ARRANGEMENTS D'HYPERPLANS

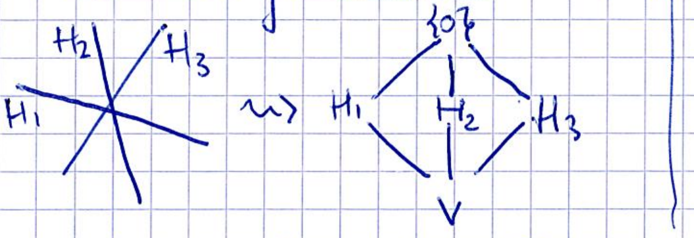
DEF: C'est un ensemble fini d'hyperplans affines d'un ev V.
Il est dit **central** si les hyperplans sont linéaires.
Un **plat** d'un arrangement est une intersection $\neq \emptyset$ de certains de ses hyperplans (V si intersection vide, ie de 0 hyperplan)

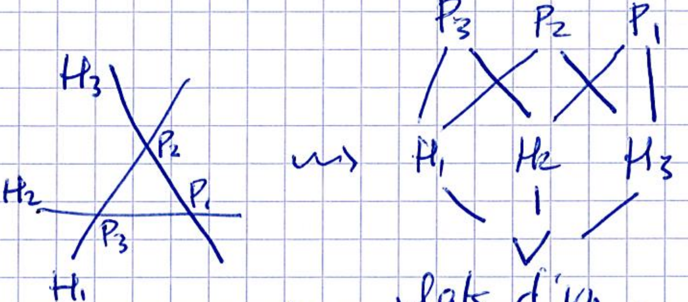
REM: Par dualité on peut associer un matroïde linéaire à tout arrangement central, et les plats correspondent.

DEF: Ceci explique que les plats d'un arrangement $\mathcal{A}$, $P(\mathcal{A})$, soient munis de l'ordre

$$X \leq Y \iff X \supseteq Y$$

EX de diag de HASSE





REM
- $\exists X \wedge Y = \bigcap_{\mathcal{A} \ni H \supseteq X + Y} H$ $\quad \forall X, Y \in P(\mathcal{A})$ plats d'un arrangement
- $\exists X \vee Y = X \cap Y \iff X \cap Y \neq \emptyset$
- $\mathcal{A} = \{\text{atomes}\}$, le poset associé $P(\mathcal{A})$ atomique (tout plat est $\vee$ d'atomes)
- $rk(X) = \operatorname{codim} X$ satisfait $rk(Y) = rk(X) + 1$ si $Y \gtrdot X$ (évident en dualisant)
- $P(\mathcal{A})$ semimodulaire car $X \wedge Y \supseteq X + Y$
$$\Rightarrow rk X + rk Y \geq rk(X \wedge Y) + rk(X \vee Y)$$
- $P(\mathcal{A})$ treillis géométrique si $\mathcal{A}$ central

RAPPEL: $X, Y \in P(\mathcal{A})$, $X < Y$ $\quad \mu(X, X) = 1 \quad \sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(X, Z) = 0$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{X \in P(\mathcal{A})} \mu(X)\, t^{\dim X} \quad \text{pol. car.}$$

$\mu(X) := \mu(\hat{0}, X)$

REM: $\chi_A = q^c \chi_M$, M matroïde de A central, $c = \dim \bigcap_{H\in A} H$.

EXEMPLE

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \{0\} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\ H_1 \arrow[dr, dash] & H_2 \arrow[d, dash] & H_3 \arrow[dl, dash] \\ & V & \end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{c} rk \\ 2 \\ \\ 1 \\ \\ 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \mu(\hat{0},-) \\ \begin{tikzcd}[column sep=small] & 2 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\ -1 \arrow[dr, dash] & -1 \arrow[d, dash] & -1 \arrow[dl, dash] \\ & 1 & \end{tikzcd} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \chi = (q-1)(q-2) \\ 2 \\ \\ -3q \\ \\ q^2 \end{array}$$

Si r atomes, central dans $\mathbb{K}^2$: $\chi = q^2 - rq + r - 1 = (q-1)(q-(r-1))$

REM: · $\forall$ poset fini P $\sum_{X\in P} \mu(X) = 0 \Rightarrow \chi(1) = 0$

· peut aussi être vu par comptage (cf plus loin).

§ COMPTAGE

THM [Zaslavsky 75] Sur $\mathbb{R}$, & $n = \dim V$. $\underbrace{\#\pi_0(V \setminus \bigcup_{H\in A} H)}_{=: r(A) = \#\text{"régions de } A\text{"}} = (-1)^n \chi_A(-1)$

EX: $H_1 \cdots H_r \subseteq \mathbb{R}^2$ central $\rightsquigarrow 2r$

DEF: $\forall X \in P(A)$, A^X arrangement des hyperplans $\{H\cap X \mid H \in A\} \setminus \{X\}$ de X. ("restriction")

$\rightsquigarrow P(A^X) = \{Y \in P(A) \mid Y \geq X\}$

PREUVE: Veut $r(A) = \sum_{Y\in P(A)} \mu(\hat{0}, Y)(-1)^{\operatorname{codim} Y}$

$\Leftarrow \forall X \quad r(A^X) = \sum_{Y \geq X} \mu(X,Y)(-1)^{\dim X - \dim Y}$

