TD n°3 : Équations de transport et conservation scalaire

Exercice 1 : équation de transport à donnée initiale peu régulière

Soit b un champ de vecteurs dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ tel que

$$\forall T > 0, \exists K_T > 0, \forall t \in [0,T], \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \|b(t,x)\| \leq K_T(1 + \|x\|).$$

Pour u_0 dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, on va montrer qu'il existe une unique solution faible $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$ de $\partial_t u + b \cdot \nabla u = 0$, au sens où pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c([0,+\infty[\times \mathbb{R}^N)$,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x) \left[\partial_t \varphi + \text{div}\,(b\varphi)\right](t,x) = -\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx. \tag{1}$$

Existence :

1. Justifier qu'il existe une suite de fonctions $(u_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\|u_0^n\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \quad \forall n, \quad u_0^n \to u_0 \quad \text{dans } L^1(B_R)\ \forall R > 0.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la solution $u^n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ de $\partial_t u^n + b \cdot \nabla u^n = 0$ avec $u^n_{|t=0} = u^n_0$. Montrer que

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

3. On note $t \mapsto X(t,y)$ le flot associé au champ b et à la condition initiale $X(0,y) = y$. Étant donné $R, T > 0$, justifier l'existence de $M > 0$ telle que pour tout $0 \leq t \leq T$, et $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\int_{B_R} |u^n(t,x) - u^p(t,x)|\,dx \leq M \int_{X(t)^{-1}(B_R)} |u^n(t, X(t;y)) - u^p(t, X(t;y))|\,dy.$$

En déduire que la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,T], L^1(B_R))$.

4. Montrer qu'il existe une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$ telle que

$$u^n \rightharpoonup^* u \quad w^*L^\infty \quad \text{(à une sous-suite près)},$$
$$u^n \to u \quad \text{dans } \mathcal{C}([0,T], L^1(B_R)) \quad \forall T, R > 0.$$

5. Montrer que u est solution faible du problème.

Unicité :

6. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$ une solution faible telle que $u_0 = 0$, et soit $T > 0$. Soit $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\text{Supp}\ \phi(t) \subset B_R \quad \forall t \in [0, T+1]. \tag{2}$$

Soit $0 < \epsilon < 1$ quelconque, $T > 0$. On considère une famille $(\theta_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\theta_\epsilon(t) = 1 \quad \text{si } t \in [0,T], \quad \theta_\epsilon(t) = 0 \quad \text{si } t \geq T + \epsilon,\ 0 \leq \theta_\epsilon \leq 1,\ \theta'_\epsilon \leq 0.$$

Justifier que l'on peut prendre $\varphi(t,x) = \theta_\epsilon(t)\phi(t,x)$ comme fonction test dans (1).

7. Montrer que lorsque $\epsilon \to 0$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\theta_\epsilon(t) \left[\partial_t \phi + \text{div}\,(b\phi)\right](t,x)\,dt\,dx \to \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x) \left[\partial_t \phi + \text{div}\,(b\phi)\right](t,x)\,dt\,dx.$$

8. On pose

$$\omega(\epsilon) := \sup_{T \leq t \leq T+\epsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)\phi(t,x) - u(T,x)\phi(T,x)|\,dx.$$

Montrer que $\lim_{\epsilon\to 0}\omega(\epsilon) = 0$.

9. Montrer que

$$\left|\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\phi(t,x)\theta_\epsilon'(t)\, dtdx + \int_{\mathbb{R}^N} u(T,x)\phi(T,x)\, dx\right| \le \omega(\epsilon).$$

10. En passant à la limite quand $\epsilon \to 0$, montrer que pour tout $T > 0$ et pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ vérifiant (2)

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\left[\partial_t\phi + \text{div }(b\phi)\right](t,x)\, dt\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(T,x)\phi(T,x)\, dx.$$

11. Conclure en montrant que pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$, $T > 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(T,x)\psi(x)\, dx = 0.$$

12. (Propagation des singularités) On suppose que $u_0 = \mathbf{1}_A$ pour un certain ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^N$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable $A(t)$ tel que $u(t) = \mathbf{1}_{A(t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, et caractériser $A(t)$. Les discontinuités sont donc propagées par l'équation.

Exercice 2 : lois de conservation scalaire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On considère l'équation suivante :

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} \partial_t u(t,x) + \partial_x(f\circ u)(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{array}\right.$$

1. Montrer que si u est une solution dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R};\mathbb{R})$, alors

$$\forall t \ge 0\,, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}\,, \quad u(t, x_0 + f'(u_0(x_0))t) = u_0(x_0)\,.$$

2. Montrer que si f' n'est pas constante, alors il existe $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle qu'il n'y a pas de solution $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R};\mathbb{R})$ de cette équation.

