

# Formules pour l'invariant de Rost

Philippe Gille \*

Anne Quéguiner-Mathieu †

**Abstract :** We provide an exact formula for the Rost invariant  $H^1(k, G) \rightarrow H^3(k)$  of special linear groups.

**Keywords :** Galois cohomology, linear algebraic groups. **MSC :** 11E72.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et notations</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Extensions de groupes</b>	<b>3</b>
2.1	Extensions de $\Gamma$ -groupes . . . . .	4
2.2	Lemme préliminaire . . . . .	5
2.3	Extensions centrales d'un groupe parfait . . . . .	6
2.4	Extension centrale d'un groupe abélien . . . . .	7
2.5	Extensions d'un groupe cyclique . . . . .	8
2.6	Extensions de groupes et 2-extensions au sens de Yoneda . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Extensions de Brylinski-Deligne</b>	<b>12</b>
3.1	Rappels . . . . .	12
3.2	Action galoisienne . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Calculs explicites pour <math>SL_1(A)</math></b>	<b>17</b>
4.1	Algèbres cycliques . . . . .	17
4.2	Calcul dans un cas particulier . . . . .	20
4.3	Démonstration du théorème 1.1 . . . . .	21
4.4	Cas d'une $p$ -algèbre . . . . .	22

---

\*UMR 8552 du CNRS, DMA, Ecole Normale Supérieure, F-75005 Paris

†Université Paris 13 (LAGA, UMR CNRS 7539) et Université Paris 12, - Institut Galilée, F-93430 Villetaneuse

<b>5</b>	<b>Restriction au centre de l'invariant de Rost</b>	<b>24</b>
<b>6</b>	<b>Groupes exceptionnels de type <math>G_2, F_4</math> et <math>E_8</math></b>	<b>28</b>
6.1	Sous-groupes finis. . . . .	29
6.2	Calcul explicite . . . . .	34
6.3	Algèbres d'Albert . . . . .	37
6.4	Groupes anisotropes possédant des sous-groupes unipotents lisses et connexes . . . . .	39

# 1 Introduction et notations

Soient  $k$  un corps,  $k_s$  une clôture séparable de  $k$  et  $\Gamma_k = \text{Gal}(k_s/k)$  le groupe de Galois absolu de  $k$ . Si  $G/k$  est un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque  $k$ -simple, on dispose de l'invariant de Rost [EKL] [GMS]

$$r_G : H^1(k, G) \rightarrow H^3(k) := H^3(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(2))$$

qui associe à la classe d'un  $G$ -torseur une classe de cohomologie galoisienne de degré 3, où pour  $d \geq 0$ ,  $H^{d+1}(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(d))$  désigne le groupe de cohomologie galoisienne modifié à la Kato [K] sur la composante  $p$ -primaire si  $k$  est de caractéristique  $p$  positive [GMS, p.151].

Le premier but de cet article est d'établir une formule exacte pour l'invariant de Rost dans le cas du groupe  $G = \text{SL}_1(A)$ , où  $A$  est une  $k$ -algèbre centrale simple. On sait alors que la suite exacte

$$1 \rightarrow \text{SL}_1(A) \rightarrow \text{GL}_1(A) \xrightarrow{\text{Nrd}_A} \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

induit un isomorphisme  $H^1(k, G) \cong k^\times / \text{Nrd}(A^\times)$ , et que le cup-produit avec la classe de Brauer  $[A] \in \text{Br}(k) = H^2(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(1))$  engendre le groupe des invariants de degré 3 de  $\text{SL}_1(A)$  [GMS, p.107]. Pour comparer ce générateur et l'invariant de Rost, on convient d'identifier le groupe de Brauer de  $k$  et  $H^2(k)$  par le cobord, comme dans [GiS, §4.4]. Notons que cette convention est opposée à celle de [GMS, p.151], donnée par le produit croisé cf. [KMRT, p.397].

**Théorème 1.1** *Soit  $A$  une  $k$ -algèbre simple centrale de degré  $n$ . On note  $[A] \in {}_n\text{Br}(k) = {}_nH^2(k)$  sa classe dans le groupe de Brauer de  $k$ . Soit  $[v] \in H^1(k, \text{SL}_1(A)) = k^\times / \text{Nrd}(A^\times)$ ,*

1. Si l'indice  $\text{ind}_k(A)$  est inversible dans  $k$ , on a

$$r_{\text{SL}_1(A)}([v]) = (v) \cup [A] \in H^3(k),$$

où  $(v)$  désigne la classe dans  ${}_n H^1(k) = k^\times/k^{\times n}$  d'un représentant quelconque de  $[v]$ .

2. Si  $k$  est de caractéristique  $p > 0$  et  $A$  est d'indice  $p^h$ , alors

$$r_{\text{SL}_1(A)}([v]) = -(v) \cup [A] \in H^3(k),$$

Pour la définition du cup-produit dans le second cas, voir le §4.4.

La méthode employée consiste à utiliser des cocycles explicites pour des algèbres cycliques, l'ingrédient fondamental étant les extensions centrales de Brylinski-Deligne [BD] qui permettent une approche galoisienne des extensions centrales de Matsumoto [Ms].

On propose ensuite trois applications du résultat principal. Le §5 précise les résultats obtenus dans [MPT] et [GaQ] concernant la restriction de l'invariant de Rost aux toseurs issus du centre du groupe. La seconde application concerne les groupes de type  $G_2$ ,  $F_4$  et  $E_8$  dont le centre est trivial. Ces groupes possèdent un sous-groupe de la forme  $A = \mu_l \times \mu_l \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  de centralisateur fini, et l'on donne au §6 une description de l'invariant de Rost pour les toseurs issus de  $A$ . Comme corollaire, on montre que la partie modulo 3 de l'invariant de Rost coïncide avec l'invariant des algèbres d'Albert construit par Rost [R1], et décrit également par Petersson-Racine dans [PR] (voir Corollaire 6.6). Enfin, on construit au §6.4 des groupes semi-simples simplement connexes anisotropes possédant des sous-groupes unipotents lisses et connexes non triviaux.

