Éventail de Bergman d'un matroïde

M matroïde sur $E = \{0, 1, \dots, n\}$ de rang $r+1$.
$\wedge$
Sans boucle ($\emptyset$ est un plat)
simple (les singletons sont des plats)

$N_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^E / \mathbb{R}(1, \dots, 1) \supset N := N_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}^E$ de dimension n.

$e_i \in \mathbb{R}^E$ éléments de la base $(i \in E)$

$\mathcal{P} := \{ \text{plats } \underset{\neq \emptyset, E}{\underline{\text{stricts}}} \text{ de } M \}$

Pour $F \in \mathcal{P}$, $\quad e_F := \sum_{i \in F} e_i$

Pour $F_\bullet = \{ F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k \}$ drapeau dans $\mathcal{P}$,

$\sigma_{F_\bullet} = \operatorname{cone}(e_{F_1}, \dots, e_{F_k})$ cone polyédral convexe rationnel strict.

Collection de ces cones = éventail de Bergman Σ_M

Exemples :

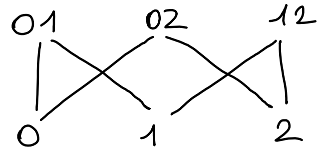
Rappels : $U_{r+1, n+1}$ matroïde sur E dont les plats sont E
et toutes les parties de E de cardinal $\leq r$.

$U_{n+1,n+1}$ matroïde dont les plats sont toutes les parties de E.

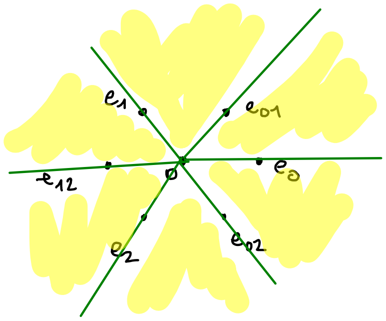
$n = 2$. $\{0,1,2\}$

$U_{3,3}$

$\mathcal{P}$:



$N_{\mathbb{R}}$

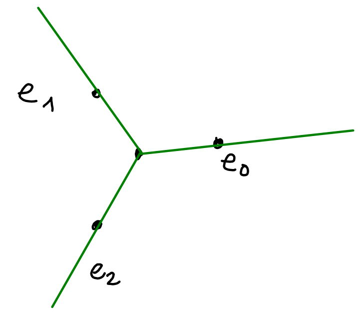


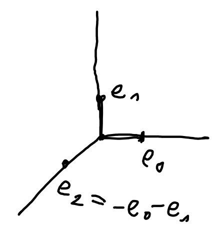
variété torique

éclatement de $\mathbb{P}^2$
en les 3 pts fixes du tore

$U_{2,3}$

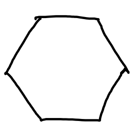
$\mathcal{P}$: 0 1 2





$\mathbb{P}^2 \setminus 3$ pts

éventail normal du permutoèdre



En général $\Sigma_{U_{n+1,n+1}}$ = éventail normal du permutoèdre.

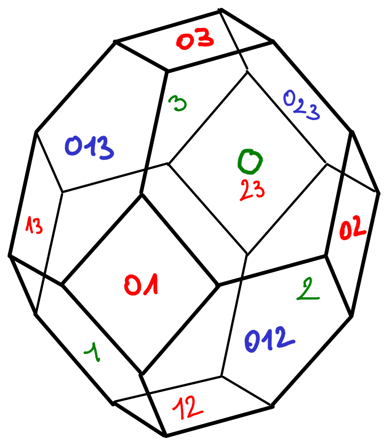
$$\Sigma_{U_{2,n+1}} = \mathbb{P}^n \setminus \text{orbites de codimension} \geq 2$$

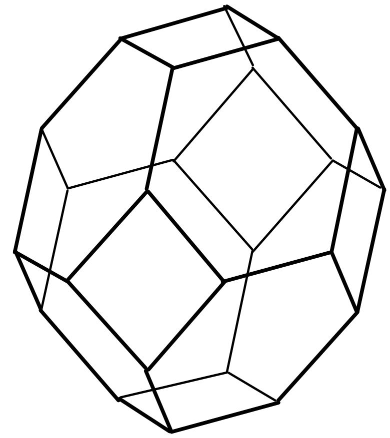
Σ_M est toujours un sous-éventail de $\Sigma_{U_{n+1,n+1}}$

