TD n°2 : autour des caractéristiques

Exercice 1 : lemme d'Osgood en dimension infinie

Soit E un espace de Banach, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $(t_0, x_0) \in I \times E$. Soit ω une fonction continue, croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, nulle en 0 et strictement positive ailleurs, telle qu'il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\int_0^{r_0} \frac{\mathrm{d}r}{\omega(r)} = \infty\,.$$

On définit l'ensemble C_ω des fonctions continues bornées de E dans E telles que

$$\|F\|_\omega := \|F\|_{L^\infty(E)} + \sup_{x \neq y} \frac{\|F(x) - F(y)\|}{\omega(\|x - y\|)} < \infty\,.$$

On considère $F \in L^1_{loc}(I; C_\omega)$, et on souhaite montrer qu'il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 tel que l'équation

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(t', x(t'))\,\mathrm{d}t'$$

admette une unique solution définie sur J.

1. Pour a dans $L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ positive, et $\tilde{\rho}$ une fonction telle que pour un réel positif b on ait

$$\tilde{\rho}(t) \leq R_b(t) := b + \int_{t_0}^t a(t')\omega(\tilde{\rho}(t'))\,\mathrm{d}t'\,,$$

montrer que si $b \neq 0$, alors

$$\Omega(b) \leq \int_{t_0}^t a(t')\,\mathrm{d}t' + \Omega(\tilde{\rho}(t))\,, \quad \text{où} \quad \Omega(r') := \int_{r'}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}r}{\omega(r)}\,.$$

Si $b = 0$, montrer que $\tilde{\rho}$ est identiquement nulle.
[Indication : Raisonner par contradiction et montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\Omega(\alpha) \leq \int_{t_0}^{t_1} a(t')\,\mathrm{d}t' + \Omega(\delta)\,, \quad \text{où} \quad \delta := \int_{t_0}^{t_1} a(t')\omega(\sup_{[t_0,t']} \rho(t''))\mathrm{d}t'\,,$$

avec t_1 à déterminer.]

2. Posons

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(t', x_k(t'))\,\mathrm{d}t' \quad \text{et} \quad \rho_k(t) := \sup_n \|x_{k+1+n}(t) - x_{k+1}(t)\|\,.$$

Conclure en montrant que

$$0 \leq \rho_k(t) \leq \int_{t_0}^t a(t')\omega(\rho_k(t'))\mathrm{d}t'\,.$$

Exercice 2 : méthode des caractéristiques

1. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Montrer que le problème de Cauchy d'inconnue $f = f(t, x)$

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0, \qquad f(0, x) = f_0(x),$$

admet une unique solution $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, donnée par la formule

$$f(t, x) = f_0(x - tv), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

2. [Lemme de Gronwall] Soient $A > 0$, $B > 0$ et $\phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que, pour tout $t \geq 0$,

$$\phi(t) \leq A + B \int_0^t \phi(s)\, ds.$$

Montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a l'inégalité $\phi(t) \leq Ae^{Bt}$.

3. Soit $T > 0$ et $V\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs admettant des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux variables x_j pour $j = 1, \ldots, d$ et vérifiant les hypothèses suivantes

$$(\mathbf{H1}) \qquad V \text{ et } \nabla_x V \text{ sont continues sur } [0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

et il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$,

$$(\mathbf{H2}) \qquad |V(t,x)| \leq \kappa(1 + |x|).$$

On considère maintenant le problème à coefficients variables

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0, \quad f(0,x) = f_0(x),$$

pour lequel on souhaite étendre la méthode présentée à la question 1. pour le cas de coefficients constants. On dit que γ est une courbe intégrale du champ V passant par x à l'instant t si $\gamma\colon s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$\frac{d}{ds}\gamma(s) = V(s, \gamma(s)), \qquad \gamma(t) = x.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne l'existence locale d'une telle courbe intégrale.

Montrer que pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ la courbe intégrale $s \mapsto \gamma(s)$ de V passant par x à l'instant t est définie pour tout $s \in [0,T]$. Dans la suite on notera $s \mapsto X(s,t,x)$ cette courbe intégrale, qui est donc par définition solution de

$$\partial_s X(s,t,x) = V(s, X(s,t,x)), \qquad X(t,t,x) = x.$$

L'application $X : [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ainsi définie est appelée le *flot caractéristique* de l'équation $\partial_t + V \cdot \nabla_x$.

4. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle

$$\dot{y}(s) = y(s)^2, \quad y(t) = x$$

et en déduire que l'on ne peut pas définir le flot de $\partial_t + x^2\partial_x$ de façon globale (on remarque que dans ce cas, l'hypothèse (**H2**) n'est pas vérifiée).

5. Montrer que pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0,T]$, on a

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x).$$

6. Montrer que $\partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x)$ et $\partial_{x_j} \partial_s X(s,t,x)$ existent pour tous $(s,t,x) \in]0,T[\times]0,T[\times\mathbb{R}^n$, et se prolongent en des fonctions continues sur $[0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$ et que

$$\partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x) = \partial_{x_j} \partial_s X(s,t,x),$$

pour tout $(s,t,x) \in [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$.

