

Analyse des EDP : Partiel du 7 novembre 2022

Le sujet comporte un exercice et un problème

1 Exercice : un principe du maximum

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d avec $d \geq 3$, soit $p > d/2$ et soit $f \in L^p(\Omega)$. On considère $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta u \leq f$ au sens où

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad v \geq 0 \quad p.p., \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \leq \int_{\Omega} f v \, dx.$$

On veut montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $u \leq K$ p.p.

1. Montrer que si $v \in H^1(\Omega)$, alors $v^+ := \max(0, v) \in H^1(\Omega)$ et

$$\nabla v^+ = \mathbb{1}_{v \geq 0} \nabla v = \mathbb{1}_{v > 0} \nabla v.$$

On pourra utiliser le fait que v^+ est limite de $F_{\varepsilon}(v)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, où

$$F_{\varepsilon}(x) := \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon \quad \text{si } x \geq 0, \quad F_{\varepsilon}(x) := 0 \quad \text{si } x < 0.$$

2. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels convergeant vers une constante $K \geq 1$ à déterminer plus tard (voir la question 7) et soit $u_k := (u - a_k)^+$. Montrer que si u_k est identiquement nul pour un certain k , alors le résultat est démontré.

Dorénavant on suppose que les u_k sont non identiquement nuls, pour tout k .

3. Montrer que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|u_k\|_{L^{p'}(\Omega)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

et en déduire qu'il existe une constante C_{Ω} telle que

$$\|u_k\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u_k\|_{L^{p'}(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

On pourra utiliser une injection de Sobolev.

4. Soit $\mathcal{A}_k := \{x \in \Omega, u_k(x) > 0\}$. Montrer que pour tout $\beta > 0$

$$\mathbb{1}_{\mathcal{A}_k} \leq \frac{u_{k-1}^{\beta}}{(a_k - a_{k-1})^{\beta}}.$$

5. Montrer que

$$\|u_k\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \frac{\|u_{k-1}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^{\mu}}{(a_k - a_{k-1})^{\beta}}, \quad \mu := \frac{d}{(d-2)p'} > 1.$$

6. On choisit $a_k := (1 - 2^{-k-1})K$ avec $K \geq 1$ à déterminer plus bas. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|u_0\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} < \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} = 0.$$

On pourra montrer par récurrence que

$$\log \|u_k\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq \mu^k \left(\log \|u_0\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + S_0 \log(C_{\Omega} 2^{\beta} \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{1}{2}}) + S_1 \log(2^{\beta}) \right), \quad S_{\alpha} := \sum_{j \geq 1} j^{\alpha} \mu^{-j}.$$

7. Montrer qu'il existe K tel que $\|u_0\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} < \varepsilon$.

8. Conclure.

2 Problème : un théorème de di Perna-Lions

Le but de ce problème est d'étudier l'équation de transport

$$\begin{aligned} \partial_t f(t, x) + b(x) \cdot \nabla f(t, x) &= 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ f|_{t=0} &= f_0, \end{aligned} \quad (\text{Tf})$$

où $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un champ de vecteurs, et la fonction inconnue f est à valeurs réelles. On rappelle (voit TD) que si $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ est tel que

$$\exists K > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |b(x)| \leq K \langle x \rangle,$$

alors l'équation (Tf) admet une unique solution faible $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d))$, au sens où pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) (\partial_t \varphi + \text{div}(b\varphi))(t, x) dt dx = - \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x) \varphi(0, x) dx.$$

Cette solution vérifie presque partout $f(t, X(t, x)) = f_0(x)$, où $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt}(t, x) &= b(X(t, x)) \\ X(0, x) &= x. \end{aligned}$$

Enfin

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \leq \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Définition 1. Soit $p \in [1, +\infty]$, et soit I un intervalle de \mathbb{R}_+ . On dit que f est "faiblement continue à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ ", et on note $f \in \mathcal{C}_w(I; L^p(\mathbb{R}^d))$, si $f \in L^\infty(I; L^p(\mathbb{R}^d))$ et si pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^1(I \times \mathbb{R}^d)$, l'application

$$t \in I \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) \phi(t, x) dx$$

est continue.

On se propose de démontrer le résultat suivant :

Théorème 2. Soit $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit $b \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\text{div } b \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une unique $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}_w(\mathbb{R}_+; L^\infty(\mathbb{R}^d))$ solution faible de (Tf). De surcroît, cette solution vérifie l'égalité

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) (\partial_t \varphi + \text{div}(b\varphi))(t, x) dx dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(T, x) \varphi(T, x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x) \varphi(0, x) dx. \quad (1)$$

pour tout $T > 0$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.

Existence

1. Soit $b \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\text{div } b \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit une suite régularisante

$$\rho^\varepsilon = \varepsilon^{-d} \rho(\cdot/\varepsilon), \quad \text{avec } \rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+), \quad \int \rho(x) dx = 1, \quad \text{Supp } \rho \subset B_1 \quad (2)$$

où B_1 est la boule unité de \mathbb{R}^d centrée en 0.

