Description du groupe de Lie G_2 et de son action sur $\mathbb{S}^6$

Agathe L. Rolland

Travail Encadré de Recherche

Master 1 Mathématiques Fondamentales

Mai 2021

Département de Mathématiques

Supervisé par Thibaut Delcroix

Description du groupe de Lie G_2 et de son action sur $\mathbb{S}^6$

Agathe L. Rolland

Résumé

Le groupe de Lie G_2 est le plus petit des cinq groupes exceptionnels en terme de dimension ; nous le définissons comme le groupe des automorphismes de l'algèbre des octonions. Nous commençons par construire les octonions à partir des quaternions, eux-mêmes construits à partir des complexes, d'après le procédé de Cayley-Dickson. Nous étudions ensuite quelques conséquences de notre définition de G_2, puis nous décrivons son action sur l'ensemble des triplets basiques. Celle-ci nous permet de montrer que G_2 est un groupe de Lie connexe, compact et de dimension quatorze. Grâce à ces propriétés, nous étudions l'action de G_2 sur la sphère $\mathbb{S}^6$.

Mots-clés : Groupe de Lie G_2 ; Octonions ; Construction de Cayley-Dickson ; Triplets basiques ; Sphère $\mathbb{S}^6$.

Abstract

The Lie group G_2 is the smallest dimensional of the five exceptional groups; we define it as the automorphism group of the octonions. We start by building up the octonions from the quaternions, themselves built from the complex numbers, according to the Cayley-Dickson construction. We then study some consequences of our definition of G_2, after which we describe its action on the set of basic triples. This allows us to show G_2 is connected, compact and of dimension fourteen. Thanks to these properties, we study the action of G_2 on the sphere $\mathbb{S}^6$.

Keywords: Lie group G_2; Octonions; Cayley-Dickson construction; Basic triples; Sphere $\mathbb{S}^6$.

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon superviseur, Thibaut Delcroix, pour sa disponibilité, son soutient et sa patience à mon égard. Je remercie également Jack Romo pour ses analogies imagées, ainsi que Robert Lacoste, pour sa présence à mes côtés.

Table des Matières

Introduction

Au début du XIX^{e} siècle, le mathématicien français Évariste Galois (1811 - 1832) introduit la notion de groupe, motivé par la recherche de solutions des équations polynomiales de degré supérieur à quatre. À l'origine, le groupe de Galois n'était pas défini comme le groupe des automorphismes d'une extension de corps qui fixent le corps de base, mais comme l'ensemble des permutations des racines d'un polynôme donné qui laissent invariant ce dernier. É. Galois a montré que connaître la structure du groupe de Galois d'un polynôme permet de déterminer s'il est ou non résoluble par radicaux.
Quelques décennies plus tard, le mathématicien norvégien Sophus Lie (1842 - 1899) s'intéresse à la théorie de Galois, tout en étudiant la géométrie différentielle. Cela le conduit à introduire la notion de groupe de Lie, afin de représenter les symétries des équations différentielles, par analogie avec les groupes de Galois. Un groupe de Lie est à la fois un groupe et une variété différentiable, c'est-à-dire qu'il est localement semblable à un espace euclidien d'une certaine dimension, le plan tangent à chaque point. Le plan tangent à l'élément neutre du groupe possède une structure d'algèbre, appelée algèbre de Lie. Ainsi, les notions de groupe de Lie et d'algèbre de Lie sont étroitement liées.

Une algèbre de Lie est un espace vectoriel muni d'un crochet de Lie. Il s'agit d'une loi de composition interne bilinéaire, antisymétrique, et qui vérifie la relation de Jacobi.

Relation de Jacobi. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

$$\forall x, y, z \in E, [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Élie Cartan (1869 - 1951) et Wilhelm Killing (1847 - 1923), deux mathématiciens respectivement français et allemand, consacrèrent la majeure partie de leur œuvre mathématique aux algèbres et groupes de Lie. Ils cherchèrent entre autre à déterminer toutes les algèbres de Lie simples, c'est-à-dire toutes les algèbres de Lie non-commutatives dont l'anneau sous-jacent n'admet pas d'idéal non-trivial. Leurs travaux aboutirent à la classification des algèbres de Lie simples, divisées en deux catégories : classiques et exceptionnelles. La classification des algèbres de Lie simples réelles s'appuie sur celle des algèbres de Lie simples complexes. À l'aide des diagrammes de Dynkin, dont nous n'allons pas développer la théorie, celles-ci sont classées en quatre familles A_n, B_n, C_n et D_n, appelées algèbres de Lie **classiques**, plus cinq algèbres de Lie **exceptionnelles** [4, 7]. Ensuite, É. Cartan et W. Killing cherchèrent à associer ces algèbres, des structures abstraites, à des groupes

de transformation. Un groupe de Lie réel est un groupe topologique, c'est-à-dire qu'il peut être muni d'une topologie compatible avec la loi de groupe. Il est dit **compact** si sa topologie l'est.
On peut distinguer les groupes de Lie compacts en deux catégories : les groupes **classiques**, et les groupes **exceptionnels**, suivant l'algèbre de Lie à laquelle ils sont associés.
Le groupe de Lie G_2 est le plus petit groupe de Lie exceptionnel. En effet, on dénombre cinq types de groupes de Lie exceptionnels, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, qui sont respectivement de dimension 14, 52, 78, 133 et 248.

En 1845, le mathématicien britannique Arthur Cayley (1821 - 1895) construit l'algèbre des octonions, qui est non commutative et non associative, et qui peut être vue comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension huit.
En 1914, É. Cartan établit le lien entre l'algèbre des octonions et le groupe de Lie G_2 : ce dernier peut être défini comme le groupe des automorphismes des octonions $Aut(\mathbb{O})$.

Aussi, avant de nous intéresser au groupe G_2, nous allons construire les octonions en appliquant la construction de Cayley-Dickson, qui définit les complexes comme couples de réels, puis les quaternions comme couples de complexes, et enfin les octonions comme couples de quaternions. Ceci va nous permettre de définir G_2 comme le groupe $Aut(\mathbb{O})$, et nous allons étudier des conséquences de cette définition, afin de mieux comprendre G_2. Puis, nous allons étudier l'action de G_2 sur l'ensemble des triplets basiques $\mathbb{T}$. Cela va nous permettre de donner une justification de la dimension de G_2, ainsi que de montrer que c'est un groupe connexe. Ces deux propriétés nous permettront finalement d'étudier l'action de G_2 sur $\mathbb{S}^6$ la sphère unité de $\mathbb{R}^7$ de dimension six, qui constitue le but de notre travail.

Les définitions d'algèbre à division, algèbre normée, alternativité et espace fibré ont été consultées sur les sites de Wikipédia (version française et anglaise) et de Bibmath.net, entre les mois de janvier et avril 2021. De plus, une partie des informations concernant les quaternions et les octonions proviennent également de ces sites.

1. Description du groupe de Lie exceptionnel G_2

1.1. Les nombres complexes

Au début du XIX[e] siècle, le mathématicien irlandais William Rowan Hamilton (1805 - 1865) eu l'idée de considérer les nombres complexes comme des paires de nombres réels, ce qui s'avéra être très utile en géométrie plane. En effet, les nombres complexes représentent les points du plan, tandis que les opérations d'addition et multiplication représentent les transformations géométriques. Ajouter un nombre complexe revient à effectuer une translation suivant la partie réelle et la partie imaginaire de celui-ci. Multiplier par un nombre complexe dont la forme polaire est $re^{i\theta}$ revient à effectuer une rotation d'angle θ et une homothétie de rapport r, centrée en l'origine.

Ainsi, tout nombre complexe $a + ib$ peut être vu comme la paire de réels (a, b). L'addition de deux complexes $a + ib$ et $c + id$ donne donc

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

et le produit

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Nous pouvons également définir le conjugué d'un nombre complexe :

$$\overline{(a, b)} = (a, -b).$$

Fort de son succès, W. R. Hamilton chercha à généraliser cette nouvelle approche à des triplets de réels, pour pouvoir travailler dans l'espace ; mais ce fut un échec. En effet, il n'existe pas d'algèbre à division de dimension trois ; c'est-à-dire qu'on ne peut pas munir $\mathbb{R}^3$ d'une opération de multiplication qui en fasse un corps, à l'image de $\mathbb{C}$ en dimension deux [2, p. 1]. Cependant, il vint à l'esprit de W. R. Hamilton de considérer la quatrième dimension. Ce fut une révélation : les **quaternions** furent créés.
Le fait que ces nouveaux nombres soient des quadruplets s'explique d'un point de vue géométrique. En effet, si on les considère comme des similitudes dans l'espace, ils doivent faire subir à tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ une rotation autour d'un axe donné, puis multiplier le vecteur par un scalaire. Or il faut deux paramètres pour fixer l'axe de rotation, un pour indiquer l'angle de rotation, et un pour la multiplication par un scalaire [5, p. 260].

1.2. Les quaternions

On note $\mathbb{H}$ l'ensemble des quaternions. Introduisons quelques définitions permettant de le décrire.

Définition 1

Une ***algèbre*** *sur un corps commutatif K est une structure algébrique $(A, +, \cdot, \times)$ telle que :*

(i) *$(A, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur K ;*
(ii) *La loi $\times$ est définie de $A \times A$ dans A ;*
(iii) *La loi $\times$ est bilinéaire.*

L'algèbre est dite ***commutative*** *si la loi $\times$ l'est.*

L'ensemble des quaternions $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Un quaternion est un nombre $a + ib + cj + dk$, avec a, b, c, d des réels, i le complexe imaginaire pur, et j et k deux nouveaux nombres qui vérifient :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$
$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$$

Remarquons que l'ensemble $\mathbb{H}$ des quaternions est non-commutatif. En effet, on a par exemple $ij = -ji$.

Définition 2

Une ***algèbre à division*** *est une algèbre sur un corps pour laquelle la division par un élément non-nul est bien définie à droite et à gauche. C'est-à-dire que*

$$\forall (a, b) \in A \times A \setminus \{0\}, \exists! (x, y) \in A^2, a = xb \text{ et } a = by.$$

Remarque. Si la loi $\times$ est associative, une algèbre est dite **à division** si tout élément non nul admet un inverse (en particulier, $x = y$ dans la définition ci-dessus, et on choisit généralement que a vaut 1). On obtient alors un corps non-commutatif. Ainsi, $\mathbb{H}$ est un corps.