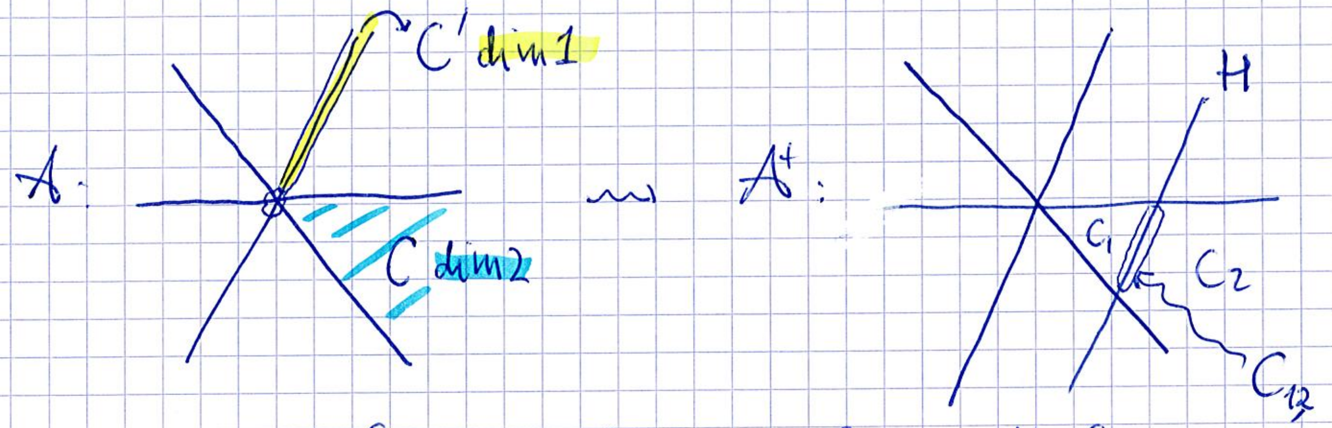
$\Leftrightarrow \forall X \quad (-1)^{\dim X} r(A^X) = \sum_{X\leq Y} \mu(X,Y)(-1)^{\dim Y}$

$\Leftrightarrow \forall X \quad (-1)^{\dim X} = \sum_{X \leq Y} (-1)^{\dim Y} r(A^Y) \qquad (*)$

OPS $X \text{"="} V \text{"="} \hat{0}$, $\dim X = n$.

Fait: les régions de A^Y, $Y \in P(A)$ partitionnent $\mathbb{R}^n$ en cellules et $RHS(*) = \sum_{C \text{ cellule}} (-1)^{\dim C}$

Preuve par réc, ok si $\mathcal{A}$ vide. Ensuite $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A} \cup \{H\}$



$$(-1)^{\dim C} = (-1)^{\dim C_1} + (-1)^{\dim C_2} + (-1)^{\overset{\dim C - 1}{\dim C_{1,2}}} \quad ✓$$

THM. Sur $\mathbb{F}_q$, $\#\big(\overbrace{V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H}^{=: M(\mathcal{A})}\big) = \chi_{\mathcal{A}}(q)$

PREUVE: On utilise la décomposition cellulaire de X plat induite par $\mathcal{A}^X$: $\#X = \sum_{Y \geq X} \# M(\mathcal{A}^Y)$

On inverse $\# M(\mathcal{A}^X) = \sum_{Y \geq X} \mu(X,Y) \# Y$

$X = \emptyset \Rightarrow \# M(\mathcal{A}) = \sum_{Y \in P(\mathcal{A})} \mu(Y) q^{\dim Y} = \chi_{\mathcal{A}}(q)$. ✓

REM.
- cas central $\exists\, \mathbb{G}_m$-fibré $V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ & $\chi_{\mathcal{A}}(q) = (q-1) \# \mathbb{P}(V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H)$ "hypersurface arrangement"
- Dans les cas favorables (hypothèses de "pureté") le polynôme de décompte d'une variété est son polynôme de Poincaré.
  (eg $M(\mathcal{A})$: Poincaré satisfait une relation de suppression-contraction !)

§ LIEN AVEC LES GRAPHES

DEF : $G=(V,E)$ graphe $\rightsquigarrow$ arrangement $\mathcal{A}(G)$ en dim $\#V$, central, hyperplans $x_i=x_j$ $\forall\{i,j\}\in E$.

PROP 1 : chromatique $\chi_G = \chi_{\mathcal{A}(G)}$ caractéristique

PREUVE : $\chi_{\mathcal{A}(G)}(q) = \#\{(x_1\dots x_n)\in\mathbb{F}_q^n \mid x_i\neq x_j\ \forall\{i,j\}\in E\}$
$n=\#V$
$= \#$ q-coloriages de G
vrai pour une infinité de q. ✓

PROP 2 : Sur $\mathbb{R}$, $\pi_0(M(\mathcal{A}(G))) \xleftrightarrow{1-1}$ orientations acycliques de G

PREUVE : Sur une composante de $M(\mathcal{A}(G))$, si $\{i,j\}\in E$ on pose $i\to j$ si $x_i<x_j$ et vice versa.
nécessairement acyclique sinon $x_{i_0}<x_{i_1}<\dots<x_{i_k}<x_{i_0}$ sur cette composante.

THM [Stanley 73] $\#$ orientations acycliques $=(-1)^n\chi_G(-1)$

Prop 2 + Zaslavsky $\mathbin{/\!/}$ $(-1)^n\chi_{\mathcal{A}(G)}(-1)$ $\mathbin{/\!/}$ Prop 1 ✓