**Remerciements :** Nous remercions Skip Garibaldi et le rapporteur pour les remarques ayant permis d'améliorer cet article, ainsi que R. Parimala et G. Prasad qui ont respectivement suggéré le corollaire 6.6 et la proposition 6.8. Le second auteur remercie L. Breen et B. Oliver pour les échanges enrichissants qu'elle a eu avec eux.

## 2 Extensions de groupes

Dans toute cette partie,  $A$  désigne un groupe abélien, et

$$0 \rightarrow A \rightarrow E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$$

est une extension d'un certain groupe  $G$  par  $A$ . On rappelle que l'action de  $E$  sur  $A$  par automorphisme intérieur se factorise en une action  $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ , ce qui munit  $A$  d'une structure de  $G$ -module. De plus, si l'on fixe une action de  $G$  sur  $A$ , les extensions de  $G$  par  $A$  qui induisent cette action sont classifiées par le groupe  $H^2(G, A)$  (cf. par exemple [W, §6.6]).

## 2.1 Extensions de $\Gamma$ -groupes

Soit  $\Gamma$  un groupe. On suppose ici que  $A, E$  et  $G$  sont des  $\Gamma$ -groupes et que l'extension ci-dessus est centrale et compatible à l'action de  $\Gamma$ . Elle donne lieu à une suite exacte longue d'ensembles pointés [S1, §I.5.4]

$$1 \rightarrow H^0(\Gamma, A) \rightarrow H^0(\Gamma, E) \rightarrow H^0(\Gamma, G) \xrightarrow{\varphi} \rightarrow$$

$$H^1(\Gamma, A) \rightarrow H^1(\Gamma, E) \rightarrow H^1(\Gamma, G) \xrightarrow{\Delta} H^2(\Gamma, A).$$

Nous nous proposons de donner une description du bord  $\Delta$  en termes d'extensions de groupes. On rappelle que l'ensemble des 1-cocycles  $Z^1(\Gamma, G)$  n'est pas autre chose que l'ensemble des sections de  $G \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ . En effet, si  $z \in Z^1(\Gamma, G)$ , on lui associe la section  $u_z : \Gamma \rightarrow G \times \Gamma$ ,  $\sigma \mapsto z_\sigma \sigma$  (*ibid*, §5.1, exercice 1). Etant donné un 1-cocycle  $z : \Gamma \rightarrow G$ , on peut retirer en arrière par  $u_z$  l'extension

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E \times \Gamma & \longrightarrow & G \times \Gamma & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \uparrow & & u_z \uparrow & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E(z) & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

**Lemme 2.1**  $\Delta([z]) = [E(z)] \in H^2(\Gamma, A)$ .

*Démonstration* : On vérifie par calcul. Pour chaque  $\sigma \in \Gamma$ , on choisit un relevé par  $e_\sigma \in E$  de  $z_\sigma$  de sorte que  $z_e$  est l'élément neutre de  $E$ . Alors  $\Delta([z])$  est par définition la classe du 2-cocycle

$$a_{\sigma, \tau} = e_\sigma {}^\sigma e_\tau e_{\sigma\tau}^{-1} \in A.$$

De l'autre coté,  $f_\sigma := e_\sigma \sigma \in E(z)$  définit un relevé de  $\sigma$  pour le morphisme  $E(z) \rightarrow \Gamma$ . La classe de  $E(z)$  dans  $H^2(\Gamma, A)$  est celle du 2-cocycle (voir [W, th. 6.6.3])

$$f_\sigma f_\tau f_{\sigma\tau}^{-1} = e_\sigma \sigma e_\tau \tau \tau^{-1} \sigma^{-1} e_{\sigma\tau}^{-1} = e_\sigma (\sigma e_\tau \sigma^{-1}) e_{\sigma\tau}^{-1} = e_\sigma {}^\sigma e_\tau e_{\sigma\tau}^{-1} = a_{\sigma, \tau}.$$

□

On va maintenant établir une version tordue. Soit  $z \in Z^1(\Gamma, G)$ . On peut tordre l'extension  $1 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$  par  $z$

$$1 \rightarrow A \rightarrow {}_z E \rightarrow {}_z G \rightarrow 1$$

et étudier le bord  $\Delta_z : H^1(\Gamma, {}_z G) \rightarrow H^2(\Gamma, A)$  [S1, §I.5.7]. Un 1-cocycle  $w \in Z^1(\Gamma, {}_z G)$  n'est pas autre chose qu'une section  $u_w$  de la projection  $G \rtimes^z \Gamma = {}_z G \rtimes \Gamma \rightarrow \Gamma$  via  $\sigma \mapsto w_\sigma \sigma$ . En appliquant la formule ci-dessus, on obtient que le bord  $\Delta_z([w])$  est la classe de l'extension retirée en arrière

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E \rtimes^z \Gamma & \longrightarrow & G \rtimes^z \Gamma & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \uparrow & & u_w \uparrow & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E(w) & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

## 2.2 Lemme préliminaire

On s'intéresse aux sous-groupes suivants du groupe  $\text{Aut}(E)$  des automorphismes de  $E$  :

$$\text{Aut}(E, A) = \left\{ \phi \in \text{Aut}(E) \mid \phi(A) = A \right\},$$

et

$$\text{Aut}_A(E) = \left\{ \phi \in \text{Aut}(E) \mid \phi|_A = \text{Id}|_A \right\}.$$