3. On suppose que $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est bornée ainsi que sa dérivée u_0'. Montrer que l'équation (3) admet une unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T_0[\, \times\mathbb{R}$ où

$$T_0 = \frac{1}{\sup_{z\in\mathbb{R}}(\max(0, -(f'\circ u_0)'(z)))}.$$

4. On suppose maintenant que f est ce classe $\mathcal{C}^3$, que $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, que u_0 est bornée ainsi que sa dérivée u_0'. Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $(f'\circ u_0)'(x_0) < 0$.

a) Montrer que (3) admet une unique solution u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, T_0[\, \times\mathbb{R}$.

b) Montre que si v est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de (3) sur $[0, T_1[\, \times\mathbb{R}$ avec $T_1 > 0$ avec donnée initiale u_0, alors on a $T_1 \le T_0$ et $v = u$ sur $[0, T_1[\, \times\mathbb{R}$.

[Indication : on pourra introduire w définie par $w(t,x) = a'(v(t,x))(\partial_x v)(t,x)$.]

c) Montrer que

$$\lim_{t\to T_0} \sup_{y\in\mathbb{R}} |\partial_x u(t,y)| = +\infty.$$

[On a montré que la condition $(f'\circ u_0)' \ge 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour avoir existence globale en temps.]

Exercice 3 : ondes de choc et de détente
On s'intéresse à des données initiales pour (3) du type

$$u_0 = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Le problème de Cauchy associé à de telles données initiales est appelé « problème de Riemann ».
1. Soit $\sigma \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que le Dirac satisfait dans $\delta_{\frac{x}{\sigma}}(t) = |\sigma|\delta_{\sigma t}(x)$ au sens des distributions dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. On suppose $u_g \neq u_d$, et on pose (relation de Rankine-Hugoniot)

$$\sigma = \frac{f(u_g) - f(u_d)}{u_g - u_d}$$

On définit $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ par $u(t,x) = u_0(x - \sigma t)$. Montrer que u est solution de (3) au sens des distributions. Une telle solution est appelée « onde de choc » : σ est la vitesse du choc.
3. On suppose que f' est strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$:

$$U(\xi) = \begin{cases} u_g & \text{si } \xi \leq f'(u_g), \\ (f')^{-1}(\xi) & \text{si } f'(u_g) \leq \xi \leq f'(u_d), \\ u_d & \text{si } \xi \geq f'(u_d). \end{cases}$$

On pose $u(t,x) = U(x/t)$ pour $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Montrer que u est solution de (3) au sens des distributions : une telle solution s'appelle « onde de raréfaction ».

Exercice 4 : condition de Rankine-Hugoniot
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $\sigma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On s'intéresse à l'équation

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0\,.$$

On pose

$$\Omega_\pm := \Big\{(t,x) \in \mathbb{R}^2\,, \quad \pm(x - \sigma(t)) > 0\Big\}\,.$$

On suppose qu'il existe $u_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}$, avec $U_\pm$ un voisinage de $\overline{\Omega}_\pm$, dans $\mathcal{C}^1$, solutions de l'équation sur $U_\pm$. On suppose que $u_\pm$ et $\partial_x u_\pm$ sont bornées, et on définit

$$u := u_+ \mathbf{1}_{U_+} + u_- \mathbf{1}_{U_-}\,.$$

1. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, calculer la dérivée par rapport à t de

$$I_-(t) := \int_{-\infty}^{\sigma(t)} u_-(t,x)\phi(t,x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_+(t) := \int_{\sigma(t)}^{\infty} u_+(t,x)\phi(t,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Montrer que u est solution de l'équation dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\sigma'(t)\Big(u_+(t,\sigma(t)) - u_-(t,\sigma(t))\Big) = f\Big(u_+(t,\sigma(t))\Big) - f\Big(u_-(t,\sigma(t))\Big)\,.$$

3. On suppose que $f(u) = u^2/2$ (l'équation de Burgers). Calculer deux solutions « simples » $u_\pm$ sur $\mathbb{R}$ avec $u_-(0,x) = 2$ et $u_+(0,x) = 1$ et en déduire une solution de l'équation de Burgers telle que $u(0,x) = 2$ si $x < 0$ et $u(0,x) = 1$ si $x > 0$.