Définition 3

Soit A une algèbre sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- *A est dite **normée** si elle est munie d'une norme d'espace vectoriel telle que*
$$\forall x, y \in A,\ \|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$
- *Une norme est **multiplicative** si*
$$\forall x, y \in A,\ \|xy\| = \|x\|\|y\|.$$

Nous admettons que $\mathbb{H}$ est la seule algèbre à division normée de dimension quatre.

D'après la construction de Cayley-Dickson, il est possible de retrouver ce que nous avons obtenus pour les nombres complexes dans la section précédente. Ainsi, les quaternions peuvent être vus comme couples de nombres complexes, en prenant $(1, j)$ comme base de $\mathbb{H}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Le quaternion $q = a + ib + cj + dk$ est donc égal à $z_1 + jz_2$, avec $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c - id$, et on identifie alors q au couple $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Soient z_1, z_2, z_3, z_4 des nombres complexes. Nous obtenons les égalités suivantes [2, p. 8] :

$$(z_1, z_2) + (z_3, z_4) = (z_1 + z_3, z_2 + z_4)\ ;$$
$$(z_1, z_2) \times (z_3, z_4) = (z_1 z_3 - z_4 \overline{z_2}, \overline{z_1} z_4 + z_2 z_3).$$

Montrons cette dernière égalité. Soient q_1 et q_2 des quaternions, respectivement identifiés aux couples de complexes (z_1, z_2) et (z_3, z_4). D'après la définition 1, la loi $\times$ est bilinéaire. On obtient donc :

$$q_1 \times q_2 = (z_1 + jz_2) \times (z_3 + jz_4) = z_1 z_3 + z_1 j z_4 + j z_2 z_3 + j z_2 j z_4.$$

Il nous reste à montrer que $jz_2jz_4 = -z_4\overline{z_2}$ et que $z_1jz_4 = j\overline{z_1}z_4$, soit que $jz_2j = -\overline{z_2}$ et que $z_1 j = j\overline{z_1}$. Pour cela, nous allons utiliser la propriété suivante :

Propriété 1

$$\forall z \in \mathbb{C}, jzj = -\bar{z}.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcccccccc} jzj & = & j(a+ib)j & = & (ja+(ji)b)j & = & (ja-kb)j & = & j^2a-(kj)b \\ & = & -a+ib & = & -(a-ib) & = & -\bar{z}. & & \end{array}$$

□

On obtient donc immédiatement que $jz_2j = -\overline{z_2}$. De plus, la seconde égalité découle également de cette propriété, en multipliant à gauche par $-j$ dans les deux membres.
Ainsi, $q_1 \times q_2 = z_1z_3 + j\overline{z_1}z_4 + jz_2z_3 - \overline{z_2}z_4 = z_1z_3 - \overline{z_2}z_4 + j(\overline{z_1}z_4 + z_2z_3)$, ce qui est l'égalité voulue.

Enfin, le conjugué d'un quaternion est défini par :

$$\boxed{\overline{(z_1, z_2)} = (\overline{z_1}, -z_2)}$$

C'est-à-dire que $\bar{q} = a - ib - cj - dk$.
Remarquons qu'alors $\overline{q_1q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$. En effet, on a :

$$\begin{array}{rcccc} \overline{q_1q_2} & = & \overline{(z_1z_3 - z_4\overline{z_2}, \overline{z_1}z_4 + z_2z_3)} & = & (\overline{z_1z_3} - \overline{z_4}z_2, -\overline{z_1}z_4 - z_2z_3) \\ & = & (\overline{z_3}\,\overline{z_1} - z_2\overline{z_4}, -z_4\overline{z_1} - z_3z_2) & = & \overline{q_2}\,\overline{q_1}. \end{array}$$

1.3. Les octonions

W. R. Hamilton fut si enchanté par son idée qu'il s'empressa d'écrire le jour même à son ancien camarade et ami John Thomas Graves (1806 - 1870), pour lui présenter les quaternions. Ce dernier fut frappé par la possibilité de créer de nouveaux nombres imaginaires, et voulu pousser le travail de W. R. Hamilton plus avant. Ses recherches aboutirent à la création des **octaves**. Il s'agit d'une algèbre à division de dimension huit. J. T. Graves ne s'arrêta pas en si bon chemin et chercha à développer une théorie des « 2^n-ions ». Mais il bloqua sur la construction d'une algèbre à division de dimension seize, et renonça à son projet. Il transmit ses travaux à son ami, qui ne prit pas le temps de les publier. À la même période, le jeune mathématicien britannique Arthur Cayley (1821 - 1895) publia un article dans lequel il décrivait les octaves, damant ainsi le pion à J. T. Graves. Les octaves sont ainsi connus sous le nom d'**octaves de Cayley**, ou **octonions** [2, p. 2].

L'ensemble des octonions $\mathbb{O}$ a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension huit. Un moyen direct de décrire les octonions est de donner leur table de multiplication. Cependant, cette table contient

8×8 entrées, ce qui la rend assez peu lisible. Nous allons donc utiliser le diagramme de Fano, qui constitue un bon moyen mnémotechnique pour se souvenir des règles de multiplication dans $\mathbb{O}$ [2, p. 7].

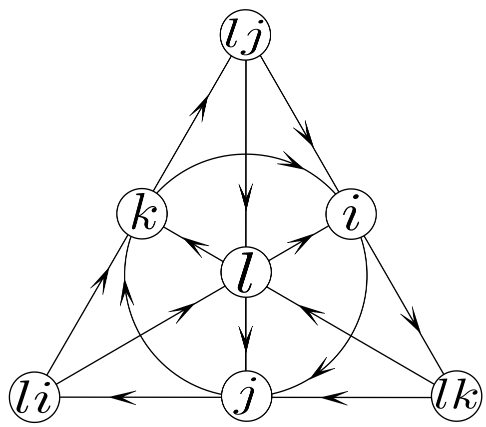

Figure 1. Diagramme de Fano.

L'ensemble $\mathbb{O}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par $\mathcal{B} = \{1, i, j, k, l, li, lj, lk\}$. Le diagramme de Fano, assorti des règles suivantes, permet de décrire entièrement la structure algébrique des octonions :

(i) 1 est l'élément neutre pour la multiplication ;
(ii) Tout élément de la base différent de 1 mis au carré vaut -1 ;
(iii) Si x, y et z sont sur une même « ligne » (côté, médiane ou cercle), ordonnés dans le sens de la flèche, alors

$$xy = z, \qquad yz = x, \qquad zx = y,$$
$$yx = -z, \qquad xz = -y, \qquad zy = -x.$$

Ainsi, lorsqu'on multiplie deux éléments d'une même ligne suivant le sens de la flèche, on obtient le troisième ; mais si on multiplie en allant dans le sens contraire, on obtient **moins** le troisième [2, 7, p. 7, p. 2].

Notons $\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{O}$ engendré par $\{i, j, k, l, li, lj, lk\}$. On a alors la décomposition suivante : $\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \mathcal{V}$. Ainsi, par analogie avec les complexes, on dit que tout octonion est somme de sa « partie réelle » et de sa « partie imaginaire ». Les octonions appartenant à $\mathbb{R}$ sont appelés **scalaires** et ceux appartenant à $\mathcal{V}$ **imaginaires purs**.

Remarque. On défini le conjugué d'un octonion

$$o = a + ib + cj + dk + el + f(li) + g(lj) + h(lk)$$

par

$$\bar{o} = a - ib - cj - dk - el - f(li) - g(lj) - h(lk).$$

Ainsi, quel que soit $x \in \mathcal{V}$, $\bar{x} = -x$.

L'algèbre des octonions peut être munie d'une norme multiplicative, en posant que $\forall o \in \mathbb{O}$, $\|o\| := o\bar{o} \in \mathbb{R}$ [7, p. 3]. On associe cette norme au produit scalaire suivant :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{O}, \langle x, y\rangle := \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) = \mathrm{Re}(x\bar{y}).}$$

On obtient $\|o\| = \langle o, o\rangle$.
Montrons que nous avons bien défini un produit scalaire.

- **Commutativité** :

$$\forall x, y \in \mathbb{O}, \langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(y\bar{x} + x\bar{y}) = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) = \langle y, x\rangle.$$

- **Bilinéarité** :

$$\begin{aligned}\forall x, y, z \in \mathbb{O}, \langle x + y, z\rangle &= \tfrac{1}{2}((x + y)\bar{z} + z\overline{(x + y)})\\ &= \tfrac{1}{2}(x\bar{z} + y\bar{z} + z(\bar{x} + \bar{y}))\\ &= \tfrac{1}{2}(x\bar{z} + z\bar{x}) + \tfrac{1}{2}(y\bar{z} + z\bar{y})\\ &= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.\end{aligned}$$

  De plus, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle \lambda x, y\rangle = \mathrm{Re}((\lambda x)\bar{y}) = \mathrm{Re}(\lambda(x\bar{y})) = \lambda \mathrm{Re}(x\bar{y}) = \lambda\langle x, y\rangle.$$

  De même, $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.
- **Caractère défini positif** :
  Pour montrer que notre produit scalaire est positif, montrons d'abord que le carré d'un octonion imaginaire pur est toujours négatif. Cela découle de l'anticommutativité des éléments de la base. Soit $o \in \mathbb{O}$ tel que

$$o = \sum_{x \in \mathcal{B}\setminus\{1\}} a_x x.$$

On a alors

$$\begin{aligned} o^2 &= \sum_{x\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} a_x^2 x^2 + \sum_{\substack{(x,y)\in(\mathcal{B}\setminus\{1\})^2 \\ x\neq y}} (a_x a_y (xy) + a_y a_x (yx)) \\ &= -\sum_{x\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} a_x^2 + \sum_{\substack{(x,y)\in(\mathcal{B}\setminus\{1\})^2 \\ x\neq y}} (a_x a_y (xy) - a_y a_x (xy)) \\ &= -\sum_{x\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} a_x^2 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien que le carré d'un octonion imaginaire pur est un réel négatif. Considérons $x \in \mathbb{O}$, avec s sa partie réelle et t sa partie imaginaire. On obtient que

$$\langle x, x\rangle = x\bar{x} = (s+t)(s-t) = s^2 - t^2.$$

Or nous venons de voir que $t^2 \leq 0$, donc $s^2 - t^2 \geq 0$, d'où $\langle x, x\rangle \geq 0$.
Soit $x \in \mathbb{O}$ tel que $\langle x, x\rangle = 0$. Alors $s^2 - t^2 = 0$, d'où $s^2 = t^2$. Or $s^2 \geq 0$ et $t^2 \leq 0$, donc $s = t = 0$, et $x = 0$.