On rappelle le fait élémentaire suivant :

**Lemme 2.2** *Le noyau de l'application naturelle  $\text{Aut}_A(E) \rightarrow \text{Aut}(G)$  est en bijection avec le groupe  $Z^1(G, A)$  des 1-cocycles de  $G$  à valeurs dans  $A$ .*

*Démonstration* : Soit  $\alpha = (a_g) \in Z^1(G, A)$  un 1-cocycle. On lui associe l'application  $\phi_\alpha : E \rightarrow E$ , définie par  $\phi_\alpha(x) = a_{p(x)}x$ , pour tout  $x \in E$ . Quels que soient  $x_1, x_2 \in E$ , on a

$$\phi_\alpha(x_1 x_2) = a_{p(x_1 x_2)} x_1 x_2 = a_{p(x_1)} x_1 a_{p(x_2)} x_1^{-1} x_1 x_2 = \phi_\alpha(x_1) \phi_\alpha(x_2).$$

Ainsi,  $\phi_\alpha$  est un morphisme, dont la restriction à  $A$  est l'identité. Son noyau, qui est contenu dans  $A$ , est trivial. Enfin, si  $x \in E$ , on a  $x = \phi_\alpha(a_{p(x)}^{-1}x)$ , de

sorte que  $\phi_\alpha \in \text{Aut}_A(E)$ . Comme  $p(\phi_\alpha(x)) = p(x)$ , l'automorphisme induit sur  $G$  est trivial.

Ainsi, l'application  $\alpha \mapsto \phi_\alpha$  est un morphisme de  $Z^1(G, A)$  dans le noyau  $\ker(\text{Aut}_A(E) \rightarrow \text{Aut}(G))$ . Pour montrer qu'elle est bijective, on va exhiber sa réciproque. Soit donc  $\phi : E \xrightarrow{\sim} E$  un automorphisme induisant l'identité sur  $A$  et sur  $G$ . L'application  $x \in E \rightarrow \phi(x)x^{-1}$  induit une application  $\psi : G = E/A \rightarrow A$ . De plus, si  $g_1$  et  $g_2 \in G$  ont pour antécédents respectifs  $x_1$  et  $x_2 \in E$ , alors

$$\psi(g_1g_2) = \phi(x_1x_2)(x_1x_2)^{-1} = \psi(g_1)x_1\psi(g_2)x_1^{-1} = \psi(g_1)(g_1.\psi(g_2)).$$

On a donc bien défini ainsi une application de  $\ker(\text{Aut}_A(E) \rightarrow \text{Aut}(G))$  dans  $Z^1(G, A)$ , qui par un calcul direct est la réciproque de la précédente.  $\square$

### 2.3 Extensions centrales d'un groupe parfait

On suppose dans ce paragraphe que l'extension de groupes

$$0 \rightarrow A \rightarrow E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1,$$

est centrale. Autrement dit,  $A$  est contenu dans le centre  $Z(E)$  de  $E$ , de sorte que l'action de  $G$  sur  $A$  est triviale. Si de plus le groupe  $G$  est parfait, alors  $Z^1(G, A) = \text{Hom}(G, A) = 0$ . Par le lemme précédent, le morphisme

$$\text{Aut}_A(E) \hookrightarrow \text{Aut}(G)$$

est donc injectif. On en déduit que deux automorphismes de  $\text{Aut}(E, A)$  qui induisent les mêmes morphismes sur  $A$  et sur  $G$  sont égaux, d'où un morphisme injectif

$$\text{Aut}(E, A) \hookrightarrow \text{Aut}(A) \times \text{Aut}(G).$$

**Lemme 2.3** *On considère une extension centrale*

$$0 \rightarrow A \rightarrow E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1,$$

*d'un groupe parfait  $G$ , et une action  $f = (f_1, f_2) : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(A) \times \text{Aut}(G)$  d'un groupe  $\Gamma$  sur  $A$  et sur  $G$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'image de  $f$  est incluse dans le sous-groupe*

$$\text{Aut}(E, A) \hookrightarrow \text{Aut}(A) \times \text{Aut}(G),$$

*i.e. l'action  $f$  s'étend à  $E$ , et ce de manière unique ;*



où  $G_{ab} = G/[G, G] = H_1(G, \mathbb{Z})$  est l'abélianisé de  $G$  (cf [W, ex 6.1.5(3) et Thm 6.1.11]). Supposons de plus que  $G = B$  est abélien. Alors  $H_2(B, \mathbb{Z}) = \Lambda^2 B$  (cf [Bro, Thm V.6.4.(iii)]) et la suite exacte devient

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(B, A) \rightarrow H^2(B, A) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}(\Lambda^2 B, A) \rightarrow 0.$$

De plus, par [Bro, §V.6, exercice 5], l'image sous  $\delta$  de la classe d'un cocycle  $f \in Z^2(B, A)$  est donnée par  $b_1 \wedge b_2 \mapsto f(b_1, b_2) - f(b_2, b_1)$ . En combinant avec [GiS, Exemple 3.2.6], on en déduit aisément

**Lemme 2.4** *Soit*

$$0 \rightarrow A \rightarrow E \xrightarrow{p} B \rightarrow 1$$

*une extension centrale d'un groupe abélien  $B$ . L'image sous  $\delta$  de sa classe dans  $H^2(B, A)$  est le "relevé des commutateurs"*

$$\begin{aligned} \Lambda^2 B &\rightarrow A \\ b_1 \wedge b_2 &\mapsto [e_1, e_2] = e_1 e_2 e_1^{-1} e_2^{-1}, \end{aligned}$$

où  $e_i \in E$  vérifie  $p(e_i) = b_i$ .

