Éléments de correction pour le TD n°2

Exercice 1 : lemme d'Osgood en dimension infinie
Vu en TD. Pour obtenir l'existence, on pourra considérer la suite u définie par

$$u_k = \sup_{p \geq k} \rho_p,$$

montrer que la seule valeur d'adhérence de u est 0, et en déduire que $(x_k)_k$ est une suite de Cauchy.

Exercice 2 : méthode des caractéristiques

1. On introduit une fonction $t \mapsto X(t)$ telle que, si f est solution de $\partial_t f + v \cdot \nabla f = 0$ alors $f(t, X(t))$ est une fonction constante. On définit $X(t) = x + vt$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Alors,

$$\frac{d}{dt} f(t, x + vt) = (\partial_t f + v \cdot \nabla_x f)(t, x + vt).$$

Donc si f est solution du problème de Cauchy alors

$$f(t, X(t)) = f(t, x + vt) = f(0, X(0)) = f(0, x) = f_0(x)$$

d'où $f(t, x) = f_0(x - vt)$.
Réciproquement, on vérifie directement que $(t, x) \mapsto f_0(x - tv)$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ qui est solution du problème de Cauchy.

2. Introduisons pour $t \geq 0$,

$$w(t) = A + B \int_0^t \phi(s)\, ds.$$

Par hypothèse, cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $w'(t) = B\phi(t) \leq Bw(t)$. Donc

$$\Big(w(t) e^{-Bt}\Big)' \leq 0, \quad \forall\, t \geq 0$$

et on en déduit le résultat voulu en intégrant cette inégalité.

3. Soient $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ et γ la solution maximale associée au problème de Cauchy considéré. On note $I \subset [0, T]$ l'intervalle de définition de γ qui est un voisinage de t. En utilisant l'hypothèse (**H2**), on a pour tout $s \in I$:

$$|\gamma(s)| \leq |x| + \left| \int_t^s |V(\tau, \gamma(\tau))|\, d\tau \right| \leq |x| + \kappa T + \kappa \left| \int_t^s |\gamma(\tau)|\, d\tau \right|.$$

D'après la question 2., on obtient pour tout $s \in I$:

$$|\gamma(s)| \leq (|x| + \kappa T) e^{\kappa |t-s|} \leq (|x| + \kappa T) e^{\kappa T}.$$

Supposons alors que $I \neq [0, T]$. Alors, d'après le lemme des bouts, on aurait explosion de γ à l'une (au moins) des extrémités de I i.e.

$$|\gamma(s)| \to +\infty, \quad \text{pour} \quad s \to \inf(I)^+ \quad \text{ou} \quad s \to \sup(I)^-.$$

Or ceci est exclu d'après l'estimation obtenue sur $\gamma(s)$ pour tout $s \in I$.

4. On résout l'équation et on obtient :

$$y(s) = \frac{x}{1 - (s - t)x}$$

qui est bien définie pour $s < t + 1/x$ si $x > 0$ et $s > t + 1/x$ si $x < 0$.
D'autre part, le flot caractéristique X de $\partial_t + x^2\partial_x$ vérifie

$$\partial_s X(s,t,x) = X(s,t,x)^2, \quad X(t,t,x) = x.$$

On a donc

$$X(s,t,x) = \frac{x}{1-(s-t)x}$$

et donc pour $t \in \mathbb{R}$, l'application $(s,x) \mapsto X(s,t,x)$ ne peut être définie sur aucun voisinage de (t,x) de la forme $[a,b] \times \mathbb{R}$ d'après ce qui précède.
5. Pour tous t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les applications

$$t_3 \mapsto X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \quad \text{et} \quad t_3 \mapsto X(t_3, t_1, x)$$

sont deux courbes intégrales de V passant par $X(t_2, t_1, x)$ au temps t_2. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'unicité nous donne qu'elles coïncident sur tout leur intervalle maximal de définition c'est-à-dire pour tout $t_3 \in [0,T]$.
6. On utilise le théorème de dérivation des solutions d'équations différentielles par rapport à la donnée initiale qui nous dit que pout $t \in [0,T]$ fixé, l'application $(s,x) \mapsto X(s,t,x)$ admet une dérivée partielle $\partial_{x_j} X(s,t,x)$ pour tous $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ et $j = 1, ..., n$. De plus, cette dérivée partielle est l'unique solution définie pour $s \in [0,T]$ de l'équation différentielle

$$\partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x) = \nabla_x V(s, X(s,t,x)) \partial_{x_j} X(s,t,x), \quad \partial_{x_j} X(t,t,x) = e_j$$

où e_j est le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Et on a également que l'application $(s,x) \mapsto \partial_{x_j} X(s,t,x)$ est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$.
En combinant ceci avec l'équation différentielle écrite ci-dessus, on en déduit que pour tout $j = 1, ..., n$, la dérivée partielle seconde $(s,x) \mapsto \partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x)$ est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$.
D'après l'hypothèse (**H1**), $V(s,\cdot)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. L'application $X(s,t,\cdot)$ l'est aussi (on a vu qu'elle admet des dérivées partielles $\partial_{x_j} X(s,t,\cdot)$ continues sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $j = 1, ..., n$) donc dans l'équation

$$\partial_s X(s,t,x) = V(s, X(s,t,x)), \quad (s,x) \in]0,T[\times \mathbb{R}^n,$$

le membre de droite est de classe $\mathcal{C}^1$ en x et on obtient pour tout $j = 1, ..., n$ et tout $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$:

$$\partial_{x_j} \partial_s X(s,t,x) = \nabla_x V(s, X(s,t,x)) \partial_{x_j} X(s,t,x) = \partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x).$$

