TD n°9 : théorème de Fujita-Kato pour l'équation de Navier-Stokes

On s'intéresse au système de Navier-Stokes homogène et incompressible dans le tore :

$$\text{(NS)} \qquad \begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p - \Delta u = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{T}^d, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{T}^d, \\ u_{|t=0} = u_0, \end{cases}$$

où $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est le champ de vitesse et $p : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la pression, la dimension d étant 2 ou 3. On rappelle qu'une base hilbertienne $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de

$$\mathcal{H} := \{ f \in L^2(\mathbb{T}^d), \, \operatorname{div} f = 0 \}$$

a été construite en cours, telle que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad -\Delta e_j = \mu_j^2 e_j,$$

les μ_j étant des réels positifs croissants éventuellement confondus. On définit alors le projecteur de Leray $\mathbb{P}_k$ comme la projection orthogonale dans L^2 sur $\operatorname{Vect}(e_j)_{0 \le j \le k}$. Pour s dans $[-1, 1]$, on définit les espaces d'interpolation

$$H^s(\mathbb{T}^d) := \{ u \in H^{-1}(\mathbb{T}^d), \; \|u\|_{H^s(\mathbb{T}^d)} < +\infty \},$$

où

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{T}^d)} := \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j^{2s} \langle u, e_j \rangle^2_{H^{-1} \times H^1_0}.$$

On peut vérifier que cette norme fait de $H^s(\mathbb{T}^d)$ un espace de Hilbert pour $s \ge 0$, et que $H^0(\mathbb{T}^d) = \mathcal{H}$. Comme d'habitude, $C > 0$ désignera une constante qui peut changer de ligne en ligne.

Exercice 1 : injections continues

Le but de cet exercice est de montrer que $H^{1/2}$ s'injecte continuement dans L^3, et que $L^{3/2}$ s'injecte continûment dans $H^{-1/2}$. Ces résultats d'interpolation peuvent s'obtenir par des arguments abstraits, mais on en propose ici une preuve *ad hoc*, par des arguments analogues à la troncature en Fourier utilisée au premier TD pour établir les injections de Sobolev.

Soit a dans $H^{1/2}(\mathbb{T}^d)$ tel que $\|a\|_{H^{1/2}} \le 1$. Pour $\Lambda > 0$, posons

$$a_\Lambda := \sum_{j, \, \mu_j < \Lambda} \langle a, e_j \rangle e_j \quad \text{and} \quad b_\Lambda := a - a_\Lambda.$$

On remarque que

$$\{x, \, |a_\Lambda(x)| > \Lambda\} \subset \{x, \, |a_\Lambda(x)| > \Lambda/2\} \cup \{x, \, |b_\Lambda(x)| > \Lambda/2\}.$$

1. Montrer que

$$\|a\|^3_{L^3} \le 3 \times 2^6 \int_0^{+\infty} \Lambda^{-4} \|a_\Lambda\|^6_{L^6} \mathrm{d}\Lambda + 3 \times 2^2 \int_0^{+\infty} \|b_\Lambda\|^2_{L^2} \mathrm{d}\Lambda.$$

2. Montrer que

$$\|a_\Lambda\|^2_{L^6} \le C\Lambda.$$

[Indication : on pourra utiliser l'injection de Sobolev $L^6 \hookrightarrow H^1$.]

3. En déduire la première injection continue.
On remarque que l'application

$$L : \begin{cases} l^2(\mathbb{N}) \to H^{1/2}, \\ (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j \mu_j^{-1/2} e_j, \end{cases}$$

est une isométrie bijective.
4. Pour φ dans $H^{1/2}$ et a dans $L^{3/2}$, montrer que

$$\langle a, \varphi\rangle = \sum_{j\in\mathbb{N}} (L^{-1}\varphi)_j \mu_j^{-1/2} \langle a, e_j\rangle,$$

puis que

$$|\langle a, \varphi\rangle| \leq C\|a\|_{L^{3/2}}\|\varphi\|_{H^{1/2}}.$$

5. En utilisant la caractérisation duale de la norme $l^2(\mathbb{N})$, conclure.

Le but de ce TD est de prouver le théorème suivant :

Théorème (Fujita-Kato)**.** *Pour tout u_0 dans $H^{1/2}(\mathbb{T}^d)$, il existe $T > 0$ tel que* (NS) *admette une solution dans $L^4([0,T], H^1(\mathbb{T}^d))$ (cette solution est alors unique d'après le principe d'unicité fort-faible vu en cours). La solution obtenue est de plus dans $C([0,T], H^{1/2}(\mathbb{T}^d))$, et il existe $c > 0$ tel que la solution soit globale dès que $\|u_0\|_{H^{1/2}} \leq c$.*

Exercice 2 : compacité des approximations de Friedrichs
Comme vu en cours, on introduit les approximations de Friedrichs u_k dans $C^1(\mathbb{R}_+, \mathrm{Vect}(e_j)_{0\leq j\leq k})$ définies par