Ainsi, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive ; c'est donc un produit scalaire.

Le corps $\mathbb{O}$ hérite de la non-commutativité de $\mathbb{H}$, mais est aussi non-associatif. On a par exemple $l(ij) = lk = -(li)j$ [2, 7, p. 1, p. 2]. Le corps $\mathbb{O}$ a cependant la propriété d'être alternatif.

Propriété 2

*Un magma M est dit **alternatif** si*

$$\forall x, y \in M, (xx)y = x(xy) \text{ et } y(xx) = (yx)x.$$

Le corps des octonions est alternatif.

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'un magma associatif est automatiquement alternatif.
Pour x et y deux octonions, la propriété d'alternativité est linéaire en y mais pas en x. Ainsi, soient $y \in \mathcal{B}$ et $x \in \mathbb{O}$ tel que $x = a + b$, $a, b \in \mathbb{O}$. Sans perte de généralité, supposons que a et b sont des éléments de $\mathcal{B}$. Nous voulons montrer que $(xx)y = x(xy)$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} & ((a+b)(a+b))y = (a+b)((a+b)y) \\ \Leftrightarrow\ & (aa+ab+ba+bb)y = (a+b)(ay+by) \\ \Leftrightarrow\ & (aa)y + (ab)y + (ba)y + (bb)y = a(ay) + a(by) + b(ay) + b(by). \end{aligned}$$

Cela revient à montrer que pour tout a, b, y, trois éléments de $\mathcal{B}$,

$$(aa)y = a(ay) \quad \text{et} \quad (ab)y + (ba)y = b(ay) + a(by).$$

Remarquons que dans ces deux égalités, si a ou b ou y est égal à 1, l'égalité est immédiatement vraie. Soient donc $a, b, y \in \mathcal{B}\backslash\{1\}$.
Considérons la première égalité. Si $a = y$, elle est triviale. Supposons donc $a \neq y$. Comme n'importe quel couple d'éléments de la base tous deux différents de 1 se trouve sur une même « ligne » du diagramme de Fano, on pose sans perte de généralité que $a = i$ et $y = l$. On obtient alors

$$(ii)l = -l \quad \text{et} \quad i(il) = i(-li) = -i(li) = (li)i = -l,$$

d'où la première égalité.
Dans la seconde égalité, deux cas sont à distinguer :
Si ab et y commutent, ils sont (au signe près) sur une même « ligne » du diagramme de Fano. Sans perte de généralité, posons $a = i$, $b = j$, $y = k$. Ce sont des éléments de $\mathbb{H}$, qui est associatif, donc alternatif.
Si ab et y anticommutent, ils ne sont pas sur la même « ligne » du diagramme de Fano. Sans perte de généralité, posons $a = i, b = j, y = l$. On obtient

$$(ij)l + (ji)l = (ij)l - (ij)l = 0,$$

$$\text{et } j(il) + i(jl) = j(-li) + i(-lj) = (li)j + (lj)i = -(lk) + (lk) = 0,$$

d'où l'égalité.
La preuve de $y(xx) = (yx)x$ est similaire. Ainsi, $\mathbb{O}$ est bien alternatif. □

Les propriétés suivantes vont nous permettre d'introduire un objet qui sera très utile dans notre étude du groupe G_2.

Propriété 3 – Admise [2, p. 5]

Les seules algèbres à division normées sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ *et* $\mathbb{O}$.

Propriété 4 – [2, p. 35]

Soit $(x, y, z) \in \mathcal{V}^3$ tel que $x^2 = y^2 = z^2 = -1$, x et y anticommutent et z anticommute avec x, y et xy. Alors

(i) *L'élément x génère une sous-algèbre de $\mathbb{O}$ isomorphe à $\mathbb{C}$;*
(ii) *Le couple (x, y) engendre une sous-algèbre de $\mathbb{O}$ isomorphe à $\mathbb{H}$;*
(iii) *Le triplet (x, y, z) engendre $\mathbb{O}$. Un tel triplet d'octonions est appelé* ***triplet basique****.*

Démonstration.

(i) Soit $x \in \mathcal{V}$ tel que $x^2 = -1$, on a

$$\langle x, 1\rangle = \mathrm{Re}(x\bar{1}) = \mathrm{Re}(x) = 0,$$

d'où $\{1, x\}$ est une famille orthonormale qui engendre $\mathbb{R}(x)$, une extension de degré deux sur $\mathbb{R}$. Soit l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}(x) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ a + xb & \longmapsto & a + ib \end{array}$$

Cette application est un isomorphisme de corps. En effet, soit $(a + xb, a' + xb') \in \mathbb{R}(x)^2$, on a

$$\begin{array}{lcl} f((a + xb) + (a' + xb')) & = & f(a + a' + x(b + b')) \\ & = & a + a' + i(b + b') \\ & = & a + ib + a' + ib' \\ & = & f(a + xb) + f(a' + xb'), \\ f((a + xb)(a' + xb')) & = & f(aa' - bb' + x(ba' + ab')) \\ & = & aa' - bb' + i(ba' + ab') \\ & = & (a + ib)(a' + ib') \\ & = & f(a + xb)f(a' + xb'), \\ f(1) = f(-x^2) = -i^2 = 1, & & \end{array}$$

donc f est bien un morphisme de corps, donc injective. De plus, f est surjective, donc f est bien un isomorphisme de corps. Ainsi, $\mathbb{R}(x)$ et $\mathbb{C}$ sont isomorphe, donc la famille $\{1, x\}$ engendre $\mathbb{C}$.

(ii) Soit $y \in \mathcal{V}$ tel que $y^2 = -1$ et x et y anticommutent. Montrons que $\{1, x, y\}$ est une famille libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que

$a + bx + cy = 0$. On a alors :

$$
\begin{array}{ll}
 & a + bx + cy = 0 \\
\Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} ax + bx^2 + c(yx) & = & 0 \quad (\times x \text{ à droite}), \\ ax + bx^2 + c(xy) & = & 0 \quad (\times x \text{ à gauche}) \end{array} \right. \\
\Rightarrow & ax - b + c(yx) = ax - b - c(yx) \\
\Rightarrow & c = 0. \\
 & a + bx = 0 \\
\Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} ay + b(xy) & = & 0 \quad (\times y \text{ à droite}), \\ ay + b(yx) & = & 0 \quad (\times y \text{ à gauche}) \end{array} \right. \\
\Rightarrow & ay + b(xy) = ay - b(xy) \\
\Rightarrow & b = 0, a = 0.
\end{array}
$$

D'où $\{1, x, y\}$ est une famille libre. Donc la dimension de l'espace engendré par (x, y) est strictement supérieur à deux, donc (x, y) n'engendre pas $\mathbb{C}$.
Montrons que $\{1, x, y, xy\}$ ne génère pas un espace de dimension huit. Soit $z \in \mathcal{V}$ tel que $z^2 = -1$ et z anticommute avec x, y et xy. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ et $a + bx + cy + d(xy) = z$. On obtient alors :

$$
\begin{array}{ll}
 & a + bx + cy + d(xy) = z \\
\Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} ax + bx^2 + c(yx) + d((xy)x) & = & zx \quad (\times x \text{ à droite}), \\ ax + bx^2 + c(xy) + d(x(xy)) & = & xz \quad (\times x \text{ à gauche}) \end{array} \right. \\
\Rightarrow & ax - b + c(yx) + d((xy)x) = -(ax - b + c(xy) + d(x(xy))) \\
\Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} 2b & = & 2ax + d((xy)x) - d(x(xy)) \\ & = & 2ax - d((yx)x) - d(x^2y) \\ & = & 2ax + 2dy \end{array} \right. \\
\Rightarrow & b^2 = (ax + dy)^2 = a^2x^2 + ad(xy) + ad(yx) + d^2y^2 = -a^2 - d^2.
\end{array}
$$

Donc $b^2 \leq 0$, or $b \in \mathbb{R}$, d'où $b = 0$. De même, on obtient que $c = 0$. Ainsi, on a

$$
\begin{array}{ll}
 & a + d(xy) = z \\
\Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} az + d((xy)z) & = & z^2 \quad (\times z \text{ à droite}), \\ az + d(z(xy)) & = & z^2 \quad (\times y \text{ à gauche}) \end{array} \right. \\
\Rightarrow & az + d((xy)z) = az - d((xy)z) \\
\Rightarrow & d = 0, a = 0.
\end{array}
$$

Ainsi, $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$, ce qui est une contradiction. Donc $\{1, x, y, xy\}$ n'engendre pas z, donc la dimension de l'espace engendré par (x, y) est strictement inférieur à huit, donc (x, y) n'engendre pas $\mathbb{O}$.

De plus, chaque élément non-nul de cet espace vectoriel est inversible. En effet, considérons $a + bx + cy + d(xy)$ non-nul avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On obtient

$$(a + bx + cy + d(xy))\frac{(a-bx-cy-d(xy))}{a^2+b^2+c^2+d^2} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} = 1.$$

Or, d'après la propriété 3, $\mathbb{H}$ est la seule algèbre à division normée de dimension strictement comprise entre deux et huit, donc $\{1, x, y, xy\}$ engendre $\mathbb{H}$.

(iii) Nous admettons ce résultat.

□

Chaque triplet d'éléments figurants sur le diagramme de Fano qui sont non-alignés constitue un triplet basique. Par exemple, (i, j, l) et un tel triplet.

