : Si $A \subset E$, $M = (E, \mathcal{I})$,

$$rg_M(A) = \max\left\{ card(I_A) \;\middle|\; \begin{array}{l} I_A \in \mathcal{I} \\ I_A \subset A \end{array} \right\}$$

$$corg_M(A) = rg(M) - rg(A)$$

Rque : $\emptyset$ est plat si $\forall x \in E, \{x\} \in \mathcal{I}$

# Exemple de plats sur les matroïdes de la semaine dernière

## RAPPELS

Exemple : matroïdes linéaires

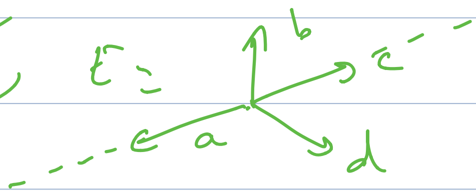
$V$ ev sur $\mathbb{K}$, $E \subset V$, $|E| < \infty$

$M := (E, \mathcal{I}) \to$ familles libres de $E$

Un matroïde isomorphe à un matroïde linéaire est dit représentable sur $\mathbb{K}$.

$A \subset E$ est plat si $A$ est un ens. de vecteurs dans un sev fixé

Exple : $V = \mathbb{R}^2$, $E =$




$\mathcal{I} = \{a, b, c, d, \emptyset, ab, ad, bc, bd, cd\}$

Les plats de $\mathcal{I}$ sont

$\mathcal{F} = \{\underbrace{abcd}_{E}, b, d, ac, \emptyset\}$

# RAPPELS

Exemple : Matroïdes uniformes

Soit $E = \{1, \dots, m\}$ et $r \in \mathbb{N}$

On définit le matroïde uniforme $U_{r,m} := (E, \mathcal{I})$

où $\mathcal{I} = \{ I \subset E \mid |I| \leq r \}$

$A$ est plat si
$\forall x \in E \setminus A$
$rg(A \cup \{x\}) > rg(A)$

Soit $A \subset E$ et $x \in E \setminus A$

Si $|A| < r$, $|A \cup \{x\}| \leq r$

et $rg(A \cup \{x\}) > rg(A)$

donc $A$ plat

Si $|A| = r$, $rg(A) = r = rg(A \cup \{x\})$

Conclusion : les plats sont $\{A \mid |A| < r\} \cup E$

Exple : $U_{2,4}$

$E = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathcal{I} = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34\}$

$\mathcal{F} = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 1234\}$

$\{1, 2\}$ non plat car $rg(\{1, 2\}) = rg(\{1, 2, 3\}) = 2$

# RAPPELS

**Exemple :** Matroïdes graphiques

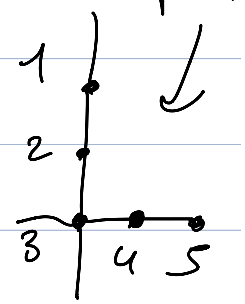
Graphe $G=(V,E) \rightsquigarrow M(G)=(E,\mathcal{I})$

où $E$ = arêtes du graphe
$\mathcal{I}$ = forêts de $E$

Bases = {arbres couvrants de $G$}

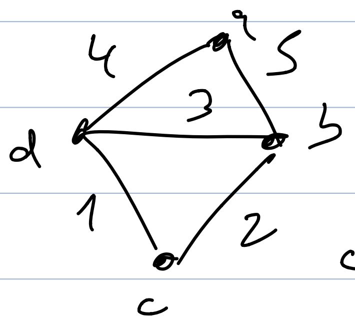
Intersect$^{\text{ion}}$ avec plan

ds $\mathbb{R}^3$ ?




