Analyse des EDP : Éléments de correction du partiel du 7 novembre 2022

1 Exercice

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 3$, soit $p > d/2$ et soit $f \in L^p(\Omega)$. On considère $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta u \leq f$ au sens où

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,, \quad v \geq 0 \quad p.p.\,, \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \leq \int_\Omega f\, v\, dx\,.$$

On veut montrer qu'il existe $K > 0$ telle que $u \leq K$ p.p.

1. Montrer que si $v \in H^1(\Omega)$, alors $v^+ := \max(0, v) \in H^1(\Omega)$ et

$$\nabla v^+ = \mathbb{1}_{v\geq 0} \nabla v = \mathbb{1}_{v>0} \nabla v\,.$$

   On pourra utiliser le fait que v^+ est limite de $F_\varepsilon(v)$ quand $\varepsilon \to 0$, où

$$F_\varepsilon(x) := \sqrt{x^2+\varepsilon^2} - \varepsilon \quad si \quad x \geq 0\,, \quad F_\varepsilon(x) := 0 \quad si \quad x < 0\,.$$

2. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante et soit

$$u_k := (u - a_k)^+\,.$$

   Montrer que si u_k est identiquement nul pour un certain k, alors le résultat est démontré. Dorénavant on suppose que les u_k sont non identiquement nuls, pour tout k.
   C'est dû au fait que $u_k \leq u_{k-1}$ et $u_k \to (u-K)^+$.

3. Montrer que

$$\int_\Omega \left|\nabla u_k\right|^2 dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|u_k\|_{L^{p'}(\Omega)}\,, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,,$$

   et en déduire qu'il existe une constante C_Ω telle que

$$\|u_k\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u_k\|_{L^{p'}(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\,.$$

   Le premier résultat découle du fait que presque partout

$$|\nabla u_k|^2 = \nabla u \cdot \nabla u_k$$

   et de l'inégalité $-\Delta u \leq f$. Le second est une simple injection de Sobolev.

4. Soit

$$\mathscr{A}_k := \left\{x \in \Omega\,,\, u_k(x) > 0\right\}.$$

   Montrer que pour tout $\beta > 0$

$$\mathbb{1}_{\mathscr{A}_k} \leq \frac{u_{k-1}^\beta}{(a_k - a_{k-1})^\beta}\,.$$

   Sur $\mathscr{A}_k$ on a

$$u - a_{k-1} > a_k - a_{k-1} > 0$$

   donc $u_{k-1} > a_k - a_{k-1}$. On peut ensuite élever l'inégalité à la puissance β.

5. Montrer que

$$\|u_k\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \le C_\Omega \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \frac{\|u_{k-1}\|^{\mu}_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}}{(a_k - a_{k-1})^{\beta}}, \quad \beta := \frac{d}{(d-2)p'} - \frac{1}{2}, \quad \mu := \frac{d}{(d-2)p'}.$$

On écrit

$$u_k^{p'} \le u_k^{p'} \mathbb{1}_{\mathscr{A}_k} \le u_{k-1}^{p'} \mathbb{1}_{\mathscr{A}_k} \le \frac{u_{k-1}^{\beta'+p'}}{(a_k - a_{k-1})^{\beta'}}.$$

Il suffit alors de choisir $\beta' = \frac{2d}{d-2} - p'$ pour conclure grâce à la question précédente.

6. On choisit $a_k := (1 - 2^{-k-1})K$ avec $K \ge 1$ à déterminer plus tard. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|u_0\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} = 0.$$

On a

$$(a_k - a_{k-1})^{-\beta} \le 2^{\beta(k+1)}$$

et si $x_k := \|u_k\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}$ alors

$$x_k \le C_\Omega 2^{\beta} \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{1}{2}} 2^{\beta k} x_{k-1}^{\mu}.$$

En passant par le log on trouve par récurrence que

$$\log x_k \le \mu^k \Big(\log x_0 + S_0 \log(C_\Omega 2^{\beta} \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{1}{2}}) + S_1 \log(2^{\beta})\Big), \quad S_\alpha := \sum_{j\ge1} j^{\alpha} \mu^{-j}.$$

Alors on pose

$$\varepsilon := \exp\Big(-S_0 \log(C_\Omega 2^{\beta} \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{1}{2}}) - S_1 \log(2^{\beta})\Big)$$

7. Montrer qu'il existe K tel que $\|u_0\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} < \varepsilon$.

On a

$$\lim_{K\to\infty} x_0 = \lim_{K\to\infty} \Big(\int_\Omega \big(u - \frac{K}{2}\big)^+ dx\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{d}} \to 0$$

par convergence monotone, d'où le résultat.