Interprétons géométriquement les triplets basiques. Soit (b_1, b_2, b_3) un tel triplet. Alors, d'après ce qui précède,

$$\forall n \in [\![1, 3]\!], b_n \in \mathcal{V} \quad \text{et} \quad b_n^2 = -1.$$

De plus,

$$\forall n, m \in [\![1, 3]\!], n \neq m, b_m b_n = -b_n b_m,$$

et enfin

$$(b_1 b_2)b_3 = -b_3(b_1 b_2).$$

On obtient que

$$\langle b_m, b_n \rangle = \frac{1}{2}(b_m\overline{b_n} + b_n\overline{b_m}) = -\frac{1}{2}(b_m b_n + b_n b_m) = 0.$$

Donc les vecteurs d'un triplet basique sont deux à deux orthogonaux.
De même, les vecteurs b_1b_2 et b_3 sont orthogonaux.
Enfin, notons $\mathbb{S}^6 = \{x \in \mathcal{V}, \|x\| = 1\}$. On a alors que

$$\forall n \in [\![1, 3]\!], \|b_n\| = -\mathrm{Re}(b_n^2) = 1,$$

d'où $b_n \in \mathbb{S}^6$ [7, p. 11].
Nous pouvons donc donner la proposition suivante :

Propriété 5 – [7, p. 11]

Soit (b_1, b_2, b_3) un triplet basique. Alors

(i) $\forall n \in [\![1, 3]\!]$, $b_n \in \mathbb{S}^6$;
(ii) *les vecteurs b_n sont deux à deux orthogonaux ;*
(iii) *les vecteurs b_1b_2 et b_3 sont orthogonaux.*

En appliquant à nouveau la construction de Cayley-Dickson, on obtient que les octonions peuvent être vus comme couples de quaternions. L'octonion $o = a + ib + cj + dk + el + f(li) + g(lj) + h(lk)$ est égal à $q_1 + lq_2$, avec q_1 et q_2 des quaternions.
Les règles de calculs sont semblables à celles obtenues à la section 1.2. En effet, soient q_1, q_2, q_3, q_4 des quaternions. Nous obtenons les égalités suivantes [2, p. 9] :

$$(q_1, q_2) + (q_3, q_4) = (q_1 + q_3, q_2 + q_4)\ ,$$
$$(q_1, q_2) \times (q_3, q_4) = (q_1q_3 - q_4\overline{q_2}, \overline{q_1}q_4 + q_3q_2).$$

Montrons cette dernière égalité. Soient o_1 et o_2 des octonions, respectivement identifiés aux couples de quaternions (q_1, q_2) et (q_3, q_4).

$$o_1 \times o_2 = (q_1 + lq_2) \times (q_3 + lq_4) = q_1q_3 + q_1(lq_4) + (lq_2)q_3 + (lq_2)(lq_4).$$

Ainsi, il nous reste à montrer que

$$(lq_2)q_3 = l(q_3q_2), \quad q_1(lq_4) = l(\overline{q_1}q_4) \quad \text{et que } (lq_2)(lq_4) = -q_4\overline{q_2}.$$

Les propriétés qui suivent, ainsi que leurs preuves, sont inspirées de celles présentées par John Franck Adams au chapitre 15 de *Lectures on exceptional Lie groups* [1].

Propriété 6

$$\forall a, b \in \mathbb{H}, l(ab) = (lb)a.$$

Démonstration. Comme précédemment, il suffit de montrer le résultat pour les éléments d'une base de $\mathbb{H}$. Si $a = 1$ ou $b = 1$, le résultat est immédiat. Soient $a, b \in \{i, j, k\}$. Montrer que

$$l(ab) = (lb)a$$

revient à montrer que

$$l(ab) - (lb)a = 0,$$

soit que

$$l(ab) + a(lb) = 0.$$

Ce résultat a été prouvé dans la démonstration de la propriété d'alternativité (2). □

En appliquant cette propriété à $a = q_3$ et $b = q_2$, on a bien que

$$(lq_2)q_3 = l(q_3q_2).$$

Propriété 7

$$\forall a, b \in \mathbb{H}, a(lb) = l(\bar{a}b).$$

Démonstration. Comme précédemment, il suffit de montrer le résultat pour les éléments d'une base de $\mathbb{H}$. Si $a = 1$, le résultat est immédiat. Soient $a \in \{i, j, k\}$ et $b \in \{1, i, j, k\}$. On obtient :

$$a(lb) = -(lb)a = (lb)\bar{a} = l(\bar{a}b), \text{ d'après la propriété 6.}$$

□

Ainsi, on obtient que

$$q_1(lq_4) = l(\overline{q_1}q_4).$$

Propriété 8

$$\forall a, b \in \mathbb{H}, (la)(lb) = -b\bar{a}.$$

Démonstration. Comme précédemment, montrer le résultat pour les éléments d'un base de $\mathbb{H}$ suffit. Si $a = 1$ ou $b = 1$, l'égalité est immédiate. Soient $a, b \in \{i, j, k\}$. Commençons par montrer que $la = (b\bar{a})(lb)$. On a :

$$\begin{array}{rcll} (b\bar{a})(lb) & = & l((\overline{b\bar{a}})b) & \text{par la propriété 7} \\ & = & l((a\bar{b})b) & \\ & = & l((-ab)b) & \\ & = & l(-a(bb)) & \text{car le corps } \mathbb{H} \text{ est associatif} \\ & = & la. & \end{array}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{array}{rcll} (la)(lb) & = & ((b\bar{a})(lb))(lb) & \text{d'après le calcul précédent} \\ & = & (b\bar{a})((lb)(lb)) & \text{par la propriété d'alternativité} \\ & = & -b\bar{a}. & \end{array}$$

□

En combinant les résultats obtenus précédemment, on trouve donc que

$$o_1 \times o_2 = q_1q_3 + lq_4\overline{q_1} + lq_2q_3 - q_4\overline{q_2},$$

ce qui est bien ce qu'on voulait.

Remarque. Le conjugué d'un octonion est donc défini par

$$\overline{(q_1, q_2)} = (\overline{q_1}, -q_2).$$

On obtient donc que $\overline{o_1 o_2} = \overline{o_2}\,\overline{o_1}$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \overline{o_1 o_2} &= \overline{(q_1 q_3 - q_4 \overline{q_2}, \overline{q_1} q_4 + q_3 q_2)} &&= (\overline{q_1 q_3} - \overline{q_4 \overline{q_2}}, -\overline{q_1} q_4 - q_3 q_2) \\ &= (\overline{q_3}\,\overline{q_1} - q_2 \overline{q_4}, -\overline{q_1} q_4 - q_3 q_2) &&= \overline{o_2}\,\overline{o_1}. \end{aligned}$$

Nous venons de voir que plus la dimension d'une algèbre à division normée est élevée, plus on perd de propriétés. La plus petite est $\mathbb{R}$, qui est totalement ordonnée. Vient ensuite $\mathbb{C}$, qui perd l'ordre. Nous avons montré que $\mathbb{H}$ n'est pas commutative, et qu'enfin $\mathbb{O}$ perd en plus l'associativité. Il est impossible de créer une algèbre à division normée de dimension 2^4, car alors c'est la propriété d'être une algèbre à division même qui est perdue [2, p. 1, p. 10].

À présent que nous avons défini les octonions à partir des quaternions, eux-mêmes dérivés des complexes par la construction de Cayley-Disckson, nous allons pouvoir utiliser cette algèbre de dimension huit pour étudier le groupe de Lie exceptionnel G_2.

1.4. Le groupe de Lie G_2

À peu près à la même époque où J. T. Graves et A. Cayley créent les octonions, le mathématicien norvégien Sophus Lie (1842 - 1899) s'intéresse à la théorie de Galois et se penche sur les groupes de transformation. En parallèle, il étudie la géométrie différentielle, dans laquelle il introduit la notion d'invariant, alors en plein essor. Cela le conduit à développer la notion de groupe de Lie, afin de représenter les symétries des équations différentielles, par analogie avec les groupes de Galois qui représentent les symétries des équations algébriques. Ces groupes particuliers contiennent des éléments qui peuvent être multipliés entre eux et dont on peut prendre l'inverse, et dont le produit de ces opérations est différentiable. Ainsi, un groupe de Lie est à la fois un groupe et une variété différentiable [3, pp. 307-326].

Les mathématiciens É. Cartan et W. Killing poursuivirent l'œuvre de S. Lie et tentèrent de déterminer toutes les algèbres de Lie. Leurs travaux aboutirent à la classification des algèbres de Lie simples, divisées en deux catégories : classiques et exceptionnelles. Ensuite, ils cherchèrent à associer ces algèbres, des structures abstraites, à des groupes de transformation. É. Cartan parvint ainsi à lister tous les groupes de Lie classiques. Pour les groupes de Lie exceptionnels, la tâche fut plus ardue. Finalement, en 1914, É. Cartan remarqua que le groupe de Lie réel compact G_2 (associé à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_2$) peut être décrit comme l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{O}$, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires inversibles définies sur les octonions qui commutent pour la multiplication [4, 7].

Définition 4

L'application $g \in GL(\mathbb{O})$ est un ***automorphisme de*** $\mathbb{O}$ *si et seulement si*

$$\forall x, y \in \mathbb{O}, g(xy) = g(x)g(y).$$

L'ensemble $Aut(\mathbb{O})$ forme un groupe.

Il existe d'autres façons de décrire le groupe G_2, mais nous faisons le choix d'adopter le point de vue d'É. Cartan, et nous posons

$$G_2 := Aut(\mathbb{O}).$$

Étudions à présent quelques conséquences de cette définition.

Propriété 9

Le groupe G_2 est un groupe de Lie.

Démonstration. D'après la définition 4, G_2 c'est un sous-groupe de $GL_8(\mathbb{R})$, qui est un groupe de Lie car c'est à la fois un groupe et un ouvert de $\mathbb{R}^{64}$. Mais G_2 est aussi une sous-variété de $GL_8(\mathbb{R})$. Pour voir cela, nous allons utiliser le théorème de Cartan.

Théorème 10 – Théorème de Cartan (admis) [9, p. 64]

Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $GL_n(\mathbb{R})$.