**Remarque 2.5** Soit  $\phi : \Lambda^2 B \rightarrow A$  un morphisme; on peut le voir comme une application bilinéaire alternée  $B \times B \rightarrow A$ , donc comme un 2-cocycle  $\phi \in Z^2(B, A)$ . Il faut prendre garde que l'image sous  $\delta$  de sa classe dans  $H^2(B, A)$  est  $2\phi$ . En effet, puisque  $\phi$  est alternée, la formule rappelée ci-dessus donne

$$\delta(\phi)(b_1 \wedge b_2) = \phi(b_1, b_2) - \phi(b_2, b_1) = 2\phi(b_1, b_2).$$

## 2.5 Extensions d'un groupe cyclique

On suppose dans ce paragraphe que le groupe  $G$  est cyclique d'ordre  $n$ . Le choix d'un générateur  $\sigma \in G$  permet d'identifier  $H^2(G, A)$  avec le groupe  $A^G/N(A)$  où  $N$  est l'application du  $G$ -module  $A$  dans lui-même définie par  $N(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i \cdot a$  (cf. par exemple [GiS, Exemple 3.2.9]). On a alors :

**Lemme 2.6** *Soit  $G$  un groupe cyclique d'ordre  $n$ , de générateur  $\sigma$ , et soit*

$$0 \rightarrow A \rightarrow E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1,$$

*une extension de  $G$  par  $A$ . Choisissons  $e \in E$  tel que  $p(e) = \sigma$ . Alors,  $e^n \in A^G$  et sa classe dans  $A^G/N(A) \simeq H^2(G, A)$  est la classe de l'extension  $E$ .*

*Démonstration.* Clairement,  $e^n$  est dans le noyau de  $p$ ; de plus,  $\sigma$  agissant sur  $A$  par conjugaison par  $e$ , l'élément  $e^n$  est invariant sous l'action de  $G$ . Montrons maintenant que sa classe dans  $A^G/N(A)$  est celle de l'extension  $E$ .

Pour cela, on considère le caractère  $\chi : G \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  associé au choix de  $\sigma$ , c'est-à-dire défini par  $\chi(\sigma) = 1$ , et le bord  $\partial\chi \in H^2(G, \mathbb{Z})$  provenant de la suite exacte de  $G$ -modules

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

D'après [GiS, 3.4.11(3)], l'isomorphisme entre  $A^G/N(A)$  et  $H^2(G, A)$  est le cup-produit par  $\partial\chi$ . En particulier, il est fonctoriel en  $A$ . Il suffit donc de montrer le théorème pour l'extension  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$ , où  $p$  est définie par  $p(1) = \sigma$ . On vérifie facilement (cf [GiS, Example 3.2.6]) que sa classe dans  $H^2(G, \mathbb{Z})$  est représentée par le 2-cocycle

$$(\sigma^i, \sigma^j) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } i + j < n, \\ 1 & \text{si } i + j \geq n, \end{cases}$$

qui n'est rien d'autre que  $\partial\chi$ . Elle correspond donc, dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^G/N(\mathbb{Z})$  à  $\bar{1}$ . Or, si l'on choisit  $e = 1 \in \mathbb{Z}$  comme relevé de  $\sigma$ , on a  $e^n = n$  qui a pour antécédent  $1 \in A^G = \mathbb{Z}$ . Le théorème est donc prouvé dans ce cas.

Le cas général s'en déduit de la manière suivante. Etant donnée l'extension

$$0 \rightarrow A \rightarrow E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1,$$

le choix d'un élément  $e \in E$  tel que  $p(e) = \sigma$  induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{n} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \longrightarrow 0 \\ & & \psi \downarrow & & \phi \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \xrightarrow{p} & G \longrightarrow 0, \end{array}$$

où  $\phi$  est définie par  $\phi(1) = e$ , de sorte que  $\psi$  vérifie  $\psi(1) = e^n$ . Ainsi, l'extension qui nous intéresse est le push-out suivant  $\psi$  de la précédente et l'élément correspondant dans  $A^G/N(A)$  est la classe de  $\psi(1) = e^n$ .  $\square$

## 2.6 Extensions de groupes et 2-extensions au sens de Yoneda

Fixons une action  $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ , de sorte que  $A$  est muni d'une structure de  $G$ -module. Le groupe  $H^2(G, A)$  est isomorphe au groupe  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^2(\mathbb{Z}, A)$

des 2-extensions de  $\mathbb{Z}[G]$ -modules au sens de Yoneda (cf. [Mc, IV Cor 5.2]). On va ici décrire explicitement cet isomorphisme en terme d'extensions de groupes et de  $G$ -modules.

**Lemme 2.7** *Considérons une suite exacte de  $G$ -modules :*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{d} C \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

1. Pour tout  $c \in C$ , l'ensemble

$$E_c = \left\{ (g, b) \in G \times B \mid d(b) = g.c - c \right\},$$

est muni de la loi de groupe suivante  $(g_1, b_1)(g_2, b_2) = (g_1g_2, b_1 + g_1.b_2)$ . De plus,  $E_c$  est une extension de  $G$  par  $A$  d'action  $\theta$ .

2. Si  $c$  et  $c' \in C$  ont la même image dans  $\mathbb{Z}$ , alors les extensions  $E_c$  et  $E_{c'}$  sont canoniquement isomorphes.