8. Conclure.

Par convergence monotone à nouveau,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \big(u - K\big)^+$$

d'où le résultat.

2 Problème : un théorème de di Perna-Lions

Le but de ce problème est d'étudier l'équation de transport

$$\begin{aligned} \partial_t f(t,x) + b(x)\cdot\nabla f(t,x) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \\ f_{|t=0} = f_0, \end{aligned} \tag{Tf}$$

où $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est un champ de vecteurs, et la fonction inconnue f est à valeurs réelles. On rappelle (voit TD) que si $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $b \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ est tel que

$$\exists K > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |b(x)| \le K\langle x\rangle,$$

alors l'équation (Tf) admet une unique solution faible $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}_+; L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))$, au sens où pour tout $\varphi \in \mathscr{C}^1_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\left(\partial_t \varphi + \mathrm{div}\,(b\varphi)\right)(t,x)\,dt dx = -\int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\varphi(0,x)\,dx\,. \tag{1}$$

Cette solution vérifie $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \le \|f_0\|_{L^\infty(R^d)}$, et presque partout $f(t,X(t,x)) = f_0(x)$ où $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{dX}{dt}(t,x) = b\big(X(t,x)\big) \quad X(0,x) = x\,.$$

Définition 1. *Soit $p \in [1,+\infty]$, et soit I un intervalle de $\mathbb{R}_+$. On dit que f est "faiblement continue à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^d)$", et on note $f \in \mathscr{C}_w(I; L^p(\mathbb{R}^d))$, si $f \in L^\infty(I; L^p(\mathbb{R}^d))$ et si pour toute fonction $\phi \in \mathscr{C}^1_c(I \times \mathbb{R}^d)$, l'application $t \in I \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\phi(t,x)\,dx$ est continue.*

On se propose de démontrer le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit $b \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathrm{div}\, b \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une unique $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}_w(\mathbb{R}_+; L^\infty(\mathbb{R}^d))$ solution faible de (Tf). De surcroît, cette solution vérifie pour tout $T > 0$*

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}^1_c(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)\,,\quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\left(\partial_t\varphi + \mathrm{div}\,(b\varphi)\right)(t,x)\,dx dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(T,x)\varphi(T,x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\varphi(0,x)\,dx. \tag{2}$$

Existence

1. Soit $b \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathrm{div}\, b \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit une suite régularisante

$$\rho^\varepsilon = \varepsilon^{-d}\rho(\cdot/\varepsilon)\,, \quad \text{avec} \quad \rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}_+)\,, \quad \int \rho(x)\,dx = 1\,, \quad \mathrm{Supp}\,\rho \subset B_1 \tag{3}$$

   où B_1 est la boule unité de $\mathbb{R}^d$ centrée en 0. On pose $b^\varepsilon := b * \rho^\varepsilon$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une unique solution faible $f^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}_+; L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))$ de l'équation

$$\partial_t f^\varepsilon + b^\varepsilon \cdot \nabla f^\varepsilon = 0\,, \quad t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^d\,,$$
$$f^\varepsilon_{|t=0} = f_0\,.$$

   On a $b^\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $b^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\varepsilon > 0$ donc on applique le résultat rappelé en préambule. De plus

$$\forall \varepsilon > 0\,,\quad \|f^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \le \|f_0\|_{L^\infty(R^d)}\,. \tag{4}$$

   On note que

$$b^\varepsilon \to b \quad \text{dans } W^{1,1}(\mathbb{R}^d),$$
$$\|\mathrm{div}\, b^\varepsilon\|_{L^\infty} \le \|\mathrm{div}\, b\|_{L^\infty},$$
$$\|\nabla b^\varepsilon\|_{L^\infty} \le \frac{C}{\varepsilon^d}\|\nabla b\|_{L^1}.$$

2. Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers zéro et une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ solution faible de (Tf), telles que $f^{\varepsilon_k} \rightharpoonup^* f$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \le \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

   L'existence de $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et de $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$ telle que $f^{\varepsilon_k} \rightharpoonup^* f$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$ provient directement de (4). En écrivant l'équation au sens des distributions (contre une fonction test ϕ dans $\mathscr{D}((\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d))$ on peut passer à la limite dans tous les termes.