$A$ est plat si
$\forall x \in E \setminus A$
$rg(A \cup \{x\}) > rg(A)$

Exple : (Björner)



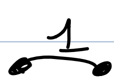

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline a & & & & & \\ b & & & & & \\ c & & & & & \\ d & & & & & \end{array}
\qquad
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

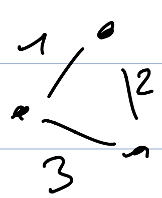
Plats = {∅, 1, 2, 3, 4, 5, 15, 24, 123, 345, 12345}

- Quand on ajoute une arête, on ne crée pas de boucles, quelque soit l'arête ajoutée
  $\rightsquigarrow$ les plats sont obtenus en prenant des boucles complètes et des boucles sur lesquelles il manque au moins deux arêtes

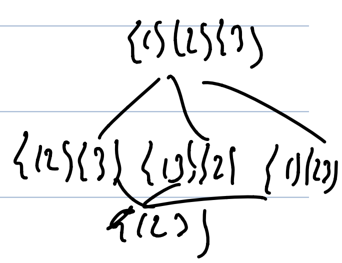
Exple : Plats de $K_n$ :

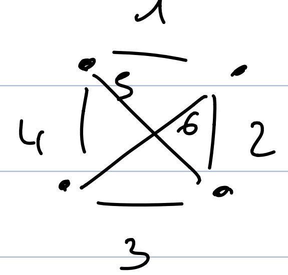
$K_1 = \bullet \quad \{\emptyset\} = \mathcal{F}$

$K_2 =$  $\{\emptyset, 1\} = \mathcal{F}$

$K_3 =$ 


$\mathcal{F} = \{\emptyset, 1, 2, 3, 123\} \sim$



$K_4 =$ 


$\mathcal{F} = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 13, 24, 56, 125, 236, 345, 146, 123456\}$

$rg(M) = 3$

Bijection partition $\pi \leftrightarrow$ plat $P$

Parts de $\pi$ = composantes connexes de $K_n|_P$

La partition des sommets suffit à caractériser le plat parce que le plat doit avoir toutes les arêtes d'une comp. connexe (sinon, celle qui manque fait une boucle une fois ajoutée)

# Déf. alternative d'un matroïde

Déf (matroïde en termes de plats) :

$M = (E, \mathcal{F})$

tq
- $E \in \mathcal{F}$
- $F, F' \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap F' \in \mathcal{F}$
- (axiome de couverture) si $F \in \mathcal{F}$ et $x \in E \setminus F$,

  $\exists!\, F' \in \mathcal{F}$ tq $F \subset F'$ et $x \in F'$

  minimal pour l'inclusion

$\Updownarrow$

(Baker)

$(F_3)$ si $F$ plat, $\{F_1, .., F_k\}$ l'ensemble des plats qui couvrent $F$,

alors $\{F_1 \setminus F, \dots, F_k \setminus F\}$ partition de $E \setminus F$

# Pourquoi l'axiome de couverture et F3 sont-ils $\Leftrightarrow$ ?

Axiome de couverture $\Rightarrow F_3$ :

Si $F$ est un plat et $F \subset F_i$, $F_i$ plats, $\nexists F'$ tq $F \subsetneq F' \subsetneq F_i$

$\boxed{\text{Mq } (F_1 \setminus F, \dots, F_k \setminus F) \text{ est une partition de } E \setminus F}$

- Étape 1 : Mq si $x \in E \setminus F$, $\exists i$ tq $x \in F_i$

C'est l'axiome de couverture

- Étape 2 : Mq $F_i \cap F_j = F$

Par l'absurde, si ce n'était pas le cas,

$\exists F'$ tq $F_i \cap F_j = F'$ et $\left.\begin{matrix} F \subset F_i \\ F \subset F_j \end{matrix}\right\} \Rightarrow F \subset F'$

$F'$ est plat car les plats sont stables par intersection $\lightning$ avec $F_i$ et $F_j$ couvre $F$

$\Leftarrow$ Si $F \in \mathcal{F}$ et $x \in E \setminus F$, $\exists F_i$ tq $x \in F_i \setminus F$

qui couvre $F$

# Polynôme chromatique d'un graphe

Pour $G$ graphe (fini)

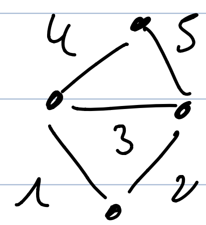
q-coloriage propre $f : V(G) \to \{1, \dots, q\}$ avec $f(v) \neq f(v')$ si $v \sim v'$
incident

$\chi_G(q) = \#$ q-coloriage propre de $G$

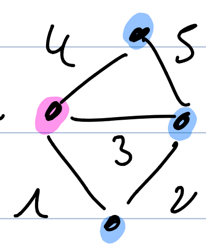
[Whitney 1932] : c'est un polynôme en $q$ ! de degré $|V(G)|$