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_k = -\mathbb{P}_k \mathrm{div}(u_k \otimes u_k) + \Delta u_k, \\ u_k|_{t=0} = \mathbb{P}_k u_0. \end{cases}$$

Il suffit de montrer que les u_k sont bornées dans $L^4([0,T], H^{1/2}(\mathbb{T}^d))$ uniformément en k.
1. Utiliser la formule de Duhamel pour exprimer les coefficients $U_{j,k}(t)$ de $u_k(t)$ dans $(e_j)_{0\leq j\leq k}$.
2. En utilisant l'exercice précédent, montrer pour a, b dans H^1 que

$$\|P_j \,\mathrm{div}(a \otimes b)\|_{H^{-1/2}} \leq C\|a\|_{H^1}\|b\|_{H^1}.$$

[Indication : on pourra s'inspirer du TD précédent, et utiliser l'injection de Sobolev $L^6 \hookrightarrow H^1$.]
3. Pour $t > 0$, montrer l'existence de $(c_{j,k}(t))_{j\in\mathbb{N}}$ tel que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} c_{j,k}^2(t) = 1 \quad \text{et} \quad |\langle \mathrm{div}(u_k \otimes u_k), e_j\rangle| \leq C c_{j,k} \mu_j^{1/2} \|u_k(t)\|_{H^{1/2}}^2.$$

En déduire une première estimation de $U_{j,k}(t)$.
4. En utlisant l'inégalité de Young (pour la convolution), établir que

$$\Big[\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_j^2 \|U_{j,k}\|_{L^4([0,T])}^2\Big]^{1/2} \leq \Big[\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_j \langle u_0, e_j\rangle_{L^2}^2 (1 - e^{-4\mu_j^2 T})^{1/2}\Big]^{1/2} + C\Big[\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_0^T c_{j,k}^2(t)\|u_k(t)\|_{H^1}^4 \mathrm{d}t\Big]^{1/2}.$$

5. En déduire $C > 0$ tel que

$$\|u_k\|_{L^4([0,T],H^1)}^2 \leq \Big[\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_j \langle u_0, e_j\rangle_{L^2}^2 (1 - e^{-4\mu_j^2 T})^{1/2}\Big]^{1/2} + C\|u_k\|_{L^4([0,T],H^1)}^2.$$

On définit les temps

$$T_k := \sup \left\{ T > 0, \ \|u_k\|^2_{L^4([0,T],H^{1/2})} \leq \frac{1}{2C} \right\}.$$

6. Pour $\|u_0\|^2_{H^{1/2}(\mathbb{T}^d)}$ suffisamment petit, montrer que $T_k = +\infty$ pour tout k.
Soit j_0 le plus petit entier tel que

$$\left[\sum_{j>j_0} \mu_j \langle u_0, e_j \rangle^2 \right]^{1/2} \leq \frac{1}{16C}.$$

7. En utilisant j_0, construire un temps $T > 0$ tel que $\|u_k\|_{L^4([0,T],H^1(\mathbb{T}^d))}$ soit uniformément borné. Conclure.

Exercice 3 : continuité en temps
La solution u obtenue appartenant à $L^4([0,T],H^1)$, on remarque que $\mathrm{div}(u \otimes u)$ appartient à $L^2([0,T],H^{-1/2})$.
1. En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer l'existence de $(c_j(t))_{j\in\mathbb{N}}$ tel que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j^2(t) = 1 \quad \text{et} \quad |\langle u(t), e_j \rangle_{L^2}| \leq |\langle u_0, e_j \rangle_{L^2}| e^{-\mu_j^2 t} + C\mu_j^{1/2} \int_0^t e^{-\mu_j^2(t-t')} c_j(t') \|u(t')\|^2_{H^1} \mathrm{d}t'.$$

2. En déduire que

$$\left[\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_j \|u(\cdot), e_j\|^2_{L^\infty([0,T]} \right]^{1/2} \leq \sqrt{2}\|u_0\|_{H^{1/2}} + C\|u\|_{L^4([0,T],H^1(\mathbb{T}^d))},$$

puis que u est dans $L^\infty([0,T],H^{1/2)}(\mathbb{T}^d))$.
Pour $\eta > 0$, soit j_0 tel que

$$\left[\sum_{j>j_0} \mu_j \|u(\cdot), e_j\|^2_{L^\infty([0,T])} \right]^{1/2} \leq \frac{\eta}{2}.$$

3. Pour $0 \leq t_1, t_2 \leq T$, montrer que

$$\|u(t_1) - u(t_2)\|_{H^{1/2}(\mathbb{T}^d)} \leq \frac{\eta}{2} + \mu_{j_0}^{1/2} \|u(t_1) - u(t_2)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}.$$

4. En utilisant la continuité de u à valeurs dans $\mathcal{H}$ (vue en cours), conclure.