3. On veut à présent montrer que f est faiblement continue en temps à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour cela, on considère $\phi \in \mathscr{C}_c^1([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$ fixée, et on définit, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$I^\varepsilon : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon(t,x)\phi(t,x)\,dx.$$
   (a) Montrer que la suite $(I^{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est compacte dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+)$. On note I sa limite (après extraction éventuelle d'une sous-suite).
   On note qu'il existe $T > 0$ tel que $\operatorname{Supp} I^\varepsilon \subset [0,T]$ pour tout $\varepsilon > 0$, et que
$$\sup_{t\in[0,T]} |I^\varepsilon(t)| \le \|f_0\|_{L^\infty}\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;L^1(\mathbb{R}^d))}.$$
   Par ailleurs pour tout $t \ge 0$
$$\begin{aligned} I^\varepsilon(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\phi(0,x)\,dx \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon(s,x)\left(\partial_t\phi + \operatorname{div}(b^\varepsilon\phi)\right)(s,x)\,dx\,ds \end{aligned}$$
   donc si $0 \le t \le t'$ alors
$$\begin{aligned} \left|I^\varepsilon(t') - I^\varepsilon(t)\right| &\le (t'-t)\|f^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)}\left(\|\partial_t\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;L^1(\mathbb{R}^d))} + \|b^\varepsilon\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^d)}\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))}\right) \\ &\le (t'-t)\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\left(\|\partial_t\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;L^1(\mathbb{R}^d))} + \|b\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^d)}\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))}\right). \end{aligned}$$
   On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli.

   (b) Soit $\theta \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ quelconque. Montrer que
$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty I^{\varepsilon_k}(t)\theta(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\phi(t,x)\theta(t)\,dt.$$
   (c) En déduire que $I(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\phi(t,x)\,dx$ pour presque tout $t > 0$.
   Cela résulte de la question précédente. On note donc en particulier que $f \in \mathscr{C}_w(\mathbb{R}_+;L^\infty(\mathbb{R}^d))$.

   (d) Conclure.
   On a pour tout $t \ge 0$,
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\phi(t,x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\phi(0,x)\,dx \\ &\quad + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} f(t',x)\left[\partial_t\phi + \operatorname{div}(b\phi)\right](t',x)\,dx\,dt'. \end{aligned}$$
   On a donc démontré que sous les hypothèses du théorème, il existe une solution faible $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)\cap\mathscr{C}_w(\mathbb{R}_+,,L^\infty(\mathbb{R}^d))$ de l'équation (Tf)*, vérifiant la propriété* (2)*.*

4. Sous les mêmes hypothèses, vérifier rapidement (en reprenant les étapes ci-dessus) que pour tout $g_0 \in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, il existe $g \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+;L^\infty(\mathbb{R}^d))$ solution faible de l'équation de transport sous forme conservative
$$\begin{aligned} \partial_t g + \operatorname{div}(bg) = 0\,, &\quad t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^d\,, \\ g_{|t=0} = g_0\,, &\quad x \in \mathbb{R}^d\,. \end{aligned} \tag{Tc}$$
On reprend la méthode du cours donnant l'existence d'une solution pour l'équation régularisée, et comme la divergence de b est bornée on a
$$e^{-\|\operatorname{div} b\|_{L^\infty} t} \le J^\varepsilon(t,x) \le e^{\|\operatorname{div} b\|_{L^\infty} t}$$
et on conclut par passage à la limite grâce aux bornes
$$\|g^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \le \|g_0\|_{L^\infty} e^{\|\operatorname{div} b\|_{L^\infty} t}\,, \quad \|g^\varepsilon(t)\|_{L^1} \le \|g_0\|_{L^1}\,.$$

Unicité

Soit une solution faible $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}_w(\mathbb{R}_+; L^\infty(\mathbb{R}^d))$ de (Tf) avec $f_0 = 0$, vérifiant la propriété (2) pour tout $T > 0$ et pour tout $\phi \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.
Soit $\psi \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$ quelconque. On considère ϕ solution de l'équation sous forme conservative

$$\partial_t \phi + \operatorname{div}(b\phi) = 0, \quad \phi_{|t=T} = \psi.$$

Une telle fonction $\phi \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^\infty(\mathbb{R}^d))$ existe d'après la question précédente. On aimerait utiliser ϕ comme fonction test dans (2). Malheureusement ϕ ne possède pas la régularité requise pour cela. On va donc commencer par régulariser ϕ, utiliser la fonction régularisée comme fonction test, puis on va passer à la limite lorsque le paramètre de régularisation tend vers zéro pour conclure.