Rque : $\chi_G(1) = 0$ si $G$ a au moins une arête

Exemple :



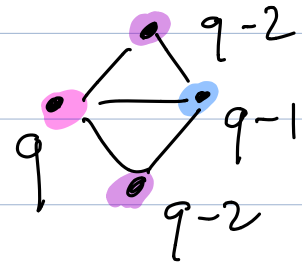
$\to$



$\to$ 1 couleur $\qquad \chi_G(1) = 0$

$\not\to$ 2 couleurs $\qquad \chi_G(2) = 0$

$\to$

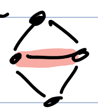
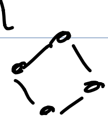


$\rightsquigarrow \quad q(q-1)(q-2)^2 = \chi_G(q)$

$$\chi_G(q) = q^4 - 3q^3 + 6q^2 - 4q$$

# Algorithme de calcul

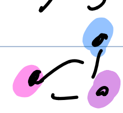
$$\boxed{\chi_G(q) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{suppression}}}{\chi_{G\setminus e}}(q) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{contraction}}}{\chi_{G/e}}(q)}$$

$\chi$  $(q) = \chi$  $(q) - \chi$  $(q) = q(q-1)(q^2-3q+3) - q(q-1)^2 = q(q-1)(q-2)^2$

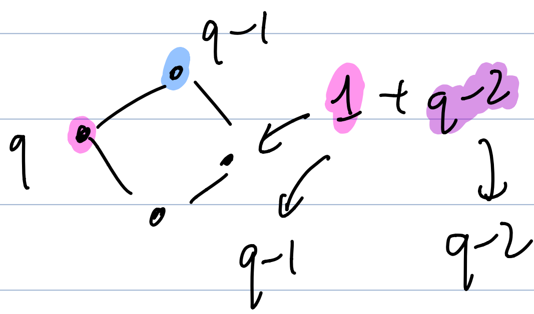
$$\chi_{E_n}(q) = q(q-1)^{n-1}$$

$$\chi_{C_{2n}}(q) = \chi_{E_{2n}}(q) - \chi_{C_{2n-1}}(q)$$

$\chi_{C_1}(q) = q \qquad \chi_{C_2}(q) = q(q-1) \qquad \chi_{C_3}(q) = q(q-1)(q-2)$



$$\chi_{C_4}(q) = q(q-1)^3 - q(q-1)(q-2) = q(q-1)\Big(\underbrace{q^2-2q+1-q+2}_{(q^2-3q+3)}\Big)$$




$$\chi_{C_4}(q) = q(q-1)\Big(\underbrace{q-1+(q-2)^2}_{q^2-3q+3}\Big)$$

RAPPELS

$M = (E, \mathcal{I})$ $\quad e \in E$

- $M \setminus e := (E - \{e\}, \mathcal{I}')$ $\quad \mathcal{I}' = \{ I \subseteq E - \{e\},\ I \in \mathcal{I} \}$

- $M / e := (E - \{e\}, \mathcal{I}'')$ $\quad \mathcal{I}'' = \{ I \subseteq E - \{e\},\ I \cup \{e\} \in \mathcal{I} \}$

+ compatibilité

Def : $M / X \setminus Y$ pour $X \cap Y = \emptyset$, $X, Y \subseteq E$

$\| $

$(E - (X \cup Y), \mathcal{J})$ où $\mathcal{J} = \{ I \subseteq E - (X \cup Y) \mid I \cup X \in \mathcal{I} \}$

mineur

Question : Analogue dans le cas des matroïdes ?

Oui !

Polynôme caractéristique d'un matroïde

Def [Rota] : $\chi_M(q) = \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} q^{\mathrm{corank}(A)} = \underbrace{\chi_{M \setminus e} - \chi_{M/e}}_{\text{si } e \text{ ni boucle, ni coboucle}}$

où $\mathrm{corank}(A) = rg(M) - rg(A)$

Mettons les pieds dans le plat !

$$\chi_M(q) = \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} q^{\mathrm{corank}(A)} = \chi_{M \setminus e} - \chi_{M/e}$$

n sommets
a arêtes

$2^n$ éléments

n éléments

graphe à
n sommets et (a-1)
arêtes

graphe à
(n-1) sommets
et $\leq a$ arêtes

complexité aussi exponentielle

$$\Leftrightarrow \chi_\Gamma(q) = \sum_{F \in \mathcal{L}} \mu(F)\, q^{\operatorname{corank}(F)}$$

$\operatorname{rg}(M) - \operatorname{rg}(F)$

où $\mu(F)$ = fct° de Möbius du poset des plats

?