*Démonstration.* (1) Si  $d(b_i) = g_i.c - c$  pour  $i = 1, 2$ , on a

$$d(b_1 + g_1.b_2) = g_1.c - c + g_1.(g_2.c - c) = (g_1g_2).c - c.$$

Ainsi, la loi définie ci-dessus est bien une loi interne sur  $E_c$ ; on vérifie facilement qu'elle munit  $E_c$  d'une structure de groupe. En particulier, l'inverse de  $(g, b) \in E_c$  est  $(g, b)^{-1} = (g^{-1}, -g^{-1}.b)$ .

Comme l'image dans  $\mathbb{Z}$  de  $g.c - c$  est triviale, la projection  $E_c \rightarrow G$  est surjective; son noyau  $\{(1_G, a), a \in A\}$  est isomorphe à  $A$ . Ceci prouve que  $E_c$  est une extension de  $G$  par  $A$ . De plus, l'action induite de  $G$  sur  $A$  est donnée par  $(g, 0)(1_G, a)(g^{-1}, 0) = (g, g.a)(g^{-1}, 0) = (1_G, g.a)$ , qui coïncide bien avec l'action initiale.

(2) Si  $c$  et  $c'$  ont la même image dans  $\mathbb{Z}$ , il existe  $b_0 \in B$  tel que  $c' = c + d(b_0)$ . L'application

$$\begin{aligned} E_c &\rightarrow E_{c'} \\ (g, b) &\mapsto (g, b + g.b_0 - b_0), \end{aligned}$$

qui agit comme l'identité sur  $\{(1_G, a), a \in A\}$ , est un isomorphisme entre ces deux extensions.  $\square$

**Proposition 2.8** *Soit  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$  une suite exacte de  $G$ -modules. Sa classe dans  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^2(\mathbb{Z}, A) \simeq H^2(G, A)$  est la classe de l'extension de groupes  $0 \rightarrow A \rightarrow E_c \rightarrow G \rightarrow 1$ , où  $c$  est un élément de  $C$  d'image 1 dans  $\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Notons tout d'abord que, en vertu du Lemme 2.7(2), la classe de l'extension  $E_c$  ne dépend pas du choix de  $c \in C$  d'image 1 dans  $\mathbb{Z}$ .

Pour montrer la proposition, on utilise la description, donnée par Mac Lane dans son livre [Mc, §IV.6], de l'opération inverse, qui à une extension de groupe d'action  $\theta$

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$$

associe sa classe caractéristique dans  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^2(\mathbb{Z}, A)$ . Notant  $\mathbb{Z}[G]^{(E)}$  le  $G$ -module libre de base  $E$ , cette classe est représentée par

$$\chi(E) : \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}[G]^{(E)}/L \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

où  $L$  est engendré par  $[1_G]$  et les  $[e_1 e_2] - p(e_1).[e_2] - [e_1]$  pour  $e_1, e_2$  parcourant  $E$ . Les morphismes  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis respectivement par  $\alpha(a) = [i(a)] \in \mathbb{Z}[G]^{(E)}/L$  et  $\beta([e]) = [p(e)] - [1_G]$ , pour tout  $e \in E$ . Enfin,  $\epsilon$  est le morphisme d'augmentation.

L'élément  $1_G \in \mathbb{Z}[G]$  a pour image 1 dans  $\mathbb{Z}$ . Pour montrer la proposition, il suffit donc de remarquer que l'application  $e \in E \mapsto (p(e), [e])$  est un isomorphisme entre l'extension  $E_{1_G}$  associée à  $\chi(E)$  suivant le Lemme 2.7 et l'extension initiale  $E$ .  $\square$

Ce formalisme est bien commode quand on a affaire à une situation équivariante, c'est-à-dire quand on a une action

$$f = (f_1, f_2) : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(A) \times \text{Aut}(G)$$

d'un groupe  $\Gamma$  sur  $A$  et sur  $G$  qui est compatible avec l'action de  $G$  sur  $A$ , c'est-à-dire telle que  $f_1(\gamma)(g.a) = f_2(\gamma)(g) \cdot f_1(\gamma)(a)$  pour tous  $\gamma \in \Gamma$ ,  $g \in G$  et  $a \in A$ . En d'autres mots, on a une structure de  $G \rtimes \Gamma$ -module sur  $A$  définie par

$$(g\gamma).a = g.f_1(\gamma)(a).$$

Supposons que la suite exacte de  $G$ -modules

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

est en réalité une suite de  $G \rtimes \Gamma$ -modules. Pour tout  $c \in C$ , on peut alors définir par le Lemme 2.7 une extension  $E_c$  de  $G$  par  $A$  et une extension  $\tilde{E}_c$

de  $G \rtimes \Gamma$  par  $A$ . De plus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 1 & & 1 & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E_c & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \tilde{E}_c & \longrightarrow & G \rtimes \Gamma & \longrightarrow & 1. \\
& & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
& & & \Gamma & = & \Gamma & & & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
& & & 1 & & 1 & & & 
\end{array}$$

**Lemme 2.9** *Si  $c \in C^\Gamma$ , alors le groupe  $\Gamma$  agit sur  $E_c$ ; de plus,  $\tilde{E}_c$  est isomorphe à  $E_c \rtimes \Gamma$ .*

*Démonstration* Si  $c$  est invariant sous l'action de  $\Gamma$ , alors pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et  $(g, b) \in E_c$ , le couple  $(\gamma \cdot g, \gamma \cdot b)$  appartient à  $E_c$ . Ceci définit une action de  $\Gamma$  sur  $E_c$ . De plus, on peut vérifier que l'application  $\tilde{E}_c \rightarrow E_c \times \Gamma$ , qui à  $(g\gamma, b)$  associe  $((g, b), \gamma)$  induit un isomorphisme de groupes entre  $\tilde{E}_c$  et  $E_c \rtimes \Gamma$ ,