Montrons que G_2 est fermé dans $GL_8(\mathbb{R})$.
Soient $x, y \in \mathcal{B} = \{1, i, j, k, l, li, lj, lk\}$, définissons la fonction $f_{x,y}$ comme suit :

$$\begin{array}{rccc} f_{x,y}: & GL_8(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}^{64} & \longrightarrow & \mathbb{R}^8 \\ & g & \longmapsto & g(xy) - g(x)g(y). \end{array}$$

Cette fonction est continue, car polynomiale. Or le singleton $\{0_{\mathbb{R}^8}\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^8$, donc $f_{x,y}^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^8}\})$ est fermé dans $GL_8(\mathbb{R})$. On a que

$$f_{x,y}^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^8}\}) = \{g \in GL_8(\mathbb{R}), g(xy) = g(x)g(y)\},$$

donc on obtient que

$$G_2 = \bigcap_{x,y \in \mathcal{B}} f_{x,y}^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^8}\}),$$

et comme une intersection de fermés est fermée, G_2 est fermé dans $GL_8(\mathbb{R})$. Donc d'après le théorème 10, G_2 est une sous-variété de $GL_8(\mathbb{R})$. Ainsi, G_2 est bien un groupe de Lie. $\square$

Propriété 11 – [7, p. 4]

$$\forall g \in G_2, g(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x.$$

C'est-à-dire que tout automorphisme des octonions envoie un scalaire sur lui-même et un imaginaire pur sur un imaginaire pur. Ainsi, tout automorphisme des octonions est entièrement déterminé par son action sur l'hyperplan engendré par des octonions imaginaires purs, qui est de dimension sept.

Démonstration. Soit $g \in G_2$. C'est un automorphisme des octonions, donc

$$g(1) = g(1 \times 1) = g(1)^2, \text{ d'où } g(1) = 1.$$

On obtient donc que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x.$$

Soit $x \in \mathcal{B}\backslash\{1\}$. Soit s la partie réelle de $g(x)$ et t sa partie imaginaire. On peut alors décomposer $g(x)^2$ de deux façons :

$$g(x)^2 = g(x^2) = g(-1) = -1 \in \mathbb{R},$$
$$g(x)^2 = (s+t)^2 = (s^2+t^2) + 2st.$$

Or $t^2 = -t\bar{t} = -\|t\| \in \mathbb{R}$, donc (s^2+t^2) est la partie réelle de $g(x)^2$, tandis que $2st$ est sa partie imaginaire. Ainsi, $st = 0$, d'où $s = 0$ ou bien $t = 0$. Si $t = 0$, $g(x) = s = g(s)$, ce qui est impossible car cela contredit l'injectivité de g. Donc $s = 0$ et $g(x) \in \mathcal{V}$. $\square$

Avoir défini les nombres complexes comme couples de nombre réels, puis les quaternions comme couples de complexes, et enfin les octonions comme couples de quaternions, d'après la construction de Cayley-Dickson, nous a permis de définir le groupe de Lie G_2 comme le groupe des automorphismes des octonions. De plus, l'interprétation géométrique des triplets basiques va nous guider dans l'étude de l'action de G_2 sur la 6-sphère.

2. Action de G_2 sur $\mathbb{S}^6$

À présent que nous avons donné une définition du groupe de Lie G_2, nous allons pouvoir étudier son action sur $\mathbb{S}^6$, ce qui va permettre d'affiner notre compréhension de ce groupe. Pour cela, nous allons commencer par étudier l'action du groupe spécial orthogonal de dimension sept sur $\mathbb{S}^6$, avant d'établir un lien entre ce groupe et G_2.

2.1. Action de $SO(7)$ sur $\mathbb{S}^6$

Le groupe $SO(2)$ agit transitivement sur $\mathbb{S}^1$, le cercle dans $\mathbb{R}^2$. En fait, ces deux groupes sont même isomorphes. En effet, si on choisit un point du plan et qu'on le fait tourner par rapport au centre du repère en gardant une distance constante par rapport à l'origine, on obtient un cercle.

De manière semblable, le groupe des rotations de l'espace $SO(3)$ agit transitivement sur $\mathbb{S}^2$, la sphère de $\mathbb{R}^3$. Cependant, ces deux groupes ne sont pas isomorphes. En effet, $SO(3)$ est « trop grand » par rapport à la sphère : plusieurs rotations différentes peuvent déplacer un point au même endroit. On quotiente donc par le stabilisateur pour cette action. Le sous-groupe de $SO(3)$ qui laisse fixe un point de la sphère est isomorphe à $SO(2)$, le groupe des rotations du plan, qui comme nous venons de le voir est isomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$. Ainsi, $SO(3)/\mathbb{S}^1$ est isomorphe à la sphère $\mathbb{S}^3$.

Ces observations nous conduisent à conjecturer que $SO(7)$ agit transitivement sur $\mathbb{S}^6$, et que $SO(7)/SO(6)$ est isomorphe à $\mathbb{S}^6$.

Propriété 12

(i) *$SO(n)$ agit sur $\mathbb{S}^{n-1}$;*
(ii) *L'action de $SO(n)$ est transitive ;*
(iii) *Le stabilisateur de chaque élément de $\mathbb{S}^{n-1}$ pour cette action est isomorphe à $SO(n-1)$.*

Démonstration.

(i) Il s'agit de l'action naturelle de $SO(n)$ sur $\mathbb{R}^n$, restreinte à $\mathbb{S}^{n-1}$. Ainsi, soient $M \in SO(n)$ et $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}, x_i \in \mathbb{R}$; il suffit de montrer que $M \cdot x$ appartient bien à $\mathbb{S}^{n-1}$.
Comme $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, par définition

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1.$$

De plus, M est une matrice de $SO(n)$; c'est donc en particulier une matrice orthogonale. Or la multiplication d'une matrice orthogonale par un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est une isométrie, la norme est conservée. Donc M est telle que

$$\|M \cdot x\| = \|x\| = 1,$$

d'où $M \cdot x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Ainsi, $SO(n)$ agit bien sur $\mathbb{S}^{n-1}$.

(ii) Montrons que l'action de $SO(n)$ sur $\mathbb{S}^{n-1}$ est transitive, c'est-à-dire qu'il existe un point de la (n-1)-sphère tel que l'orbite de ce point pour l'action soit la sphère tout entière. Considérons le point $e_1 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{S}^{n-1}$. Quel que soit le point x sur la (n-1)-sphère, x est de norme 1 par définition. On peut donc compléter ce vecteur en une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. On obtient une matrice orthogonale M dont la première colonne est x. Quitte à remplacer la dernière colonne de M par son opposé, $M \in SO(n)$. Ainsi, $M \cdot e_1 = x$. D'ou $\mathrm{Orb}(e_1) = \mathbb{S}^{n-1}$.

(iii) Soit H le groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

avec $A \in SO(n-1)$. Le groupe H est isomorphe à $SO(n-1)$. Montrons que H est le stabilisateur de e_1.
Si $M \in H$, $M \cdot e_1 = e_1$, donc $M \in \mathrm{Stab}(e_1)$, d'où $H \subset \mathrm{Stab}(e_1)$.
Soit $M \in \mathrm{Stab}(e_1)$. Alors $M \cdot e_1 = e_1$.
Soient $(m_{i,j})$ les coefficients de M, $i, j \in [\![1, n]\!]$. On obtient

$$M \cdot e_1 = \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}$$

On a alors

$$m_{1,1} = 1 \quad \text{et} \quad m_{2,1} = m_{3,1} = \cdots = m_{n,1} = 0.$$

De plus, M est une matrice orthogonale, donc $MM^T = I_n$. Ainsi, le produit de la première ligne de M par la première colonne de sa transposée doit valoir 1. On obtient

$$\sum_{j=1}^{n} m_{1,j}^2 = 1.$$

Puisque $m_{1,1} = 1$, on a nécessairement que

$$m_{1,2} = m_{1,3} = \cdots = m_{1,n} = 0.$$

Ainsi, M appartient bien à H, d'où $\mathrm{Stab}(e_1) \subset H$, et donc $H = \mathrm{Stab}(e_1)$. Ainsi, le stabilisateur de e_1 est isomorphe à $SO(n-1)$. Puisque l'action est transitive, on conclut que le stabilisateur pour tout point de $\mathbb{S}^{n-1}$ est isomorphe à $SO(n-1)$. □

On a donc montré que $SO(n)/SO(n-1)$ est isomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}$, et donc qu'en particulier $SO(7)/SO(6)$ est isomorphe à $\mathbb{S}^6$. Ce résultat va nous permettre d'étudier l'action de G_2 sur $\mathbb{S}^6$.

Propriété 13

Le groupe G_2 est un sous-groupe du groupe orthogonal $O(7)$.

Démonstration. Les éléments de G_2 conservent le produit scalaire. En effet, soient $x, y \in \mathbb{O}$, $g \in G_2$. On obtient :

$$\begin{array}{rcll}
\langle g(x), g(y)\rangle & = & \mathrm{Re}(g(x)\overline{g(y)}) & \\
& = & \pm\mathrm{Re}(g(x)g(y)) & \text{selon si } y \in \mathcal{V} \text{ ou } \mathbb{R}, \\
& = & \pm\frac{1}{2}(g(x)g(y) + g(y)g(x)) & \\
& = & \pm\frac{1}{2}(g(xy) + g(yx)) & \text{car } g \in G_2, \\
& = & g(\pm\frac{1}{2}(xy + yx)) & \\
& = & g(\frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})) & \\
& = & g(\mathrm{Re}(x\bar{y})) & \\
& = & \mathrm{Re}(x\bar{y}) & \text{car } \mathrm{Re}(x\bar{y}) \in \mathbb{R}, \\
& = & \langle x, y\rangle. &
\end{array}$$

Donc G_2 est un sous-groupe de $O(\mathbb{O}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, qui est isomorphe à $O(8)$.

Ainsi, G_2 est un sous-groupe de $O(8)$. Or, d'après la proposition 11, G_2 est entièrement déterminé par son action sur $\mathcal{V}$, l'hyperplan engendré par les octonions imaginaires purs, qui est de dimension sept. Donc $G_2 \subset \mathrm{Stab}(1)$, pour l'action naturelle de G_2 sur $\mathbb{O}$. Ainsi, les éléments de G_2 sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Avec $M \in O(7)$. Nous pouvons considérer G_2 comme un sous-groupe de $O(7)$. $\square$

Nous admettons que G_2 est en fait un sous-groupe de $SO(7)$. Comme ce groupe agit sur $\mathbb{S}^6$, le morphisme inclusion permet de définir une action de G_2 sur $\mathbb{S}^6$.

2.2. Action de G_2 sur $\mathbb{S}^6$

Avant d'étudier l'action de G_2 sur $\mathbb{S}^6$, nous allons montrer que G_2 est compact, puis nous allons étudier l'action de G_2 sur l'ensemble des triplets basiques, afin de montrer que G_2 est connexe et de dimension quatorze.