?

Question : Combien y a-t-il de plats ???

moralement, moins que d'éléments !

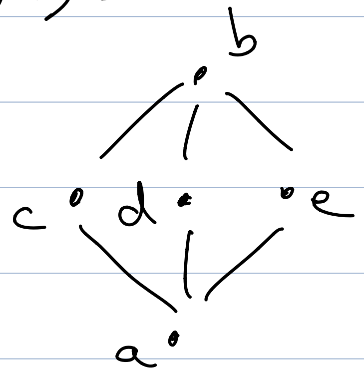
Déf poset = ens + ordre partiel

# Fonction de Möbius d'un poset

$$\mu(a,b) = -\sum_{a \le x < b} \mu(a,x)$$

$$\mu(a,a) = 1$$

Exemple :

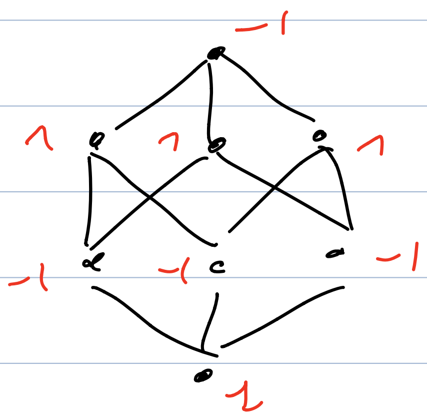



$$\mu(a,b) = -\big(\mu(a,c)+\mu(a,d)+\mu(a,e)\big)$$

or $\mu(a,c) = \mu(a,d) = \mu(a,e) = -\mu(a,a)$
$= -1$

d'où $\mu(a,b) = 3$

Autre exple :




Rque : Lien avec la topologie du poset,

$$\mu(P) = \chi(\hat{P})$$

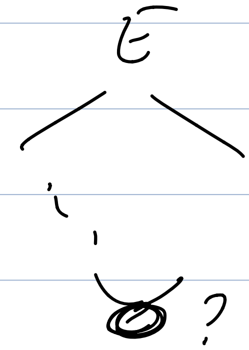
sans max ni min si P intervalle

caractéristique d'Euler

# Treillis des plats = $\mathcal{L}(M)$

↳ existence meet $x \wedge y$ ~ PGCD borne inf.

join $x \vee y$ ~ PPCM borne sup.



**Ordre : inclusion**

Expl : $U_{n+1,n+1} = \{ I \subset \{1,\dots,n\} \mid |I| \leq n \} = \mathcal{P}(n+1)$ treillis booléen

Expl : plats de $K_n$ $\Rightarrow \Pi_n$ treillis des partitions

Déf : • $L$ semimodulaire si $\forall x, y \in L$ couvrant $x \wedge y$, $x \vee y$ couvre à la fois $x$ et $y$

• $L$ atomique si $\forall x, \exists x_1, \dots, x_k$ atomes tq $x = x_1 \vee \dots \vee x_k$

• $L$ géométrique si $L$ semimodulaire et atomique

[Birkhoff] : Tt treillis géométrique est de la forme $\mathcal{L}(M)$, pour $M$ matroïde

(et tout $\mathcal{L}(M)$ est un treillis géométrique)

Preuve : Stanley p 36 $M = (A, \mathcal{J})$ → $\mathcal{J} = \{ I \subseteq A : rk(\vee I) = \# I \}$

atomes du treillis

Rque : Si $M$ est simple, $\mathcal{L}(M)$ détermine $M$

→ pas de $x$ tq $rg(\{x\}) = 0$

→ pas de $x, y$ tq $rg(\{x\}) = rg(\{y\}) = 1$, $rg(\{x,y\}) = 1$

# Polynôme caractéristique d'un matroïde

**def [Rota]** : $\chi_M(q) = \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} q^{\operatorname{corank}(A)} = T_{M\setminus e} - T_{M/e}$ si $e \neq$ isthme

$\Leftrightarrow \chi_M(q) = \sum_{F \in \mathcal{L}} \mu(F) q^{\operatorname{corank}(F)}$ ; corank(F) " $rg(M) - rg(F)$

où $\mu(F) =$ fct° de Möbius du poset des plats

**Thm** : les trois définit° sont $\Leftrightarrow$

Preuve : [Combinatorial Geometries de White
Chap. Zaslavski "The Möbius fct° and the charact. polyn."]