7. Montrer que pour tout $(s,t) \in [0,T] \times [0,T]$ l'application

$$X(s,t,\cdot)\colon x \mapsto X(s,t,x)$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

8. Montrer que $X \in \mathcal{C}^1([0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.
9. Montrer que

$$\partial_t X(0,t,x) + \sum_{j=0}^{d} V_j(t,x) \partial_{x_j} X(0,t,x) = 0,$$

pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$.
10. Soit $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Montrer que la fonction f définie par

$$f(t,x) = f_0(X(0,t,x))$$

est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ et vérifie

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0, \quad f(0,x) = f_0(x).$$

Exercice 3 : quelques cas plus ou moins linéaires

1. Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Trouver une solution du problème linéaire

$$\begin{cases} \partial_{x_1} u + x_1 \partial_{x_2} u = u & \text{sur} \quad \mathbb{R}^2 \\ u(1, \cdot) = h & \text{sur} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. On considère $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, v dans $\mathbb{R}^n$, et a, S dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$. Résoudre (existence et unicité) l'équation linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + v \cdot \nabla_x u(t,x) + a(t,x) u(t,x) = S(t,x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. Pour $\alpha > 0$, rechercher des solutions de l'équation semi-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \alpha \nabla_x u(t,x) = u^2(t,x) & \text{sur} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = \cos(x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercice 4 : équation de Burgers

On considère l'équation de Burgers en dimension 1, vue comme une équation de transport quasi-linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + u(t,x) \partial_x u(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0. \end{cases}$$

1. Dans cette question, on suppose que $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, que u_0 est bornée ainsi que sa dérivée u_0'. On va montrer l'existence et l'unicité une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T[\times \mathbb{R}$ où

$$T = \frac{1}{\sup_{z \in \mathbb{R}} (\max(0, -u_0'(z))}$$

avec la convention $1/0 = +\infty$.
a) Pour $s \geq 0$, on définit ϕ_s par

$$\phi_s(z) = z + s u_0(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{R}.$$

Montrer que pour tout $s \in [0,T[$, ϕ_s est bijective de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que sa réciproque.
b) Montrer que l'application Φ définie par

$$\Phi(t,x) = \phi_t^{-1}(x), \quad \forall\, (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T[\times\mathbb{R}$ et conclure.
[Indication : on pourra introduire la fonction F définie par $F(t, x, z) = z + tu_0(z) - x$.]
2. On suppose que u est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T[\times\mathbb{R}$. Appliquer la méthode des caractéristiques et prouver que pour tout $0 \leq s < T$ et tout $z \in \mathbb{R}$, on a :

$$u(s, z + su(0, z)) = u(0, z).$$

3. En déduire l'unicité de la solution précédente.
4. On définit la notion de solution faible : on dira que u bornée localement sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ est une solution faible de l'équation si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} \left[u(t,x)\partial_t\varphi(t,x) + \frac{1}{2}u^2(t,x)\partial_x\varphi(t,x)\right] \, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)\, dx = 0.$$

On suppose maintenant que $u_0 = 0$ et on définit pour $p > 0$,

$$\forall\, (t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, \quad v_p(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -pt, \\ -2p & \text{si} \quad -pt < x \leq 0, \\ 2p & \text{si} \quad 0 < x \leq pt \\ 0 & \text{si} \quad x > pt. \end{cases}$$

Vérifier que pour tout $p > 0$, v_p est une solution faible du problème.

Exercice 5 : équation eikonale
On note $\mathbb{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. On considère le problème complètement non-linéaire :

$$\begin{cases} (\partial_{x_1}u)^2 + (\partial_{x_2}u)^2 = 1 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ u = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{S}. \end{cases}$$

Appliquer la méthode des caractéristiques à cette équation et en déduire deux solutions possibles.

Exercice 6 : équation de transport avec donnée initiale non régulière
On s'intéresse au problème de transport linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + c \cdot \nabla_x u(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases},$$

où c est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ constant. Lorsque $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, la solution (au sens classique) de ce problème de transport est donnée par $u(t,x) = u_0(x - ct)$. Dans la suite, on supposera u_0 seulement localement bornée sur $\mathbb{R}^n$.
1. On dira qu'une fonction u bornée localement sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$ est une solution faible du problème si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n} u(t,x)\left[\partial_t\varphi(t,x) + c \cdot \nabla_x\varphi(t,x)\right] dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\varphi(0,x)\, dx = 0.$$

Montrer qu'une solution classique (lorsque $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$) est une solution faible.
2. Montrer l'unicité (au sens presque partout) d'une solution faible.
[Indication : on s'intéressera à la solution $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ du problème de transport suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\varphi(t,x) + c \cdot \nabla_x\varphi(t,x) = \psi(t,x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_*^+ \\ \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \end{cases}$$

où $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ quelconque et φ_0 choisi convenablement.]
3. Dans le cas où $n = 1$, $c > 0$ et $u_0(x) = H(x)$ la fonction d'Heaviside, donner explicitement l'unique solution faible du problème.