5. On commence par démontrer le lemme suivant.

   Lemme 3. *On suppose que b vérifie les hypothèses du Théorème 2. Soit $\phi \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ une solution au sens des distributions dans $\mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{R}^d)$ de l'équation*

   $$\partial_t \phi + \operatorname{div}(b\phi) = 0\,.$$

   Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère une suite régularisante $\rho^\varepsilon = \varepsilon^{-d}\rho(\cdot/\varepsilon)$ comme en (3). On pose $\phi^\varepsilon := \phi * \rho^\varepsilon$. Alors

   $$\partial_t \phi^\varepsilon + \operatorname{div}(b\phi^\varepsilon) = r^\varepsilon\,,$$

   avec $\|r^\varepsilon\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^d)} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

   (a) Montrer que pour presque tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$,

   $$r^\varepsilon(t,x) = (\operatorname{div} b(x))\phi^\varepsilon(t,x) + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t,y)\big(b(x) - b(y)\big) \cdot \nabla_x \rho^\varepsilon(x-y)\,dy\,.$$

   On a $r^\varepsilon = \operatorname{div}(b\phi^\varepsilon) - \operatorname{div}((b\phi) * \rho^\varepsilon)$ et le résultat suit d'un simple calcul.

   (b) Pour tout $i, j \in \{1, \dots, d\}$, on définit $R_{ij} : x \in \mathbb{R}^d \mapsto x_i \partial_{x_j} \rho(x)$.

   Justifier que $R_{ij} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} R_{ij}(x)\,dx = -\delta_{ij}$. On définit $R^\varepsilon_{ij} := \varepsilon^{-d} R_{ij}(\cdot/\varepsilon)$.

   Montrer que pour presque tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$,

   $$r^\varepsilon(t,x) = (\operatorname{div} b(x))\phi^\varepsilon(t,x) + \sum_{1\le i,j\le d} \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 \phi(t,y)\partial_{x_i} b_j(\tau x + (1-\tau)y) R^\varepsilon_{ij}(x-y)\,dy\,d\tau.$$

   (c) On pose

   $$\omega(\delta) = \sup_{1\le i,j\le d}\ \sup_{h\in\mathbb{R}^d, \|h\|\le\delta} \|\partial_{x_i} b_j(\cdot + h) - \partial_{x_i} b_j\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\,.$$

   On note que puisque $\partial_{x_i} b_j \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta) = 0$ (module de continuité dans L^1).

   Montrer que pour tout $1 \le i, j \le d$, pour $t \in [0,T]$

   $$\left\| \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 \big(\partial_{x_i} b_j(\tau x + (1-\tau)y) - \partial_{x_i} b_j(y)\big)\phi(t,y) R^\varepsilon_{ij}(x-y)\,dy\,d\tau \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le \|\phi\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d)} \|R_{ij}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\,\omega(\varepsilon)\,.$$

   (d) Justifier que $(\operatorname{div} b)\phi^\varepsilon \to (\operatorname{div} b)\phi$ dans $L^1([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ et que $(\partial_{x_i} b_j \phi) * R^\varepsilon_{ij} \to -\delta_{ij}\partial_{x_i} b_j \phi$ dans $L^1([0,T]\times\mathbb{R}^d)$.

   (e) Conclure.

6. Soit $\psi \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$ quelconque, et soit $\phi \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ une solution faible de l'équation (Tc) telle que $\phi_{|t=T} = \psi$. On pose $\phi^\varepsilon(t) := \phi(t) * \rho^\varepsilon$. Soit une fonction de troncature χ_R définie par $\chi_R = \chi(\cdot/R)$ pour $R > 0$, où $\chi \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$.

   (a) Montrer que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(T,x)\psi(x)\,dx \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(T,x)\left(\psi - (\psi * \rho^\varepsilon)\chi_R\right)(x)\,dx \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x) r^\varepsilon(t,x)\chi_R(x)\,dx \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x) b(x)\phi^\varepsilon(t,x) \cdot \nabla\chi_R(x)\,dx\,dt.\end{aligned}$$

   Il suffit de remarquer que l'on peut prendre $\varphi = \phi^\varepsilon \chi_R$ comme fonction test dans (2).

   (b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de T, R et de ε, telle que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\psi(x)\,dx \right| \leq C\|f\|_{L^\infty}\left(\varepsilon + \|r^\varepsilon\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^d)} + \|\phi\|_{L^\infty}\|b\|_{L^1}\frac{T}{R}\right).$$

   Conclure.