Preuve de la log-concavité dans le cas représentable sur $\mathbb{C}$.

avant Adiprasito-Huh-Katz, cas représentable.

Rappels : M matroïde sans boucle ($\emptyset$ est plat)
de rang $r+1$
sur l'ensemble $E = \{0, 1, \dots, n\}$

Polynôme caractéristique réduit $\overline{\chi}_M(\lambda) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \mu^k(M) \lambda^{r-k}$

avec $\mu^k(M) > 0$ et plus précisément :

$$\mu^k(M) = \#\left\{ F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_k \;;\; \begin{array}{l} F_m \text{ plats stricts de } M \; (\neq \emptyset, E) \\ rg(F_m) = m \\ \min(F_1) > \min(F_2) > \dots > \min(F_k) > 0 \end{array} \right\}$$

But : La suite des $\mu^k(M)$ est log concave :

$$\mu^{k-1}(M)\mu^{k+1}(M) \leqslant \left(\mu^k(M)\right)^2 \qquad \text{pour } 0 < k < r.$$

Auj : M est représentable sur $\mathbb{C}$
$\rightsquigarrow$ arrangement d'hyperplans $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}^r$
$\rightsquigarrow$ compactification du complémentaire $\mathbb{P}^r - \mathcal{A}$
notée Y_M variété projective lisse.
$\rightsquigarrow$ cohomologie de Y_M décrite de manière combinatoire

Plan : ① Interprétation de $\mu^k(M)$ dans $H^\bullet(Y_M)$
② La log concavité découle d'outils issus de la théorie de Hodge.
$\leftrightarrows$ inégalités de Khovanskii-Teissier
③ Idée de récurrence utilisée par [AHK] pour le cas non représentable.

① Rappels sur la cohomologie de Y_M

$\mathcal{P} = \{\text{plats stricts de } M\} \subset \{\text{plats}\}$ treillis géométrique

$\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{$intersections non vides d'hyperplans de $\mathcal{A}\}$

$\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{$composantes irréductibles du $\underbrace{\text{bord de } Y_M}_{Y_M \setminus (\mathbb{P}^r \setminus \mathcal{A})}\}$

$$H^{2\bullet}(Y_M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[x_F \,;\, F \in \mathcal{P}] \Big/ \begin{array}{ll} (i)\ x_F x_G = 0 & \text{si } F \text{ et } G \text{ incomparables} \\ (ii)\ \sum_{F_1 \subset G} x_G = \sum_{F_2 \subset H} x_H & \text{si } F_1 \text{ et } F_2 \text{ atomes} \end{array}$$

classe du diviseur D_F correspondant $\longleftarrow\!\shortmid\ x_F$

$$\Big(x_1 + \sum_{F_1 \subset G} x_G = 0 \Big) \qquad (F_1 = cl(\{i\}) \text{ atome})$$

Soit $i \in E$, on note $\underset{H^2(Y_M)}{\underset{\cap}{\alpha}}$ l'élément $\displaystyle\sum_{i \in F} x_F$

indépendant du choix de $i \in E$.

et $\beta = \displaystyle\sum_{i \notin F} x_F$

aussi indépendant du choix de i $\qquad \Big(\beta = \displaystyle\sum_{F \in \mathcal{P}} x_F - \alpha\Big)$

<u>Proposition</u> : $\beta^k \alpha^{r-k} = \mu^k(M)\,\alpha^r \in H^{2r}(Y_M)$.

Définition : $\mathcal{D}_k = \{ \mathcal{F} = (F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k) \,,\, F_m \in \mathcal{P} \}$

$\mathcal{I}_k = \{ \mathcal{F} \in \mathcal{D}_k \,;\, rg(F_m) = m \quad \forall m \}$ "drapeaux initiaux"

$\mathcal{O}_k = \{ \mathcal{F} \in \mathcal{D}_k \,;\, \min(F_1) > \dots > \min(F_k) > 0 \}$ "drapeaux descendants"

rappel : $\mu^k(M) = \#(\mathcal{I}_k \cap \mathcal{O}_k)$

Si $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_k$, $\quad x_{\mathcal{F}} = x_{F_1} \cdots x_{F_k}$ monôme.

