Exposé 1 : Ricardo Campos — 22/09/2020

Matroïdes

Plan :

1) Définitions
2) Intuition, exemples
3) Opérations matroïdales

Idée : Coder la combinatoire sous-jacente aux ensembles de vecteurs par rapport à l'indépendance linéaire

Déf (Axiomes d'indépendance)

Un matroïde est une paire $(E, \mathcal{I})$ où

* E est un ensemble fini
* $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(E)$ (les indépendants)

satisfaisant : (I_1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I_2) Si $A \subset B$, $B \in \mathcal{I}$ $\Rightarrow A \in \mathcal{I}$

(I_3) Si $I, J \in \mathcal{I}$, $|J| > |I|$ $\exists x \in J \setminus I$ tq $I \cup \{x\} \in \mathcal{I}$

Exemple : Matroïdes linéaires

V ev sur $\mathbb{K}$, $E \subset V$, $|E| < \infty$

$M := (E, \mathcal{I}) \leftarrow$ familles libres de E

Un matroïde isomorphe à un matroïde linéaire est dit *représentable* sur $\mathbb{K}$.

À iso près, un matroïde représentable est une matrice
$\rightsquigarrow$ ne dépend que de l'espace des lignes de la matrice

Conséquences immédiates : M est déterminé par les indépendants maximaux, que l'on appelle des bases ← elles sont toutes m̂ cardinalité (appelé rang du matroïde)

Exemple: Matroïdes uniformes

Soit $E=\{1,\dots,m\}$ et $r\in\mathbb{N}$

On définit le matroïde uniforme $\mathcal{U}_{r,m} := (E,\mathcal{I})$

où $\mathcal{I}=\{I\subset E \mid |I|\le r\}$

Prop: $\mathcal{U}_{2,4}$ n'est pas représentable sur $\mathbb{F}_2$

$\mathcal{U}_{2,4} \longrightarrow E=\{1,2,3,4\}$

$\mathcal{I}=\{I\subset E \mid |I|\le 2\}$

Preuve : Pas assez de place

Rque Thibault: $\mathcal{U}_{1,2}$ non plus

Rque: Sur $\mathbb{R}$, tous les matroïdes uniformes sont représentables

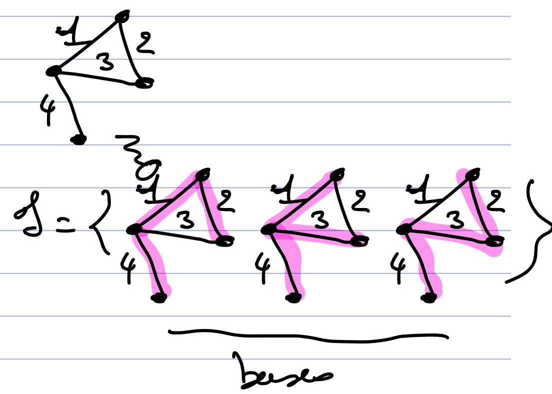
Question: Existe-t-il des matroïdes représentables sur aucun corps?

Exemple: Matroïdes graphiques

Graphe $G=(V,E) \rightsquigarrow M(G) := (E,\mathcal{I})$

où E = arêtes du graphe
$\mathcal{I}$ = forêts de E

Bases = {arbres couvrants de G}



Déf (Bases)

Un matroïde est une paire $(E,\mathcal{B})$ où

* E est un ensemble fini
* $\mathcal{B}\subset\mathcal{P}(E)$ (bases)

satisfaisant:
* $\forall A,B\in\mathcal{B}$, $|A|=|B|$
* Si $A,B\in\mathcal{B}$, $A\neq B$, $\exists\, x\in B\setminus A$, $y\in A$ tq $A-\{y\}\cup\{x\}\in\mathcal{B}$

(axiome d'échange)

Déf : Un **circuit** $\mathcal{C}$ d'un matroïde M est un (s-ens. dépendant minimal

- (C_1) $\quad \emptyset$ n'est pas un circuit
- (C_2) $\quad C_1 \subset C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$ $\quad$ ($C_1 \in \mathcal{C}$, $C_2 \in \mathcal{C}$)
- (C_3) $\quad$ Si $e \in C_1 \cap C_2$ alors $(C_1 \cup C_2) - e$ contient un circuit

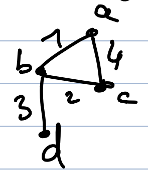
⚠ $M(G) \simeq M(G') \not\Rightarrow G = G'$

Exple : 

Autre exples : arbres avec m̂ nbre d'arêtes

mais suffit pour les propriétés étudiées

Prop : Tout matroïde graphique est représentable sur tt corps.