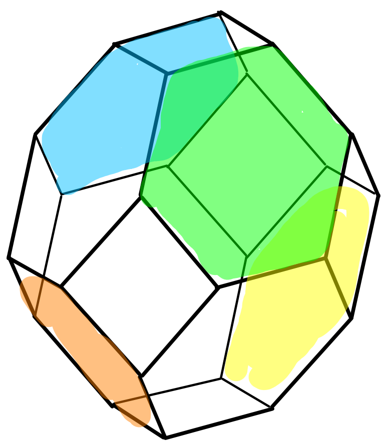
012 013 023 123

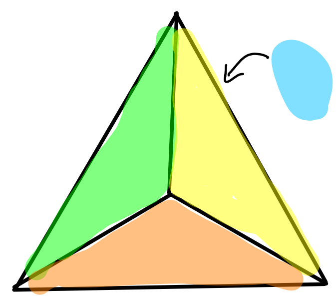
01 02 03 12 13 23

0 1 2 3



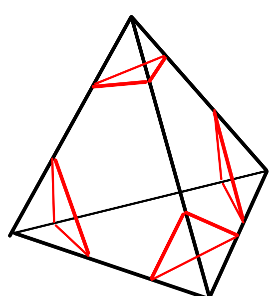




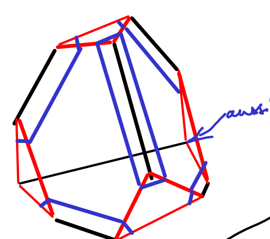


$\mathbb{P}^3$

tétraèdre



tétraèdre tronqué



permutoèdre

= éclatement des points $[0:0:0:1]$, $[0:0:1:0]$, $[0:1:0:0]$, $[1:0:0:0]$ (intersections de 3 hyperplans) de cordonnée

= éclatement des transformées strictes des intersections de 2 hyperplans de cordonnée

construction de De Concini - Procesi appliquée à l'arrangement des hyperplans de cordonnées dans $\mathbb{P}^3$

Matroïdes représentables et éventail de Bergman

$\mathcal{A}$ arrangement d'hyperplans dans V^{r+1} ; $n+1$ hyperplans

$\rightsquigarrow$ $f_0, \dots, f_n$ équations de ces hyperplans

$\rightsquigarrow$ morphisme $[f_0 : \dots : f_n] : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n$

De Concini Procesi :

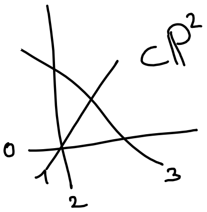
$$\text{transformée stricte de } \mathbb{P}(V) = \begin{tikzcd} Y_{\mathcal{A}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & X_{perm} \arrow[d] \\ \mathbb{P}(V) \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

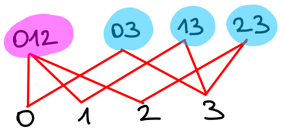
$\Sigma_{\mathcal{A}}$ éventail de Bergman du matroïde représentable associé

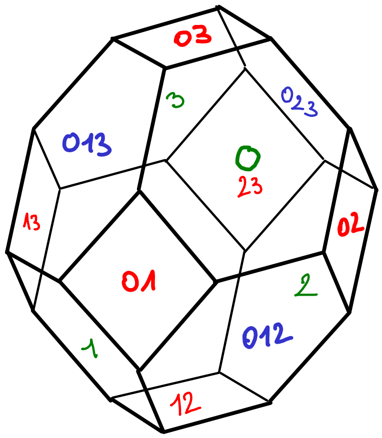
$X(\Sigma_{\mathcal{A}}) =$ ouvert de X_{perm}

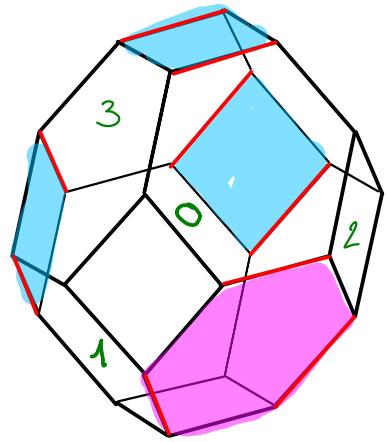
obtenu en enlevant toutes les orbites qui ne rencontrent pas $Y_{\mathcal{A}}$.

$$\begin{array}{c} X(\Sigma_{\mathcal{A}}) \\ \cup \\ Y_{\mathcal{A}} \end{array}$$









+ facets 0, 1, 2, 3