### 3 Extensions de Brylinski-Deligne

#### 3.1 Rappels

Soit  $G/k$  un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque  $k$ -simple. On note  $H^i(G, \mathcal{K}_j)$  les groupes de  $K^M$ -cohomologie de la variété  $G$  définis par les complexes de Gersten [GiS, §8.1]. On a alors  $H^0(G, \mathcal{K}_2) = K_2(k)$  et  $H^1(G, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$  (voir [BD, Prop. 4.6] si  $G$  est déployé et [GMS, (6.7), (6.10) et (6.12), p.116-118] pour le cas général). Ainsi, en revenant à définition de la cohomologie en termes de complexes de Gersten, le complexe de  $G(k)$ -modules

$$K_2(k(G)) \rightarrow \bigoplus_{x \in G^{(1)}} k(x)^\times \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in G^{(2)}} \mathbb{Z}$$

induit une 2-extension

$$0 \rightarrow K_2(k) \rightarrow K_2(k(G)) \rightarrow \mathcal{Z}(G) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

où

$$\mathcal{Z}(G) = \ker \left( \bigoplus_{x \in G^{(1)}} k(x)^\times \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in G^{(2)}} \mathbb{Z} \right).$$

Cette extension étant équivariante pour l'action de  $G(k)$  par translation à gauche, elle définit une classe de  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}[G(k)]}^2(\mathbb{Z}, K_2(k)) = H^2(G(k), K_2(k))$ . D'après la proposition 2.8, cette classe est représentée par l'extension centrale de Brylinski-Deligne

$$(\mathcal{E}(G, c, k)) \quad 0 \rightarrow K_2(k) \rightarrow \mathcal{E}(G, c, k) \rightarrow G(k) \rightarrow 1,$$

où  $c \in \mathcal{Z}(G)$  est un élément d'image 1 dans  $\mathbb{Z}$ , et  $\mathcal{E}(G, c, k)$  est définie comme dans le lemme 2.7(1). Notons que l'extension  $\mathcal{E}(G, c, k)$ , contrairement à sa classe, dépend explicitement du choix de  $c$ , dorénavant fixé.

**Remarque 3.1** Dans l'article [BD], cette extension n'est pas définie de cette façon alors qu'elle l'était dans une version préliminaire. Les deux constructions coïncident et c'est d'ailleurs celle présentée ici qui est utilisée dans [Gi1].

Notons  $\text{Aut}(G)$  le  $k$ -groupe algébrique des automorphismes de  $G$ . Le groupe  $\text{Aut}(G)(k)$  agit naturellement sur le complexe ci-dessus, d'où une action sur la 2-extension de  $G(k)$ -modules associée, qui est triviale sur  $K_2(k)$ . De plus, on a :

- Lemme 3.2**
1. L'action de  $\text{Aut}(G)(k)$  sur  $H^1(G, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$  est triviale.
  2. Si  $G(k)$  est parfait, alors l'extension de Brylinski-Deligne  $\mathcal{E}(G, c, k)$  est canoniquement  $\text{Aut}(G)(k)$ -équivariante.

*Démonstration.*

(1) Considérons une représentation fidèle  $\rho : G \rtimes \text{Aut}(G) \rightarrow \text{SL}_N$ , et notons  $\rho_0 : G \rightarrow \text{SL}_N$  sa restriction à  $G$ . Le morphisme induit

$$\mathbb{Z} = H^1(\text{SL}_N, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\rho_0^*} H^1(G, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$$

est la multiplication par un entier strictement positif  $d_{\rho_0}$ , l'indice de Dynkin de  $\rho_0$  [GMS, p.122]. Soit maintenant  $f \in \text{Aut}(G)(k)$ . Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho_0} & \text{SL}_N \\ f \downarrow & & \downarrow \text{Int}(\rho(1,f)) \\ G & \xrightarrow{\rho_0} & \text{SL}_N, \end{array}$$

on déduit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(G, \mathcal{K}_2) & \xleftarrow{\rho_0^*} & H^1(\text{SL}_N, \mathcal{K}_2) \\ f^* \uparrow & & \uparrow (\text{Int}(\rho(1,f)))^* \\ H^1(G, \mathcal{K}_2) & \xleftarrow{\rho_0^*} & H^1(\text{SL}_N, \mathcal{K}_2). \end{array}$$

Or la flèche verticale de droite est l'identité de  $\mathbb{Z}$  puisque l'action de  $\text{SL}_N$  sur lui-même par automorphismes intérieurs induit une action triviale de  $\text{SL}_N(k)$  sur  $H^1(\text{SL}_N, \mathcal{K}_2)$  (cf. *loc. cit.*, lemma 6.9). Par commutativité du diagramme, il en est de même de celle de gauche, ce qui prouve la première assertion.

(2) La description explicite de  $\mathcal{E}(G, c, k) \subset G(k) \times K_2(k(G))$  donnée par 2.7(1) montre que l'action de  $f \in \text{Aut}(G)(k)$  sur  $G(k) \times K_2(k(G))$ , induit une application

$$\mathcal{E}(G, c, k) \rightarrow \mathcal{E}(G, f.c, k),$$

qui vaut l'identité sur  $K_2(k)$ . Ainsi,  $\mathcal{E}(G, f.c, k)$  n'est rien d'autre que le pull-back  $(f^{-1})^*(\mathcal{E}(G, c, k))$ . Or, comme l'action de  $\text{Aut}(G)(k)$  sur  $H^1(G, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$  est triviale, les éléments  $c$  et  $f.c$  ont la même image dans  $\mathbb{Z}$ . Par le lemme 2.7(2), on en déduit que les extensions de Brylinski-Deligne correspondante  $\mathcal{E}(G, c, k)$  et  $(f^{-1})^*(\mathcal{E}(G, c, k))$  sont équivalentes. Enfin,  $G(k)$  étant supposé parfait, ceci prouve que l'action de  $\text{Aut}(G)(k)$  s'étend à  $\mathcal{E}(G, c, k)$  par le lemme 2.3.  $\square$