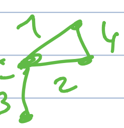
Dém : $G =$  $\rightsquigarrow A_G =$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline a & \\ b & \\ c & \\ d & \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrice d'incidence

Sur $\mathbb{F}_2$, $\quad M(G) = M(A_G)$

Sur $\mathbb{K}$, idem en mettant -1 sur le deuxième 1

Déf (plats / fermés) $\qquad$ exple : $G =$  $\quad E = \{1,2,3,4\}$

$M = (E, \mathcal{I}) \qquad A \subset E$

- $cl(A) = \{x \in E \mid rg_M(A) = rg_M(A \cup \{x\})\}$

clôture

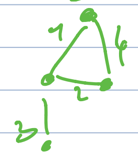
- A est **plat** ssi $A = cl(A)$

↳ caractérisation sur les graphes ?

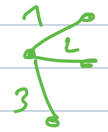
Rque : Déf. alternative des matroïdes avec les plats

Opérations sur les matroïdes

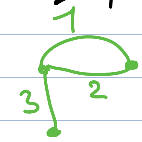
Si G graphe, on peut supprimer et contracter des arêtes



$G\setminus 4$



$G/4$



$M=(E,\mathcal{I})$ $\quad e\in E$

- $M\setminus e := (E-\{e\}, \mathcal{I}')$ $\quad \mathcal{I}'=\{I\subseteq E-\{e\},\ I\in\mathcal{I}\}$
- $M/e := (E-\{e\}, \mathcal{I}'')$ $\quad \mathcal{I}''=\{I\subseteq E-\{e\},\ I\cup\{e\}\in\mathcal{I}\}$

exo: les opérations sont "compatibles"

$$(M\setminus e)\setminus f=(M\setminus f)\setminus e$$

$$(M/e)/f=(M/f)/e \qquad \text{si } e\neq f$$

$$(M/e)\setminus f=(M\setminus f)/e$$

Def: $M/X\setminus Y$ pour $X\cap Y=\emptyset$, $X,Y\subseteq E$

$= (E-(X\cup Y), \mathcal{J})$ où $\mathcal{J}=\{I\subseteq E-(X\cup Y) \mid I\cup X\in\mathcal{I}\}$

mineur

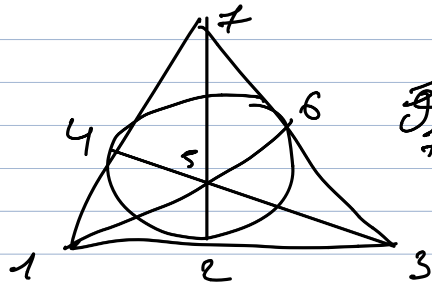
Def: $M=(E,\mathcal{I})$ Soit $\mathcal{I}^*$ la collection des $A\subseteq E$ tq $E-A$ contient une base de M alors $M^*=(E,\mathcal{I}^*)$ est le matroïde dual de M

Prop $(M_G)^*=M_{G^*}$ graphe dual

Prop $(M\setminus X)^*=M^*/X$ $\quad X\subseteq E$

Exemple de matroïde représentable sur aucun corps

- Fano $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$



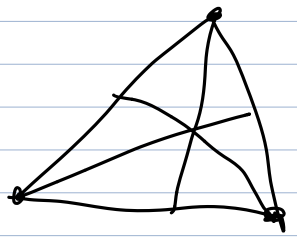
$\mathcal{F}_7$

$E = \{1, \dots, 7\}$

$\mathcal{I}$ = pts non alignés

$|I| \leq 3$

Rep ssi car 2

- 

$\mathcal{F}_7^-$ rep si car $\neq 2$

$\mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_7^-$ représentable nulle part

Déf : $\underset{(E_A, \mathcal{I}_A)}{A} \oplus \underset{(E_B, \mathcal{I}_B)}{B} = (E_A \cup E_B, \mathcal{I} = \{\underset{\mathcal{I}_A}{x} \cup \underset{\mathcal{I}_B}{y}\})$

FIN