On pose $b^\varepsilon := b * \rho^\varepsilon$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une unique solution faible $f^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d))$ de l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t f^\varepsilon + b^\varepsilon \cdot \nabla f^\varepsilon &= 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ f^\varepsilon|_{t=0} &= f_0. \end{aligned}$$

2. Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tendant vers zéro et une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ solution faible de (Tf), telles que $f^{\varepsilon_k} \rightharpoonup^* f$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \leq \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

3. On veut à présent montrer que f est faiblement continue en temps à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour cela, on considère $\phi \in \mathcal{C}_c^1([0, +\infty[\times \mathbb{R}^d)$ fixée, et on définit, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$I^\varepsilon : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon(t, x) \phi(t, x) dx.$$

- (a) Montrer que la suite $(I^{\varepsilon_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est compacte dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$. On note I sa limite (après extraction éventuelle d'une sous-suite).
- (b) Soit $\theta \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ quelconque. Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty I^{\varepsilon_k}(t) \theta(t) dt = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) \phi(t, x) \theta(t) dt.$$

- (c) En déduire que $I(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) \phi(t, x) dx$ pour presque tout $t > 0$.

(d) Conclure.

4. Cette question est facultative. Sous les mêmes hypothèses, vérifier rapidement (en reprenant les étapes ci-dessus) que pour tout $g_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, il existe $g \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^\infty(\mathbb{R}^d))$ solution faible de l'équation de transport sous forme conservative

$$\begin{aligned} \partial_t g + \operatorname{div}(bg) &= 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ g|_{t=0} &= g_0, & x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{Tc}$$

Unicité

Soit une solution faible $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}_w(\mathbb{R}_+; L^\infty(\mathbb{R}^d))$ de (Tf) avec $f_0 = 0$, vérifiant la propriété (1) pour tout $T > 0$ et pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.

5. On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 3. On suppose que b vérifie les hypothèses du Théorème 2. Soit $\phi \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ une solution au sens des distributions dans $\mathcal{D}'([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ de l'équation

$$\partial_t \phi + \operatorname{div}(b\phi) = 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère une suite régularisante $\rho^\varepsilon = \varepsilon^{-d} \rho(\cdot/\varepsilon)$ comme en (2). On pose $\phi^\varepsilon := \phi * \rho^\varepsilon$. Alors

$$\partial_t \phi^\varepsilon + \operatorname{div}(b\phi^\varepsilon) = r^\varepsilon,$$

avec $\|r^\varepsilon\|_{L^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

- (a) Montrer que pour presque tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$,

$$r^\varepsilon(t, x) = (\operatorname{div} b(x)) \phi^\varepsilon(t, x) + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t, y) (b(x) - b(y)) \cdot \nabla_x \rho^\varepsilon(x - y) dy.$$

- (b) Pour tout $i, j \in \{1, \dots, d\}$, on définit $R_{ij} : x \in \mathbb{R}^d \mapsto x_i \partial_{x_j} \rho(x)$.

Justifier que $R_{ij} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et que $\int_{\mathbb{R}^d} R_{ij}(x) dx = -\delta_{ij}$. Dans la suite, on définit $R_{ij}^\varepsilon := \varepsilon^{-d} R_{ij}(\cdot/\varepsilon)$.

(c) Montrer que pour presque tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$,

$$r^\varepsilon(t, x) = (\operatorname{div} b(x))\phi^\varepsilon(t, x) + \sum_{1 \leq i, j \leq d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \phi(t, y) \partial_{x_i} b_j(\tau x + (1-\tau)y) R_{ij}^\varepsilon(x-y) dy d\tau.$$

(d) On pose

$$\omega(\delta) = \sup_{1 \leq i, j \leq d} \sup_{h \in \mathbb{R}^d, \|h\| \leq \delta} \|\partial_{x_i} b_j(\cdot + h) - \partial_{x_i} b_j\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Montrer que pour tout $1 \leq i, j \leq d$, pour $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 (\partial_{x_i} b_j(\tau x + (1-\tau)y) - \partial_{x_i} b_j(y)) \phi(t, y) R_{ij}^\varepsilon(x-y) dy d\tau \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ \leq \|\phi\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)} \|R_{ij}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \omega(\varepsilon). \end{aligned}$$

(e) Justifier que $(\operatorname{div} b)\phi^\varepsilon \rightarrow (\operatorname{div} b)\phi$ dans $L^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ et que $(\partial_{x_i} b_j \phi) * R_{ij}^\varepsilon \rightarrow -\delta_{ij} \partial_{x_i} b_j \phi$ dans $L^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)$.

(f) En déduire que $r^\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)$.

6. Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$ quelconque, et soit $\phi \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ une solution faible de l'équation (Tc) telle que $\phi|_{t=T} = \psi$. On pose $\phi^\varepsilon(t) := \phi(t) * \rho^\varepsilon$. Soit une fonction de troncature χ_R définie par $\chi_R = \chi(\cdot/R)$ pour $R > 0$, où $\chi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$.

(a) Montrer que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) \psi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) (\psi - (\psi * \rho^\varepsilon) \chi_R)(x) dx \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) r^\varepsilon(t, x) \chi_R(x) dx \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) b(x) \phi^\varepsilon(t, x) \cdot \nabla \chi_R(x) dx dt. \end{aligned}$$

(b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de T, R et de ε , telle que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) \psi(x) dx \right| \leq C \|f\|_{L^\infty} \left(\varepsilon + \|r^\varepsilon\|_{L^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)} + \|\phi\|_{L^\infty} \|b\|_{L^1} \frac{T}{R} \right).$$

Conclure.