Propriété 14

Le groupe G_2 est compact.

Démonstration. Dans la preuve de la propriété 9, nous avons montré que G_2 est un fermé de $\mathbb{R}^{64}$. De plus, d'après la propriété 13, G_2 est un sous-groupe de $O(8)$, qui est borné. Donc G_2 est un fermé, borné de $\mathbb{R}^{64}$, c'est donc un groupe compact. $\square$

Pour tout triplet basique donné, il existe une unique façon de définir les quatre éléments de la base de carré égal à -1 restants telle qu'on obtienne le diagramme de Fano. C'est-à-dire qu'à tout triplet basique (x, y, z) donné, on peut associer la base de $\mathbb{O}$ $\{1, x, y, xy, z, zx, zy, z(xy)\}$ [2, p. 35].

Propriété 15 – [2, 7, p. 35, pp. 11-12]

Soit $\mathbb{T}$ l'ensemble des triplets basiques. Le groupe G_2 agit simplement transitivement sur $\mathbb{T}$.

Démonstration. Soit le triplet basique (i, j, l), et soit $g \in G_2$. Associons à g le triplet (x, y, z), image de (i, j, l) par g. Montrons qu'il s'agit encore d'un triplet basique.

$$x^2 = (g(i))^2 = g(i^2) = g(-1) = -1,$$

d'ou $x \in \mathbb{S}^6$. De même, $y, z \in \mathbb{S}^6$. De plus,

$$\begin{array}{rclcl} \langle x, y\rangle & = & \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) & = & -\frac{1}{2}(xy + yx) \\ & = & -\frac{1}{2}((g(i)g(j) + g(j)g(i)) & = & -\frac{1}{2}(g(ij + ji)) \quad = \quad 0. \end{array}$$

De même, on montre que les trois vecteurs x, y, z sont deux à deux orthogonaux et que xy et z sont orthogonaux. Ainsi, (x, y, z) est bien un triplet basique. À tout automorphisme g de G_2 on peut donc associer un triplet basique.
Inversement, soit le triplet basique (i, j, l), et un triplet basique (x, y, z) quelconque. Soit g l'application linéaire définie par

$$\begin{cases} g(i) = x, \\ g(j) = y, \\ g(l) = z, \\ g(ij) = g(i)g(j),\ g(il) = g(i)g(l),\ g(jl) = g(j)g(l), \\ g((ij)l) = (xy)z. \end{cases}$$

Cette application est un automorphisme de G_2. En effet, c'est une application de $\mathbb{O}$ dans $\mathbb{O}$. De plus, g est bien un morphisme, car

$$\forall a, b \in \mathcal{B}\backslash\{1\}, g(ab) = g(a)g(b),$$

d'après la définition de g ci-dessus. Cela est dû au fait que d'après le diagramme de Fano, le produit de deux éléments de $\mathcal{B}\backslash\{1\}$ peut s'exprimer comme le produit d'éléments de {i, j, l}. Par exemple,

$$(li)(lk) = j, \qquad (lj)i = lk = l(ij) = -(ij)l, \qquad (lj)j = -l.$$

Enfin, ce morphisme est bijectif, car les triplets (i, j, l) et (x, y, z) génèrent tous deux $\mathbb{O}$. Ainsi, à tout triplet basique on peut associer un automorphisme de $\mathbb{O}$. On a donc montré que G_2 agit simplement et transitivement sur $\mathbb{T}$. □

Corollaire 16

L'action de G_2 sur $\mathbb{S}^6$ est transitive.

Démonstration. Soit $i \in \mathbb{S}^6$. Comme G_2 est un sous-groupe de $SO(7)$, un élément de G_2 envoie i sur un élément de $\mathbb{S}^6$; donc l'orbite de i pour l'action de G_2 est incluse dans $\mathbb{S}^6$.
Considérons le triplet basique (i, j, l), et soit $g \in G_2$; d'après la propriété 15, on a alors que $(g(i), g(j), g(l))$ est un triplet basique. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{S}^6$, on peut définir un triplet basique en choisissant deux

autres vecteurs qui ont les bonnes propriétés, y et z, et il existe $g \in G_2$ tel que $(x, y, z) = (g(i), g(y), g(z))$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{S}^6$, il existe $g \in G_2$ tel que $x = g(i)$, donc l'action de G_2 sur $\mathbb{S}^6$ est bien transitive. $\square$

Propriété 17 – [9, p. 28]

Le groupe G_2 est homéomorphe à $\mathbb{T}$.

Démonstration. Soit (i, j, l) un triplet basique, alors on a la bijection naturelle

$$\begin{array}{rccc} \phi : & G_2/\mathrm{Stab}((i,j,l)) & \longrightarrow & \mathrm{Orb}((i,j,l)) \\ & \bar{g} & \longmapsto & g \cdot (i,j,l) \end{array}$$

Or d'après la propriété 15, l'action de G_2 sur $\mathbb{T}$ est simplement transitive, donc $G_2/\mathrm{Stab}((i,j,l))$ est isomorphe à G_2 et $\mathrm{Orb}((i,j,l))$ est isomorphe à $\mathbb{T}$, d'où $\phi : G_2 \longrightarrow \mathbb{T}$ est bijective. De plus, ϕ est continue par définition [9, p. 29]. Introduisons un lemme :

Lemme 1. [9, p. 29] *Soit X un espace compact, Y un espace séparé et $\Psi : X \longrightarrow Y$ une bijection continue ; alors Ψ est un homéomorphisme.*

D'après la propriété 14, le groupe G_2 est compact. De plus, $\mathbb{T}$ est séparé car $(\mathbb{R}^7)^3$ l'est. Ainsi, ϕ est un homéomorphisme, donc G_2 est homéomorphe à $\mathbb{T}$. $\square$

Afin de montrer que G_2 est connexe, introduisons une définition et des propriétés préliminaires.

Définition 5

*Un **espace fibré** est une structure (E, B, p, F), où E, B et F sont des espaces topologiques séparés et où $p : E \longrightarrow B$ est une application continue et surjective telle que*

$$\forall b \in B, \exists U \subset B \text{ ouvert contenant } b, \exists \phi_U : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F,$$

telle que ϕ_U soit un homéomorphisme.
Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "p"'] & U \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Où π_1 est la projection canonique sur la première coordonnée.
*L'espace E est appelé **espace total**, B **epace de base**, F la **fibre** et p la **projection**.*

Propriété 18 – (Admise) [8, p. 5]

Avec les mêmes notations que dans la définition 5, si B, E et p sont différentiables, alors $\dim(E) = \dim(B) + \dim(F)$.

Propriété 19

Avec les mêmes notations que dans la définition 5, on a que p est une application ouverte.

Démonstration. Soit O, un ouvert de E. On cherche à montrer que $p(O)$ est un ouvert de B.
Pour tout $b \in p(O)$, il existe un ouvert U_b de B qui contient b. Ainsi, $p^{-1}(U_b)$ est un ouvert de E car p est continue, d'où $p^{-1}(U_b) \cap O$ est un ouvert.
Or on a que $p_{|p^{-1}(U_b)}$ est une application ouverte, car d'après le diagramme précédent,

$$p_{|p^{-1}(U_b)} = \pi_1 \circ \phi_{U_b},$$

et π_1 et ϕ_{U_b} sont respectivement une projection canonique et un homéomorphisme, donc ouvertes. Donc $p_{|p^{-1}(U_b)}$ est ouverte comme composition d'applications ouvertes.
Enfin, remarquons que

$$p(O) = \bigcup_{b \in p(O)} p_{|p^{-1}(U_b)}(O),$$

Donc $p(O)$ est une union finie d'ouverts, donc ouvert. Ainsi, on a bien que p est une application ouverte. $\square$

Grâce à ce résultat préliminaire, nous allons pouvoir montrer une importante propriété de G_2.

Propriété 20 – [7, pp. 12-13]

Le groupe G_2 est connexe.

Démonstration. Pour montrer le résultat, nous allons d'abord démontrer la compacité et la connexité de $\mathbb{S}^6$, ainsi qu'un résultat sur la connexité des espaces fibrés.

Lemme 2. *La n-sphère $\mathbb{S}^n$ est compacte.*

Démonstration. Par définition, $\mathbb{S}^n$ est incluse dans $\mathbb{R}^{n+1}$, donc $\mathbb{S}^n$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
Par définition, $\mathbb{S}^n$ est bornée. De plus, soit l'application

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \cdots, x_{n+1}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2. \end{array}$$

Cette application étant une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^{n+1}$, elle est continue. Remarquons que $\mathbb{S}^n = f^{-1}(\{1\})$. Or tout singleton est fermé dans $\mathbb{R}$, donc comme f est continue, $\mathbb{S}^n$ est fermée dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
Ainsi, la sphère $\mathbb{S}^n$ est fermée et bornée dans $\mathbb{R}^{n+1}$; elle est donc compacte. □

Lemme 3. *(Admis)* [9, p. 29] *Soit H un sous-groupe fermé du groupe G, et G/H muni de la topologie quotient. Alors la surjection canonique $s : G \longrightarrow G/H$ est une application ouverte et continue.*

Lemme 4. *La sphère $\mathbb{S}^n$ est connexe, pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration. Nous admettons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe $SO(n)$ est connexe et compact. Soit la projection canonique

$$\pi : \ SO(n+1) \ \longrightarrow \ SO(n+1)/SO(n),$$

elle est continue par définition de la topologie quotient sur $SO(n+1)/SO(n)$. Or toute image continue d'un connexe est connexe, donc $SO(n+1)/SO(n)$ est connexe. De plus, d'après la propriété 12, $SO(n)$ est fermé dans $SO(n+1)$, donc d'après le lemme 3, π est une application surjective et ouverte, d'où $SO(n+1)/SO(n)$ est compact. De plus, d'après le lemme 2, $\mathbb{S}^n$ est un ensemble compact donc séparé. Ainsi, d'après le lemme 1, l'application $\phi : SO(n+1)/SO(n) \longrightarrow \mathbb{S}^n$ est un homéomorphisme, donc $\mathbb{S}^n$ est connexe. □

Lemme 5. [10, p. 81] *L'espace total E d'un fibré de base B de fibre F connexes est connexe.*

