# Anneau de Chow des variétés toriques (2)

- $X$ variété algébrique complexe, irréductible, de dimension $n$
- $\mathbb{C}(X)$ corps des fonctions rationnelles sur $X$

Définition.

$$CH^k(X) = Z^k(X) \Big/ \sum_{Y \in Z^{k-1}(X)} \operatorname{div}_Y\left(\mathbb{C}(Y)^*\right)$$

$k$-ième groupe de Chow

$$CH(X) = \bigoplus_{k=0}^{n} CH^k(X) \ni [Y], \quad Y \in Z^k(X)$$

Remarque. $\deg : Z^n(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$

$$\sum_{P \in X} \lambda_P P \longmapsto \sum_{P \in X} \lambda_P$$

Si $X$ est projective, $\deg$ se factorise à travers $CH^n(X)$ : $\mathbb{Z}\cdot[P] \hookrightarrow CH^n(X)$

## I) Structure d'anneau.

X lisse

* Soient $Z \in Z^r(X)$, $Z' \in Z^s(X)$. On dit que $Z$ et $Z'$ s'intersectent proprement si toutes les composantes irréductibles de $Z \cap Z'$ sont de codimension $r+s$.
(on étend par linéarité aux cycles).

* Si $Z$ et $Z'$ s'intersectent proprement, et si $Y$ est une composante irréductible de $Z \cap Z'$, on pose

$$i_Y(Z, Z') = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \operatorname{longueur}\left(\operatorname{Tor}_k^A\left(A/\mathfrak{p}_Z, A/\mathfrak{p}_{Z'}\right)\right) \geq 0$$

(Serre)

où, si $X$ est affine, $A = \mathbb{C}[X]_{\mathfrak{p}_Y}$. ($\mathfrak{p}_Y$ : idéal de définition de $Y$.)

$i_Y(Z, Z')$ : multiplicité d'intersection locale.

Lemme de déplacement de Chow.

Si $Z \in Z^r(X)$, $Z' \in Z^s(X)$, alors il existe un cycle $Z_0 \in Z^r(X)$, rationnellement équivalent à $Z$ et intersectant proprement $Z'$.

**Théorème** (Weil, Chevalley, Samuel, Serre)

Si $X$ est lisse, la formule

$$[Z]\cdot[Z'] = \sum_{\substack{Y \subset Z\cap Z' \\ Y \in \mathcal{Z}^{n+m}(X)}} i_Y(Z,Z')\,[Y]$$

(pour $(Z, Z') \in \mathcal{Z}^n(X) \times \mathcal{Z}^m(X)$ s'intersectant proprement) définit un produit sur $CH(X)$ munissant $CH(X)$ d'une structure d'anneau gradué (élément neutre $= [X]$).

**Fonctorialité.** $\pi : Y \longrightarrow X$

- $\pi_* : Z(Y) \longrightarrow Z(X)$

$$[Z] \longmapsto \begin{cases} [\overline{\pi(Z)}] & \text{si } \dim \pi(Z) = \dim(Z) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\left( Z^k(Y) \to Z^{k+r}(X),\ \text{où } r = \dim X - \dim Y \quad \pi_* = 0 \text{ si } r<0 \right)$

les $\pi_* : CH(Y) \longrightarrow CH(X)$ morphisme de groupes.

- $\pi^* : CH(X) \longrightarrow CH(Y)$ $\qquad \underset{\cup}{Y\times X}$

$$[Z] \longmapsto (p_1)_*[\Gamma_\pi]\cdot[Y\times Z]$$

**Proposition.** (a) $\pi^*$ est un morphisme d'anneaux gradués

(b) $\pi_*(y\cdot\pi^*(x)) = \pi_*(y)\,x$

(c) $\mathrm{Im}(\pi_*)$ est un idéal de $CH(X)$.

(d) $[Z]\cdot[Z'] = \Delta^*([Z\times Z'])$, $\Delta : X \hookrightarrow X\times X$

(e) Si $U \subset X$ est ouvert, $Y = X\setminus U \xhookrightarrow{\pi = i} X$, $j : U \hookrightarrow X$, on a une suite exacte

$$CH(Y) \xrightarrow{i_*} CH(X) \xrightarrow{j^*} CH(U) \longrightarrow 0$$

**Exemples.** (1) Si $X$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, alors $CH(X) = \mathbb{Z}\cdot[X]$.

(2) Soit $h = [\mathbb{P}^{n-1}] \in CH^1(\mathbb{P}^n)$. Alors

$$CH(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[h]/\langle h^{n+1}\rangle$$

$$h^i = [\mathbb{P}^{n-i}]$$

**Preuve.** Par récurrence : $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}$

$$\begin{array}{ccccccc} CH(\mathbb{P}^{n-1}) & \to & CH(\mathbb{P}^n) & \to & CH(\mathbb{C}^n) & \to & 0 \\ \wr\| & & & & \downarrow\wr & & \\ \mathbb{Z}[h']/\langle h'^n\rangle & & h'^i \mapsto h^{i+1} & & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

Pas de noyau : $CH^n(\mathbb{P}^n) \supset \mathbb{Z}$. ∎

# V Variétés toriques

$X$ projective lisse.