$\mu_M(x, F) = \mu_{\mathcal{L}(M)}(x, F)$ def

Formule d'extension booléenne : $\mu(W, F) = \sum_{\substack{W \subseteq X \subseteq F \\ \mathrm{cl}\, X = F}} (-1)^{|X - W|}$
(Prop. 7.1.4)

voir ex 7.9

Preuve : avec algèbre d'incidence

$\mu(M) = \mu(M-e) - \mu(M/e)$ si $e$ n'est pas un isthme

avec prop. 7.1.4 $\mu(M) = \sum_{\substack{X \subseteq E \\ cl(X) = E}} (-1)^{|X|}$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{X \subseteq E \setminus e \\ cl(X) = E}} (-1)^{|X|}}_{= \mu(M-e)} - \underbrace{\sum_{\substack{e \in X \subseteq E \\ cl(X) = e}} (-1)^{|X-e|}}_{= \mu(M/e)}$$

$\chi_M = \sum_{A \in E} (-1)^{|A|} q^{\mathrm{cog}(A)}$ avec prop 7.1.4 pour $W = \emptyset$

$+ \sum_{F \in \mathcal{F}}$

**Prop 1**

- $\chi_M(1) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(\hat{0}, F) = 0$ dès que $|\mathcal{F}| > 1$

- $\chi_M(0) = \sum_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ rg(F) = rg(M)}} \mu(F)$

$$\boxed{\chi_M(q) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{suppression}}}{\chi_{M \setminus e}}(q) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{contraction}}}{\chi_{M/e}}(q)}$$

qd $e$ ni boucle ni isthme

$\{e\} \notin \mathcal{J}$

ds la base

- $M \setminus e := (E - \{e\}, \mathcal{J}')$ $\quad \mathcal{J}' = \{ I \subseteq E - \{e\},\ I \in \mathcal{J} \}$

- $M/e := (E - \{e\}, \mathcal{J}'')$ $\quad \mathcal{J}'' = \{ I \subseteq E - \{e\},\ I \cup \{e\} \in \mathcal{J}$

Lien avec graphes

$$\boxed{\chi_G(q) = \chi_{M_G}(q) \times q^c}$$ ← c = nbre de comp. connexes de G

Preuve : $I(\gamma)$ = set of edges improperly colored

↗ des des matroïde de graphes M

$\nu(F)$ = nbre de $\gamma$ tq $I(\gamma) = F$

car improper ssi F donc cst $c(F')$

$\sum_{F \in L} \nu(F) = d^n$ ⟹ $\sum_{F \geq F'} \nu(F) = q^{c(F')}$

+ inversion de Möbius ⟹ $\sum \mu(F', F) q^{c(F)} = \nu(F')$

$\sum_{a \leq b} f(b) = g(a) \Rightarrow f(a) = \sum_{c \leq b} \mu(a,b) g(b)$ $F \geq F'$

$F' = 0$ donc $q^x \chi_{M_G}$ ⟶ $\chi_G(q)$

Critical thm [Crapo-Rota 1970, Thm 16.1] : Soit $E \subseteq K^n$, $m = \dim E$, $d \geq 0$. Le nbre de $f : K^n \to K^d$ tq $\forall p \in E$ $f(p) \neq (0, \ldots, 0)$

est $(q^d)^{n-m} p(M(E); q^d)$

# Arrangements d'hyperplans et treillis d'intersection

**Déf.** Arrangement d'hyperplans (fini)

$=$ ens. fini d'hyperplans affines ds $\mathbb{K}^n = V$

$\hookrightarrow \{v \in \mathbb{K}^n \mid \alpha v = a\}$, $\alpha$ fixé, non nul, $a \in \mathbb{K}$