7. On a vu dans la question précédente que pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$, l'application $X(s,t,\cdot)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. D'autre part, pour $(s,t) \in [0,T]^2$, d'après la question 5. appliquée avec $t_3 = t_1 = s$ et $t_2 = t$ puis avec $t_3 = t_1 = t$ et $t_2 = s$, on a les relations suivantes :

$$X(s,t,X(t,s,x)) = X(s,s,x) = x = X(t,t,x) = X(t,s,X(s,t,x)).$$

On en déduit que $X(s,t,\cdot)$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ d'inverse $X(s,t,\cdot)^{-1} = X(t,s,\cdot)$. La bijection $X(s,t,\cdot)$ et son inverse étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut conclure.
8. On a vu dans la question 6. que l'application $(s,t,x) \mapsto X(s,t,x)$ définie sur $[0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$ admet des dérivées partielles continues par rapport à la variable x. On a également vu qu'elle est $\mathcal{C}^1$ par rapport à la variable s puisque par définition $\partial_s X(s,t,x) = V(s, X(s,t,x))$. Il reste à voir qu'elle admet aussi une dérivée partielle continue par rapport à t.
On fixe $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ alors $X(s,t,x)$ est l'unique solution de

$$F(t, y(t)) = 0 \quad \text{où} \quad F(t,y) = X(t,s,y) - x.$$

L'application $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in [0,T]$, la matrice $\nabla_y F(t,y) = \nabla_x X(t,s,y)$ est inversible. En effet, pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, le déterminant $J(t,s,x) = \det(\nabla_x X(t,s,x))$ est non nul car c'est le déterminant jacobien du difféomorphisme $X(s,t,\cdot)$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites qui nous dit en particulier que la fonction $t \mapsto y(t)$ est dérivable et vérifie

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(t) &= -\nabla_y F(t,y(t))^{-1}\partial_t F(t,y(t))\\ &= -\nabla_x X(t,s,X(s,t,x))^{-1}V(t,X(t,s,X(s,t,x)))\\ &= -\nabla_x X(t,s,X(s,t,x))^{-1}V(t,x).\end{aligned}$$

Cette dernière formule montre que l'application $\partial_t X$ est continue sur $[0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$.
En conclusion, l'application X admet des dérivées partielles continues en tout point sur $[0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$, elle y est donc de classe $\mathcal{C}^1$.

9. On utilise l'égalité prouvée à la question 5. et on la dérive par rapport à la variable t_2 (le flot X est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$) pour obtenir :

$$\partial_t X(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x)) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} X(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x))\,\partial_s X_j(t_2,t_1,x) = 0$$

i.e.

$$\partial_t X(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x)) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} X(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x))\,V_j(t_2,X(t_2,t_1,x)) = 0.$$

On conclut en posant $t_1 = t_2 = t$ et $t_3 = 0$.

10. Le fait que f soit $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ provient du fait que f_0 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et que l'application $(t,x) \mapsto X(0,t,x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ d'après la question 7.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0,x) = f_0(X(0,0,x)) = f_0(x)$.
Enfin, on a pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$:

$$\partial_t f(t,x) = \nabla f_0(X(0,t,x)) \cdot \partial_t X(0,t,x)$$

et

$$\partial_{x_j} f(t,x) = \nabla f_0(X(0,t,x)) \cdot \partial_{x_j} X(0,t,x)$$

ce qui implique que

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = \nabla f_0(X(0,t,x)) \cdot \left(\partial_t X(0,t,x) + \sum_{j=1}^{n} V_j(t,x)\,\partial_{x_j} X(0,t,x) \right) = 0$$

d'après la question précédente.

Exercice 3 : quelques cas plus ou moins linéaires

1. .
2.

$$u(t,x) = u_0(x - tv)e^{-\int_0^t a(\tau,x+(\tau-t)v)\,d\tau} + \int_0^t e^{-\int_s^t a(\tau,x+(\tau-t)v)\,d\tau} S(s,x+(s-t)v)\,ds.$$

3.

$$u(t,x) = \frac{\cos(x-\alpha t)}{1 - t\cos(x-\alpha t)}$$

La solution est locale et explose en temps fini.

Exercice 4 : équation de Burgers
Méthode à rapprocher du TD 3.

Exercice 5 : équation eikonale
Vu en cours.

Exercice 6 : équation de transport avec donnée initiale non régulière
Vu en TD. Pour conlcure, prendre φ définie comme solution de l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t,x) + c \cdot \nabla_x \varphi(t,x) = \psi(t,x) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n \\ \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \end{cases}$$

i.e.

$$\varphi(t,x) = \varphi_0(x - ct) + \int_0^t \psi(s, x - c(t-s))\, ds.$$

Prendre le support de ψ de la forme $[0,T] \times K$ avec K compact, et choisir

$$\varphi_0(y) := -\int_0^T \psi(s, y + sc)\, ds,$$

de sorte que φ soit à support compact.