- $X = X_\Sigma$, éventail $\Sigma$

$$\left\{\begin{matrix}T\text{-orbites}\\ \text{dans } X\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{\sim} \Sigma$$

$$O_\sigma \longleftarrow \sigma$$

$O_\sigma$ ↑ orbite fermée de $X_\sigma$

## Groupe de Chow ?

$\overline{O_\sigma}$ est une variété torique...

par le tore $T_\sigma = \mathbb{C}^\times \otimes_\mathbb{Z} \underbrace{N/(\mathbb{R}\sigma \cap N)}_{N_\sigma}$

$$M_\sigma = \mathrm{Hom}(T_\sigma, \mathbb{C}^\times) \simeq \sigma^\perp \cap M$$

Éventail de $\overline{O_\sigma}$ : $\Sigma_\sigma \leftrightarrow \{\tau \in \Sigma \mid \sigma \leqslant \tau\}$

image de $\tau$ dans $N_\sigma$ $\longleftarrow$ $\tau$

On a un complexe

$$\bigoplus_{\sigma \in \Sigma(k-1)} (\sigma^\perp \cap M) \to \bigoplus_{\tau \in \Sigma(k)} \mathbb{Z} \cdot [\overline{O_\tau}]$$

$$u \in \sigma^\perp \cap M \longmapsto \sum_{\substack{\sigma \leqslant \tau \\ \tau \in \Sigma(k)}} \langle u, v_{\sigma,\tau}\rangle [\overline{O_\tau}]$$

$$\bigoplus_{\tau \in \Sigma(k)} \mathbb{Z} \cdot [\overline{O_\tau}] \to CH^k(X_\Sigma) \to 0$$

**Théorème.** Ce complexe est exact.

## Structure multiplicative ?

Soient $\sigma \in \Sigma(1)$ et $\tau \in \Sigma(k)$ ; $\sigma \nleq \tau$

$$[\overline{O_\sigma}] \cdot [\overline{O_\tau}] = \begin{cases} \overline{O_{\sigma+\tau}} & \text{si } \sigma+\tau \in \Sigma(k+1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Conséquence.** $([\overline{O_\sigma}])_{\sigma \in \Sigma(1)}$ engendrent l'anneau $CH(X_\Sigma)$.

## Relations.

(1) Relations linéaires vues la semaine dernière

(2) $\forall\, \sigma_1, \dots, \sigma_d \in \Sigma(1)$ deux à deux distincts et tels que $\sigma_1 + \dots + \sigma_d \notin \Sigma$, alors

$$[\overline{O}_{\sigma_1}] \cdots [\overline{O}_{\sigma_d}] = 0$$

**Théorème.** C'est une présentation de $CH(X_\Sigma)$.

**Cohomologie.**

$$\begin{tikzcd} Z^k(X) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^{2k}(X) \\ & CH^k(X) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$CH(X) \xrightarrow{cyc_X} H^{2\bullet}(X)$$

morphisme d'anneaux.

**Théorème.** $cyc_{X_\Sigma}$ est un isomorphisme.

$\left( H^{2k+1}(X_\Sigma) = 0 \right)$.

$$CH(X_\Sigma) = \mathbb{Z}[D_0, D_1, D_2, D_3] \Big/ \left( \begin{array}{l} D_1 - D_0 = 0 \\ D_2 - D_3 - 2D_0 = 0 \\ \\ D_0 D_1 = 0 \\ D_2 D_3 = 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \quad P_i - P_j = 0$$

$$CH(X_P) = \mathbb{Z}\cdot[X_\Sigma] \oplus \left( \mathbb{Z}D_0 \oplus \mathbb{Z}D_3 \right) \oplus \mathbb{Z}P$$

$$D_0 \cdot D_3 = P$$

$$D_0 \cdot D_1 = 0 \Rightarrow D_0^2 = 0$$

$$D_2 D_3 = 0 \Rightarrow (D_3 + 2D_0)\cdot D_3 = 0$$

$$\Rightarrow D_3^2 = -2P.$$

$$D_k = \left[ \overline{\mathcal{O}}_{\mathbb{R}_{\geq 0}\varepsilon_k^\vee} \right] \in CH^1(\mathcal{H}_2)$$

$$\widetilde{\mathbb{P}(1,1,2)} = \mathcal{H}_2$$