Lemme 1: $\beta^k = \sum_{\mathcal{F} \in \mathcal{O}_k} x_{\mathcal{F}} \quad \in H^{2k}(Y_M)$

Preuve : Par récurrence sur k.

Pour $k=1$, utilisons $0 \in E$ dans la définition de β :

$$\beta = \sum_{0 \notin F} x_F = \sum_{\min F > 0} x_F .$$

Pour $k+1$, $\beta^{k+1} = \beta \beta^k = \sum_{\mathcal{F} \in \mathcal{O}_k} \beta x_{\mathcal{F}}$ par hypothèse de récurrence

Calculons $\beta x_{\mathcal{F}}$ $\qquad \mathcal{F} = \{F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k\}$ descendant

$i := \min F_1$

$$\beta = \sum_{i \notin F} x_F$$

$x_F x_{F_1} \cdots x_{F_k}$

$i \notin F$ $\;i \in F_1$, donc $F_1 \notin F$

donc F et F_1 comparables seulement si $F \subsetneq F_1$

de plus, dans ce cas $\min F > i = \min F_1$.

$$\beta x_{\mathcal{F}} = \sum_{i \notin F} x_F x_{\mathcal{F}}$$

$$= \sum_{\mathcal{G} = \{F \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k\} \in \mathcal{O}_{k+1}} x_{\mathcal{G}}$$

Donc $\beta^{k+1} = \sum_{\mathcal{G} \in \mathcal{O}_{k+1}} x_{\mathcal{G}}$. $\square$

Lemme 2: Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_k$, alors $x_{\mathcal{F}} \alpha^{r-k} = \begin{cases} \alpha^r & \text{si } \mathcal{F} \in \mathcal{J}_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Preuve de la proposition : $\beta^k \alpha^{r-k} = \sum_{\mathcal{F} \in \mathcal{O}_k} x_{\mathcal{F}} \alpha^{r-k} = \sum_{\mathcal{F} \in \mathcal{O}_k \cap \mathcal{J}_k} \alpha^r = \mu^k(M)\, \alpha^r$. $\square$

Preuve du Lemme 2 :

Observation : Si $i \notin F \in \mathcal{P}$, alors $x_F \alpha = \sum_{F \cup \{i\} \subset G \in \mathcal{P}} x_F x_G$

en effet $\alpha = \sum_{i \in G} x_G$ et si F ne contient pas i
et G contient i mais pas F
alors $x_F x_G = 0$

Montrons d'abord que si $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_k \setminus \mathcal{I}_k$, $x_{\mathcal{F}} \alpha^{r-k} = 0$
par récurrence descendante sur k.

$\mathcal{D}_r = \mathcal{I}_r$ donc OK pour $k = r$

Pour $k < r$, on choisit $i \notin F_k$.
Par l'observation, $x_{\mathcal{F}} \alpha^{r-k} = x_{F_1} \cdots x_{F_{k-1}} (x_{F_k} \alpha) \alpha^{r-k-1}$

$$= x_{F_1} \cdots x_{F_{k-1}} \sum_{F_k \cup \{i\} \subset G} x_{F_k} x_G \alpha^{r-k-1}$$

$= 0$ par hypothèse de récurrence.