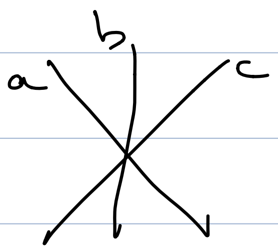
Ici, $\mathcal{A}$ central $\left(\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset\right)$

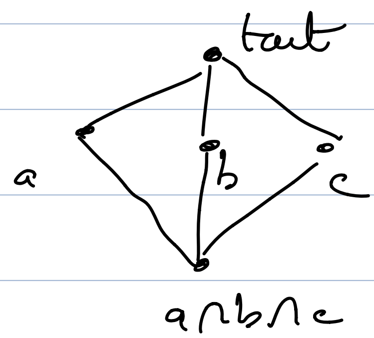
(seul cas où $L(\mathcal{A})$ treillis)

**Treillis d'intersection :** $L(\mathcal{A}) = \{$intersect° non vide d'hyperplans de $\mathcal{A}\}$ $\ni V$

avec $x \leq y$ si $x \supseteq y$

**Expl :**




Gradué par $rk(x) = n - \dim(x)$

**Rqe :** $\mathcal{A} \to M_{\mathcal{A}}$ avec $B \in \mathcal{I}(M)$ si $B$ linéairement indépendant

$M_{\mathcal{A}} = (E, \mathcal{I})$

$E$ : normales aux hyperplans

# Polynôme caractéristique

**Déf :** $$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu(x)\, t^{\dim(x)}$$
$$= t^n - (\#\mathcal{A})\, t^{n-1} + \dots$$

**Thm** [Whitney, cité de [Stanley, Thm 2.4]]

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \neq \emptyset}} (-1)^{\#\mathcal{B}}\, t^{n - \mathrm{rg}(\mathcal{B})}$$

**Thm** [Zaslavsky, 75, cité de [Stanley, 2.5]]

Nbre de régions

$$r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1)$$

dans notre cas

**Preuve :** • Par récurrence avec $H_0 \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A} - \{H_0\}$
$\mathcal{A}'' = \mathcal{A}^{H_0}$
$\{H \mid H \subseteq H_0\}$

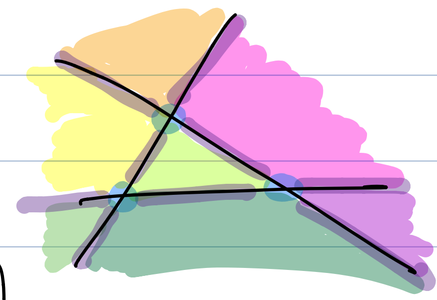
avec lemme : $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}') + \underbrace{r(\mathcal{A}'')}_{\text{régions traversées par } H_0}$

$$\boxed{\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t)}$$

→ Preuve alternative topologique intéressante avec caractéristique d'Euler

$$\chi(\mathbb{R}^n) = (-1)^n$$

couvert par les régions



donc $$\chi(x) = \sum_{\substack{y \in L(\mathcal{A}) \\ y \geq x}} (-1)^{\dim(y)} r(\mathcal{A}^y)$$

+ $\boxed{\text{formule d'inversion de Möbius}}$ (Rota)

Si $\forall b \in P$, $g(b) = \sum_{a \leq b} f(a)$

$$f(b) = \sum_{a \leq b} g(a) \mu_A(a, b)$$

$$r(\mathcal{A}^x) = \sum_{x \leq y} \underbrace{\chi(y)}_{(-1)^{\dim(y)}} \mu_A(x, y)$$

pour $x = \mathbb{R}^n = \hat{0}$

$$(-1)^n r(\mathcal{A}) = \sum_{y \in L(\mathcal{A})} (-1)^{\dim(y)} \mu_A(y) = \chi_A(-1)$$

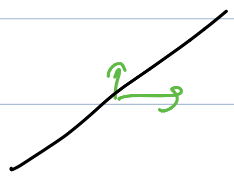
# Arrangements graphiques

$G$ graphe simple sur $\{1, \dots, n\}$ ← sans double arête, ni boucle

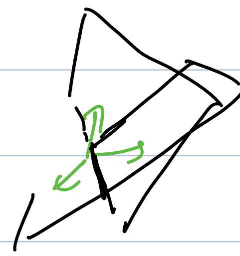
**Déf :** arrangement graphique $x_i - x_j = 0 \quad \forall ij \in E(G)$ de $\mathbb{K}^n$