Démonstration. Soit un espace fibré (E, B, p, F). Supposons B et F connexes, et montrons par l'absurde qu'alors E est connexe.
Supposons E non-connexe. Alors

$$\exists (U, V) \in (E \backslash \{\emptyset\})^2 \text{ ouverts }, U \cap V = \emptyset, E = U \cup V.$$

Puisque $\forall b \in B$, $p^{-1}(\{b\})$ est homéomorphe à $\{b\} \times F$ et que F est connexe, $p^{-1}(\{b\})$ est connexe. Donc $p^{-1}(\{b\})$ doit être entièrement contenu dans U ou V. Alors $p(U) \cap p(V) = \emptyset$. Or p est une application continue, surjective et ouverte (d'après la propriété 19), donc $p(U)$ et $p(V)$ sont ouverts, et $B = p(U) \cup p(V)$. Puisque U et V sont non-vides,

$p(U)$ et $p(V)$ sont également non-vides. Ainsi, B est non-connexe, ce qui est absurde.
Ceci montre donc que si B et F sont connexes, alors nécessairement E l'est aussi. $\square$

À l'aide de ces lemmes préparatoires, montrons que l'ensemble des triplets basiques $\mathbb{T}$ est connexe. Comme d'après la propriété 17, G_2 est homéomorphe à $\mathbb{T}$, on en déduira la connexité de G_2.
Soit $E := \{(x,y) \in (\mathbb{S}^6)^2, \langle x,y\rangle = 0\}$ et $p : E \longrightarrow \mathbb{S}^6$ la projection sur la première coordonnée. Montrons qu'on a un espace fibré. Soit $i = (1,0,\cdots,0) \in \mathbb{S}^6$ et $\epsilon > 0$, alors il existe

$$U =]1-\epsilon, 1+\epsilon[\times]-\epsilon,+\epsilon[\times\cdots\times]-\epsilon,+\epsilon[$$

un ouvert de $\mathbb{S}^6$ contenant i. On a que

$$p^{-1}(U) = \{(x,y) \in U \times \mathbb{S}^6, \langle x,y\rangle = 0\},$$

et y est de la forme $(y_1,\cdots,y_7)$, avec $y_n \in \mathbb{R}$ tel que $\|y_i\| = 1$. Soit l'application ϕ_U définie par

$$\begin{array}{rccl} \phi_U : & p^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times \mathbb{S}^5 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x,\tilde{y}), \tilde{y} = \frac{(y_2,\cdots,y_7)}{\|(y_2,\cdots,y_7)\|}. \end{array}$$

Cette application est continue et bijective. En effet, soient $y,z \in \mathbb{S}^6$ tels que $y \neq z$. Supposons que $\phi_U(x,y) = \phi_U(x,z)$, alors $\tilde{y} = \tilde{z}$, d'où $(y_2,\cdots,y_7) = (z_2,\cdots,z_7)$. Or y et z sont tels que $\langle x,y\rangle = 0 = \langle x,z\rangle$. Par définition du produit scalaire, on obtient que

$$\sum_{n=1}^{7} x_n y_n = \sum_{n=1}^{7} x_n z_n,$$

d'où $x_1 y_1 = x_1 z_1$. Or x_1 est non nul, car $x_1 \in]1-\epsilon, 1+\epsilon[$, ce qui implique que $y_1 = z_1$, et donc $y = z$, ce qui montre l'injectivité de ϕ_U. De plus, ϕ_U est surjective car pour $\tilde{y} \in \mathbb{S}^5$, on peut définir

$$y_1 = -\frac{\displaystyle\sum_{n=2}^{7} y_n x_n}{x_1},$$

ce qui permet de définir $y \in \mathbb{S}^6$, et donc ϕ_U est surjective.
Ainsi, ϕ_U est bijective, et de plus elle est continue, de réciproque continue, donc ϕ_U est un homéomorphisme, donc le diagramme commute. On peut donc considérer qu'on travaille avec un espace fibré $(E,\mathbb{S}^6,p,\mathbb{S}^5)$. D'après le lemme 4, $\mathbb{S}^6$ et $\mathbb{S}^5$ sont connexes. Donc d'après

le lemme 5, l'espace total E est connexe.
Soit $\mathbb{T}$ l'ensemble des triplets basiques défini par

$$\mathbb{T} = \{(x,y,z) \in (\mathbb{S}^6)^3 | (x,y) \in E, \langle x,z\rangle = 0, \langle y,z\rangle = 0, \langle xy,z\rangle = 0\}$$

et $p : \mathbb{T} \longrightarrow E$ la projection sur les deux premières coordonnées. Pour montrer que p est un fibré, introduisons un lemme.

Lemme 6. *(Admis)* [9, p. 29] *Soit G un groupe topologique localement compact et dénombrable à l'infini, opérant continûment et transitivement sur un espace E localement compact. Alors la bijection $\phi : G/Stab(x) \longrightarrow E (x \in E)$ est un homéomorphisme.*

D'après la propriété 14, G_2 est compact, donc localement compact et dénombrable à l'infini. De plus, d'après la propriété 15, l'action de G_2 sur $\mathbb{T}$ est transitive, donc l'action de G_2 sur E l'est aussi (la preuve est semblable à celle du corollaire 16, il suffit d'« oublier » le troisième élément du triplet basique). Ensuite, G_2 agit continûment sur E. En effet, considérons l'action naturelle de $GL_7(\mathbb{R})$ sur $(\mathbb{R}^7)^2$. Soit l'application

$$\begin{array}{llcl} \phi : & M_7(\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7) & \longmapsto & \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \\ & (M,(x,y)) & \longmapsto & (Mx, My), \end{array}$$

elle est continue car bilinéaire. On obtient donc que $\phi_{|G_2 \times E}$ est continue en tant que restriction d'application continue. Or d'après la propriété 13, G_2 est inclus dans $O(7)$, d'où $(Mx, My) \subset E$. Donc l'action de G_2 sur E est continue. Enfin, E est compact, car c'est un ensemble fermé et borné de $(\mathbb{R}^7)^2$. Il est borné par inclusion dans $(\mathbb{S}^6)^2$, et fermé car $E = f^{-1}(\{0\})$, avec f une fonction continue définie par

$$\begin{array}{llcl} f : & (\mathbb{S}^6)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \langle x,y\rangle. \end{array}$$

Ainsi, d'après le lemme, $\phi : G_2/\mathrm{Stab}(i,j) \longrightarrow E$ est un homéomorphisme. On obtient donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\psi"'] & E \arrow[d, "\phi"] \\ G_2 \arrow[r, "\pi"'] & G_2/\mathrm{Stab}(i,j) \end{tikzcd}$$

Avec π la projection canonique. Montrons que $(G_2, G_2/\mathrm{Stab}(i,j), \pi, \pi^{-1}(\bar{g}))$ est un espace fibré.

Lemme 7. *(Admis)* [9, pp. 156-157] *Soit G un groupe linéaire, et H un sous-groupe fermé de G, alors $p : G \longrightarrow G/H$ est un fibré de fibre H.*

Le groupe G_2 est un groupe linéaire, car d'après la propriété 9, c'est un sous-groupe fermé de $GL_8(\mathbb{R})$. De plus $\mathrm{Stab}(i,j)$ est fermé dans G_2, car c'est l'image réciproque du fermé $\{(i,j)\}$ par la fonction continue qui à g associe $g(ij)$. Ainsi, $(G_2, G_2/\mathrm{Stab}(i,j), \pi, \pi^{-1}(\bar{g}))$ est un espace fibré. Donc d'après le diagramme, $(\mathbb{T}, E, p, p^{-1}(i,j))$ est un espace fibré. Or

$$p^{-1}(i,j) = \{z \in \mathbb{S}^6 | \langle i, z\rangle = 0, \langle j, z\rangle = 0 \text{ et } \langle k, z\rangle = 0\}.$$

La première équation implique que z est orthogonal à un vecteur de $\mathbb{S}^6$, donc z est un vecteur de $\mathbb{S}^5$. Le vecteur j étant orthogonal au vecteur i, il est lui-même un vecteur de $\mathbb{S}^5$. Comme z est orthogonal à j, alors z est un vecteur de $\mathbb{S}^4$. Finalement, la famille $\{i,j,k\}$ étant libre, la dernière équation nous indique que z est un vecteur de $\mathbb{S}^3$. On peut donc considérer qu'on travaille avec un espace fibré $(\mathbb{T}, E, p, \mathbb{S}^3)$. D'après le lemme 4, $\mathbb{S}^3$ est connexe, et d'après ce qui précède E l'est aussi. Donc d'après le lemme 5, l'espace total $\mathbb{T}$ est connexe. Ainsi, puisque G_2 est homéomorphe à $\mathbb{T}$, G_2 est connexe. □

Corollaire 21

Le groupe de Lie G_2 est de dimension quatorze.

Démonstration. Les n-sphères sont différentiables. De plus, d'après la propriété 9, G_2 est différentiable car c'est une variété. En outre, $\mathrm{Stab}(i,j)$ est un sous-groupe de Lie en tant que sous-groupe fermé de G_2, donc différentiable. Ainsi $G_2/\mathrm{Stab}(i,j)$ est différentiable en tant que quotient de variétés. Nous admettons que G_2 est difféomorphe à $\mathbb{T}$, et que E est difféomorphe à $G_2/\mathrm{Stab}(i,j)$; donc $\mathbb{T}$ et E sont différentiables. D'après la propriété 18,

$$\dim(E) = \dim(\mathbb{S}^6) + \dim(\mathbb{S}^5) = 6 + 5 = 11$$

et

$$\dim(\mathbb{T}) = \dim(E) + \dim(\mathbb{S}^3) = 11 + 3 = 14,$$

d'où G_2 est de dimension quatorze. □

Maintenant que nous connaissons la dimension de G_2, nous allons pouvoir terminer d'étudier l'action de G_2 sur $\mathbb{S}^6$.

Propriété 22 – [6, pp. 30-31]

Le stabilisateur de chaque élément de $\mathbb{S}^6$ pour l'action de G_2 sur $\mathbb{S}^6$ est isomorphe à $SU(3)$.