Pour $\mathcal{F} \in \mathcal{I}_k$, par récurrence ascendante sur k, on montre $x_{\mathcal{F}} \alpha^{r-k} = \alpha^r$
$k=0$ immédiat

$\mathcal{F} = \{F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k\} \in \mathcal{I}_k$, par hypothèse de récurrence, $x_{F_1} \cdots x_{F_{k-1}} \alpha^{r-(k-1)} = \alpha^r$

On choisit $i \in F_k \setminus F_{k-1}$. Par l'observation

$$x_{F_{k-1}} \alpha = \sum_{F_{k-1} \cup \{i\} \subset G} x_{F_{k-1}} x_G$$

donc $\alpha^r = \sum_{F_{k-1} \cup \{i\} \subset G} x_{F_1} \cdots x_{F_{k-1}} x_G \alpha^{r-k}$

$F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{k-1} \subsetneq G$ drapeau, dans $\mathcal{I}_k$ ssi $G = F_k$
$= \mathrm{cl}(F_{k-1} \sqcup \{i\})$

$\alpha^r = x_{\mathcal{F}} \alpha^{r-k}$ $\square$

② **Théorème** [inégalités de Khovanskii-Teissier] : Soit X^n une variété projective lisse complexe de dimension n. Soient α et $\beta \in H^2(X)$ deux classes nef sur X. Posons $\mu_k = (\beta^k \cdot \alpha^{n-k}) \in \mathbb{R}$, alors pour $0 < k < n$,

$$\mu_{k-1}\,\mu_{k+1} \leq \mu_k^2$$

i.e la suite μ_k est log concave.

→ Si les classes α et $\beta \in H^2(Y_M)$ sont nef, et $(\alpha^n) > 0$, alors on a gagné.

Définition (par le critère de Kleiman) : Un diviseur D sur X est nef si $(D \cdot C) \geq 0$ pour toutes les courbes irréductibles $C \subset X$.

Exemple : Un hyperplan dans $\mathbb{P}^n$ est nef.

Propriétés : Soit $X \xrightarrow{\pi} Y$ morphisme birationnel (éclatement), alors
- l'image inverse par π d'un diviseur nef sur Y est nef.
- la transformée stricte d'un diviseur nef et effectif sur Y par π est nef.

Ici, on se rappelle que la construction des $Y_M = Y_{\mathcal{A}}$ est fonctorielle par des applis birationnelles.

Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{P}^n$ sous arrangement d'hyperplans,

$$Y_{\mathcal{A}} \longrightarrow Y_{\mathcal{B}} \quad \text{morphisme birationnel.}$$

Par exemple $\mathcal{B} = \emptyset$, $Y_{\mathcal{B}} = \mathbb{P}^n$

Proposition : α et β sont nef, et $(\alpha^n) > 0$.

Preuve : • $\alpha = \pi^{-1}(H)$ sous $\pi : Y_M \longrightarrow \mathbb{P}^n$

(dans l'exposé de Joost, c'était $-D_1$)

donc α est nef et $(\alpha^r) = (H^r) > 0$.

- Pour β nef, on procède par récurrence sur le nb d'hyperplans

Si 0 hyperplans, $\beta = 0$ nef. (et $\alpha = H \subset \mathbb{P}^r = Y_\emptyset$)

On suppose β nef pour k hyperplans
Si $\mathcal{A}$ avec $k+1$ hyperplans, $\mathcal{A}'$ l'arrangement où un hyperplan oublié

$$Y_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\pi} Y_{\mathcal{A}'} \quad \text{birationnel}$$

$$\alpha', \beta' \text{ nef}$$

β est la transformée stricte de $\underbrace{\alpha' + \beta'}_{= \text{bord de } Y_{\mathcal{A}'}}$ par π.

$\square$

$\to$ Preuve dans cas représentable sur $\mathbb{C}$ ok.

③ Récurrence AHK

Gros de AHK : Kähler package combinatoire

§9 $\to$ montrer $\mu^{r-2}\mu^r \leq (\mu^{r-1})^2$ pour un matroïde quelconque de rang $r+1$

récurrence : $M \rightsquigarrow tr(M) =$ matroïde sur E dont les plats sont les plats de M sauf ceux de rang r

$$\mu^k(tr(M)) = \mu^k(M) \quad \text{pour } k < r$$

$$\| $$

$$\#(O_k \cap J_k)$$

⚠ $tr(M)$ pas forcément représentable si M l'est | sur $\mathbb{C}$ ça marche.

eg $U_{2,4}$ vs U_4.