## 3.2 Action galoisienne

Soit maintenant  $L/k$  une extension galoisienne finie de groupe  $\Gamma$ . En poussant  $c$  dans  $\mathcal{Z}(G_L)$ , on obtient une extension centrale

$$(\mathcal{E}(G, c, L)) \quad 0 \rightarrow K_2(L) \rightarrow \mathcal{E}(G, c, L) \rightarrow G(L) \rightarrow 1.$$

On a alors :

**Lemme 3.3** *Si  $G(L)$  est parfait, l'extension  $\mathcal{E}(G, c, L)$  est canoniquement  $\text{Aut}(G)(L) \rtimes \Gamma$ -équivariante.*

*Démonstration.* Les groupes  $\Gamma$  et  $\text{Aut}(G)(L)$  agissent tous deux sur l'extension  $\mathcal{E}(G, c, L)$  en vertu des lemmes 2.9 et 3.2(2). Il est clair que sur  $K_2(L)$  et sur  $G(L)$ , ces deux actions sont compatibles, c'est-à-dire induisent un morphisme

$$\text{Aut}(G)(L) \rtimes \Gamma \rightarrow \text{Aut}(K_2(L)) \times \text{Aut}(G(L)).$$

Or on vient de voir que les images de  $\text{Aut}(G)(L)$  et de  $\Gamma$  sont toutes deux incluses dans

$$\text{Aut}(\mathcal{E}(G, c, L), K_2(L)) \subset \text{Aut}(K_2(L)) \times \text{Aut}(G(L)).$$

Le morphisme ci-dessus se factorise donc bien par  $\text{Aut}(\mathcal{E}(G, c, L), K_2(L))$ .  $\square$

**Lemme 3.4** *On suppose  $G(L)$  parfait, et on se donne un 1-cocycle  $z \in Z^1(\Gamma, \text{Aut}(G)(L))$ . Soit  $\phi : G \times_k L \cong {}_zG \times_k L$  une trivialisatation satisfaisant  $z_\gamma = \phi^{-1}\gamma(\phi)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . On pose*

$$d := \phi^*(c_L) \in \mathcal{Z}({}_zG \times_k L)$$

*Alors l'extension tordue par  $z$*

$$0 \rightarrow K_2(L) \rightarrow {}_z\mathcal{E}(G, c, L) \rightarrow {}_zG(L) \rightarrow 1$$

*est  $\text{Aut}({}_zG)(L) \rtimes \Gamma$ -isomorphe à l'extension  $\mathcal{E}({}_zG, d, L)$ .*

Notons que la propriété galoisienne  $\mathcal{Z}({}_zG) = \mathcal{Z}({}_zG \times_k L)^\Gamma$  est cruciale ici [CTR, prop. 3.6] pour savoir que  $d \in \mathcal{Z}({}_zG)$ .

*Démonstration.* La description explicite de  ${}_z\mathcal{E}(G, c, L)$  et  $\mathcal{E}({}_zG, d, L)$  donnée par 2.7(1) montre que  $\phi$  induit un isomorphisme entre ces deux extensions de  ${}_zG(L)$  par  $K_2(L)$ . Toutes deux sont  $\text{Aut}({}_zG)(L) \rtimes \Gamma$  équivariantes, mais il n'est pas clair à priori que l'isomorphisme entre les deux soit également équivariant. Le lemme 2.3 permet de le montrer sans aucun calcul ; il suffit en effet d'observer que l'action de  $\text{Aut}({}_zG)(L) \rtimes \Gamma$  sur  $K_2(L)$  et  ${}_zG(L)$  est la même pour chacune des deux extensions.  $\square$

La proposition qui suit est l'ingrédient clef pour effectuer des calculs. Elle repose sur le lien, établi dans [Gi1, Lemme 5], entre le bord associé à

l'extension de Brylinski-Deligne, et l'invariant de Rost. Précisément, étant donné un 1-cocycle  $z \in Z^1(\Gamma, \text{Aut}(G)(L))$ , on y montre l'anti-commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Gamma, {}_zG(L)) & \xrightarrow{r_{zG}} & \text{Ker}(H^3(k) \rightarrow H^3(L)) \\ \rho \downarrow & & \parallel \\ H^2(\Gamma, K_2(L)) & \xrightarrow{a_k^L} & \text{Ker}(H^3(k) \rightarrow H^3(L)), \end{array}$$

où  $r_{zG}$  désigne l'invariant de Rost,  $a_k^L$  est la flèche construite par B. Kahn dans [K1], et  $\rho : H^1(\Gamma, {}_zG(L)) \rightarrow H^2(\Gamma, K_2(L))$  est le bord associé à l'extension de Brylinski-Deligne  $\mathcal{E}({}_zG, d_0, L)$  pour un certain  $d_0 \in \mathcal{Z}({}_zG)$  d'image 1 dans  $\mathbb{Z} = H^1({}_zG, \mathcal{K}_2)$ . On a alors :

**Proposition 3.5** *On suppose  $G(L)$  parfait. On se donne  $u \in Z^1(\Gamma, {}_zG(L))$ , vu comme une section du morphisme  $G(L) \rtimes^z \Gamma \rightarrow \Gamma$ , et on considère l'extension retirée en arrière*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_2(L) & \longrightarrow & \mathcal{E}(G, c, L) \rtimes^z \Gamma & \longrightarrow & G(L) \rtimes^z \Gamma \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \cup & & u \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & K_2(L) & \longrightarrow & E(z, u) & \longrightarrow & \Gamma \longrightarrow 1. \end{array}$$