Démonstration. Soit $i \in \mathbb{S}^6$, montrons que Stab(i) est inclus dans $SU(3)$. Remarquons tout d'abord que $SU(3) = SO(6) \cap GL_3(\mathbb{C})$. Comme G_2 est inclus dans $SO(7)$ et que $SO(7)$ agit sur $\mathbb{S}^6$, le stabilisateur que nous cherchons est inclus dans le stabilisateur pour l'action de $SO(7)$ sur $\mathbb{S}^6$, et d'après la propriété 13, il s'agit de $SO(6)$, donc Stab$(i) \subset SO(6)$.
Il nous reste à montrer que Stab(i) est inclus dans $GL_3(\mathbb{C})$. Pour cela, nous allons utiliser une structure complexe. Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel réel engendré par $\{j, k, l, li, lj, lk\}$ et soit

$$\begin{array}{rccc} J: & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & Y & \longmapsto & \mathrm{Im}(iY) \end{array}$$

Or $\mathrm{Im}(iY) = iY - \mathrm{Re}(iY) = iY + \langle i, Y\rangle$, donc $J(Y) = iY + \langle i, Y\rangle$.
Montrons que J est un automorphisme d'espace vectoriel réel tel que $J^2 = -\mathrm{Id}$. Soit $Y \in \mathcal{E}$, on a alors

$$\begin{array}{rclcl} J(Y) & = & iY + \langle i, Y\rangle & = & iY + \frac{1}{2}(i\overline{Y} + Y\bar{i}) \\ & = & iY + \frac{1}{2}(-iY - Yi) & = & iY + \frac{1}{2}(-iY + iY) \\ & = & iY, & & \\ J(Y)^2 & = & i(iY) = i^2Y = -Y. & & \end{array}$$

On a donc bien que J est une structure complexe. Ainsi, $\mathcal{E}$ muni de la structure J est un espace vectoriel complexe de dimension $\frac{6}{2} = 3$.

$$\begin{array}{rccc} \text{Soit } \sigma: & \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (U, V) & \longmapsto & \langle U, V\rangle - i\langle J(U), V\rangle \end{array}$$

Montrons que σ est une forme hermitienne définie positive.
Tout d'abord, montrons que $\sigma(U, U) = \|U\|$.

$$\begin{array}{rcl} \sigma(U, U) & = & \langle U, U\rangle - i\langle iU, U\rangle \\ & = & \langle U, U\rangle - i\frac{1}{2}((iU)\overline{U} + U\overline{(iU)}). \end{array}$$

Or on a que

$$\begin{array}{rcl} (iU)\overline{U} + U\overline{(iU)} & = & -(iU)U + U(\overline{U}\bar{i}) \\ & = & -i(UU) + U(Ui) \\ & = & -iU^2 + (UU)i \\ & = & -U^2i + U^2i \\ & = & 0. \end{array}$$

Ainsi, on a bien que $\sigma(U, U) = \|U\|$, ce qui est positif, et nul si et seulement si U l'est.

Nous avons déjà montré que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, et J est $\mathbb{R}$-linéaire ; donc σ est $\mathbb{R}$-linéaire. De plus, σ est $\mathbb{C}$-linéaire) gauche :

$$\begin{aligned}
\sigma(iU, V) &= \sigma(J(U), V) \\
&= \langle J(U), V\rangle - i\langle J^2(U), V\rangle \\
&= \langle J(U), V\rangle + i\langle U, V\rangle \\
&= i(\langle U, V\rangle - i\langle J(U), V\rangle) \\
&= i\sigma(U, V).
\end{aligned}$$

Enfin, montrons que $\overline{\sigma(U,V)} = \sigma(V,U)$.

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma(U,V)} &= \overline{\langle U, V\rangle} - \overline{i\langle J(U), V\rangle} \\
&= \langle U, V\rangle + i\langle J(U), V\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}(U\overline{V} + V\overline{U}) + i\tfrac{1}{2}((iU)\overline{V} + V\overline{(iU)}) \\
&= \tfrac{1}{2}(-UV - VU) + i\tfrac{1}{2}(-(iU)V - V(iU)) \\
&\ (\text{car } U, V \in \mathcal{V} \text{ et } iU \in \mathcal{V} \text{ puisque } U \in \mathcal{E}) \\
&= \tfrac{1}{2}(-VU - UV) + \tfrac{1}{2}(UV - (iV)(iU)) \\
&= \tfrac{1}{2}(V\overline{U} + U\overline{V}) - i\tfrac{1}{2}(i(UV) - i(iV)(iU)) \\
&= \langle V, U\rangle - i\tfrac{1}{2}(-U(iV) + (iV)i(iU)) \\
&= \langle V, U\rangle - i\tfrac{1}{2}(-UJ(V) - J(V)U) \\
&= \langle V, U\rangle - i\tfrac{1}{2}(U\overline{J(V)} + J(V)\overline{U}) \\
&= \langle V, U\rangle - i\langle J(V), U\rangle \\
&= \sigma(V, U).
\end{aligned}$$

Ainsi, σ est bien une forme hermitienne définie positive. Elle est invariante par le stabilisateur de i dans G_2. En effet, soient $g \in \text{Stab}(i)$ et $U, V \in \mathcal{E}$, on a :

$$\begin{aligned}
g(\sigma(U,V)) &= g(\langle U, V\rangle - i\langle J(U), V\rangle) \\
&= g(-\text{Re}(UV) + i\text{Re}(J(U)V)) \\
&= g(-\text{Re}(UV)) + g(i)g(\text{Re}(J(U)V)) \\
&= -\text{Re}(UV) + g(i)\text{Re}(J(U)V) \\
&\ (\text{par la propriété 11}) \\
&= -\text{Re}(UV) + i\text{Re}(J(U)V) \\
&\ (\text{car } g \in \text{Stab}(i)) \\
&= \sigma(U, V).
\end{aligned}$$

Si $g \in \text{Stab}(i)$, alors g est entièrement défini par sa restriction à $\mathcal{E}$. De plus, $\det(g_{|\mathcal{E}}) \neq 0$, donc $g \in GL(\mathcal{E}, \sigma)$. Ainsi, on a bien $\text{Stab}(i) \subset GL_3(\mathbb{C})$.

On a donc montré que $\text{Stab}(i) \subset SO(6) \cap GL_3(\mathbb{C}) = SU(3)$. De plus, $\text{Stab}(i)$ est un groupe de Lie en tant que sous-groupe fermé de G_2, car c'est l'image réciproque du fermé $\{i\}$ par la fonction continue qui à g associe $g(i)$. On peut donc calculer la dimension de $\mathrm{Stab}(i)$ en tant que variété : $\dim(\mathrm{Stab}(i)) = \dim(G_2) - \dim(\mathrm{Orb}(i))$, ce qui d'après le corollaire 21 est égal à $14-6=8$. Or le seul sous-groupe de Lie de $SU(3)$ de dimension huit est $SU(3)$. Montrons ceci. Nous admettons que $SU(3)$ est connexe. Or d'après ce qui précède, $\mathrm{Stab}(i)$ est fermé dans $SU(3)$, et non vide car il contient l'identité. De plus, $\mathrm{Stab}(i)$ est ouvert dans $SU(3)$. En effet, $\dim(\mathrm{Stab}(i)) = \dim(SU(3))$, donc leurs espaces tangents en l'identité ont également même dimension, d'où leurs algèbres de Lie sont les mêmes. En outre, l'exponentielle entre l'algèbre de Lie et le groupe de Lie est une application ouverte, donc comme l'algèbre de Lie de $SU(3)$ est en particulier ouverte, $\mathrm{Stab}(i)$ est ouvert. C'est un donc un ouvert, fermé, non-vide de $SU(3)$, qui est connexe, donc $\mathrm{Stab}(i) = SU(3)$. □

Nous avons donc montré que $G_2/SU(3)$ est isomorphe à $\mathbb{S}^6$.

Ainsi, l'étude des triplets basiques nous a permis de montrer que G_2 est connexe, grâce à quoi nous avons déterminé sa dimension, élément essentiel dans l'étude de l'action de G_2 sur $\mathbb{S}^6$.

Conclusion

Notre travail préliminaire sur les octonions nous a permis de présenter G_2 comme étant le groupe des automorphismes des octonions. Il s'agit là d'une approche historique, car c'est ainsi qu'É. Cartan avait défini G_2 en 1914, lorsqu'il cherchait à associer des groupes aux algèbres de Lie simples. Cependant, nous connaissons aujourd'hui d'autres façons de définir ce groupe, et il serait intéressant de les étudier pour enrichir notre compréhension de G_2.
Dans la seconde partie, notre travail sur les triplets basiques nous a permis de montrer que G_2, en plus d'être compact, est connexe et de dimension quatorze. Connaître ces propriétés nous a aidé à étudier l'action de G_2 sur $\mathbb{S}^6$.

Bibliographie

[1] Adams, J. F. *Lectures on exceptional Lie groups*, Chicago Lectures in Mathematics, Chicago, University of Chicago Press, IL, 1996.

[2] Baez, J. C. « The octonions », *in Bulletin of the American Mathematical Society* [en ligne], no. 2, 2002, pp. 145-205. Disponible sur : `https://arxiv.org/pdf/math/0105155.pdf`

[3] Bourbaki, N. *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Masson, 1984.

[4] Chern, S.-S. et Chevalley, C. « Obituary: Élie Cartan and his mathematical work », *in Bulletin of the American Mathematical Society* [en ligne], no. 58, 1952, pp. 217-250. Disponible sur : `https://www.ams.org/journals/bull/1952-58-02/S0002-9904-1952-09588-4/S0002-9904-1952-09588-4.pdf`

[5] Dahan-Dalmedico, A. et Peiffer, J. *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*, Paris, Seuil, 1986.

[6] Draper, C. « Notes on G_2: The Lie algebra and the Lie group », *in Differential Geometry and its Applications* [en ligne], no. 57, 2018, pp. 23-74. Disponible sur : `https://arxiv.org/abs/1704.07819`

[7] Gregoire, C. *Espace de modules de G2-fibrés principaux sur une courbe algébrique.* [Thèse de doctorat, Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc], 2010. Disponible sur : TEL archives ouvertes (00539858).

[8] Guillemin, V. et Pollack, A. *Differential Topology*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1974.

[9] Mneimné, R. et Testard, F. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Paris, Hermann, 1986.

[10] Naber, G. *Topology, Geometry, and Gauge Fields: Foundations*, New-York, Springer, 2011.