Si $G = K_n$ graphe complet, on retrouve l'arrangement de tresse

**Expl :** $n=2$



$n=3$



**thm** [Stanley 9.7] : $\boxed{\chi_{\mathcal{A}_G}(t) = \chi_G(t)}$

Preuve : avec $\mathcal{A} - \{H_0\} = \mathcal{A}_{G-e}$ et $\mathcal{A}^{H_0} = \mathcal{A}_{G/e}$

ou avec treillis des $\begin{cases} \text{contract}^{\circ} \\ \text{clos} \end{cases}$ d'un graphe

→ l'ajout d'une arête ne crée pas de circuits

[Stanley (26)] : $\boxed{\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^{n-1}\chi_{\mathcal{M}}(t)}$

arrangem^t n dimensionnel de rang $n$

[Stanley (Cor 3.5)] Soit $M$ un matroïde de rg $n$. Alors le polynôme caractéristique $\chi_M(t) = a_n t^n + \dots + a_0$

avec $(-1)^{n-i} a_i > 0 \quad \forall i$

↳ voir séance 4

Preuve : C'est une application du thm de Weisner :

**Theorem 3.9.** *Let $L$ be a finite lattice with at least two elements and with Möbius function $\mu$. Let $\hat{0} \neq a \in L$. Then*

$$\boxed{\sum_{x\,:\,x\vee a=\hat{1}} \mu(x) = 0.} \tag{25}$$

+ récurrence par les treillis géométriques, sachant que dans ce cas, $x \vee a = \hat{1} \iff x = \hat{1}$ ou $x$ coatome

$x \lessdot 1$ et $a \not\leq x$

# Tableau final

Matroïde graphique

Matroïde M
Treillis des flats

Graphe
Treillis des contractions

matroïde des normales aux hyperplans

arrangement graphique

Arrangements d'hyperplans
Treillis d'intersection

Matroïdes

Matroïdes représentables

Matroïdes graphiques

(en vrai, plutôt

Remarques finales. (Hors sujet)

Étude des treillis des plats à l'origine de la théorie de EL-décortiquabilité (Björner)

+ Étude de l'homologie a motivé CM des 80's
[Baclawski, Björner - Garsia - Stanley]

Base cohomologie donnée par les nBC

cf. ref Stanley

+ Björner 1990
"Homology and shellability of matroids and geometric lattices"

Interprétation topologique de $\chi_{\Omega}(-1)$ ? $\chi_\Omega(-1) = g(\hat{0})$

Inv. Möbius

$f(x) = \sum_{y \geq x} g(y), \forall x \in P$

$g(x) = \sum_{y \geq x} \mu(x,y) f(y), \forall x \in P$

avec $g(x) = \sum_{x \leq y} \mu(\hat{0},y) \underbrace{(-1)^{\rho(\Omega)-\rho(y)}}_{= f(y)}$

d'où $f(x) = \sum_{y \geq x} g(y) = (-1)^{\rho(\Omega)-\rho(x)}$

A-t-on $\chi_\Omega(-1) = \mu(\hat{0},\hat{1}) \times (-1)^{d}$ ? Non

Si $\Omega = M_{K_n}$, $\chi_\Omega(q) = \sum_{P \in \Pi_n} \mu(P)\,(-1)^{\text{nb parts}(P)-1}$

$\chi_{\Pi_n}(t) = (t-1)(t-2)\ldots(t-n+1)$

$\mu(\Pi_n) = \mathrm{Le}(n) = \chi_{\Pi_n}(0)$

$\chi_\Omega(-1) = (-1)^{n-r}$ $\quad \chi_A(-1) = (-1)^{r} r(A)$

---

Reprenons preuve $r(A)$ $\quad \chi(x) := \sum_{x \leq y} f(y)\, \mu_A(x,y)$ avec $f(y) = (-1)^{\rho(\Omega)-\rho(y)}$

$\chi_\Omega(-1) = \chi(\hat{1})$

$\sum_{x \leq y} g(y) = (-1)^{\rho(\Omega)-\rho(x)}$