Alors on a

$$a_k^L(r_{zG}([u])) = -[E(z, u)] \in H^2(\Gamma, K_2(L)).$$

*Démonstration.* Comme on vient de l'expliquer, il suffit de calculer l'image de  $[u] \in H^1(\Gamma, {}_zG(L))$  sous le bord associé à l'extension de Brylinski-Deligne  $\mathcal{E}({}_zG, d_0, L)$ , où  $d_0 \in \mathcal{Z}({}_zG)$  est un élément d'image 1 dans  $\mathbb{Z} = H^1({}_zG, \mathcal{K}_2)$ . Si l'on prend  $d_0 = \phi^*(c_L)$ , le lemme 3.4 indique que l'on peut remplacer  $\mathcal{E}({}_zG, d_0, L)$  par l'extension tordue  ${}_z\mathcal{E}(G, c, L)$ . La version tordue du lemme 2.1 montre que l'extension de groupes  $E(z, u)$  ci-dessus représente la classe  $\rho([u])$ .  $\square$

## 4 Calculs explicites pour $\mathrm{SL}_1(A)$

### 4.1 Algèbres cycliques

**Proposition 4.1** *Soient  $L/k$  une extension galoisienne cyclique de degré  $n$  et de groupe  $\Gamma = \langle \sigma \rangle$ , et  $b \in k^\times$ . On considère la  $k$ -algèbre cyclique*

$$A = (L/k, \sigma, b) = L \oplus Ly \cdots \oplus Ly^{n-1}$$

définie par les relations  $y^n = b$  et  $\lambda y = y\sigma(\lambda)$ , pour  $\lambda \in L$ . Quel que soit  $[v] \in k^\times / \mathrm{Nrd}(A^\times) \cong H^1(\Gamma, \mathrm{SL}_1(A)(L))$ , on a

$$a_k^L\left(r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v])\right) = [\{v, b\}] \in K_2(k)/N(K_2(L)) \cong H^2(\Gamma, K_2(L)).$$

*Démonstration.* Notons

$$f_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_n(k).$$

On rappelle (cf. [GiS, §2.5]) que l'algèbre  $A$  est la tordue  $A = {}_z M_n(k)$  de  $M_n(k)$  par le cocycle  $z : \Gamma \rightarrow \mathrm{PGL}_n(L)$ , défini par  $\sigma^i \mapsto [f_b^i]$ . Un point remarquable est que  $z$  est à valeurs dans  $\mathrm{PGL}_n(k)$ , c'est-à-dire définit un morphisme de groupes  $\Gamma \rightarrow \mathrm{PGL}_n(k)$ . On se donne également une trivialisatation  $\phi : M_n(L) \cong A \otimes_k L$  telle que  $z_\tau = \phi^{-1}\tau(\phi)$  pour tout  $\tau \in \Gamma$ . Pour utiliser la proposition 3.5, on doit réaliser la classe  $[u]$  par un cocycle  $u \in Z^1(\Gamma, {}_z \mathrm{SL}_n(L))$ . Le  $\mathrm{SL}_1(A)$ -torseur correspondant à  $v$  est donné par l'équation  $v = \mathrm{Nrd}_A(y)$ .

Notons  $(\lambda_i)_{i=1, \dots, n}$  la base canonique des cocaractères du tore diagonal  $\mathbb{G}_m^n$  de  $\mathrm{GL}_n$ . L'élément  $\phi(\lambda_1(v)) \in \mathrm{GL}_1(A)(L)$  satisfait  $\mathrm{Nrd}_{A_L}(\phi(\lambda_1(v))) = \mathrm{Nrd}_{M_n(k)}(\lambda_1(v)) = \det(\lambda_1(v)) = v$ . Un 1-cocycle représentant ce toseur est donc donné par  $u_\sigma = \phi(\lambda_1(v))^{-1} \sigma(\phi(\lambda_1(v))) \in \mathrm{SL}_1(A)(L)$ . Vu comme section du morphisme  $\mathrm{SL}_n(L) \rtimes^z \Gamma \rightarrow \Gamma$ , ce cocycle est défini par l'homomorphisme

$u : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}_n(L) \rtimes^z \Gamma$ ,  $\sigma \rightarrow t\sigma$ , où

$$t = \lambda_1(v)^{-1}\lambda_2(v) = \begin{bmatrix} v^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_n(L).$$

On se donne  $c \in \mathcal{Z}(\mathrm{SL}_n)$  d'image 1 dans  $H^1(\mathrm{SL}_n, \mathcal{K}_2)$ . On considère alors l'extension retirée en arrière

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_2(L) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathrm{SL}_n, c, L) \rtimes^z \Gamma & \longrightarrow & \mathrm{SL}_n(L) \rtimes^z \Gamma \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \cup & & \uparrow u \\ 0 & \longrightarrow & K_2(L) & \longrightarrow & E(z, u) & \longrightarrow & \Gamma \longrightarrow 1 \end{array}$$

dont on va calculer la classe. Suivant le lemme 2.6, celle-ci est donnée par l'élément

$$(\tilde{t}\sigma)^n \in K_2(L) \subset \mathcal{E}(\mathrm{SL}_n, c, L) \rtimes^z \Gamma$$

où  $\tilde{t}$  désigne un relevé de  $t$  dans  $\mathcal{E}(\mathrm{SL}_n, c, L)$  que l'on choisit bien sûr provenant de  $\mathcal{E}(\mathrm{SL}_n, c, k)$ . En utilisant la forme précise du cocycle  $z$ , on écrit alors

$$\begin{aligned} (\tilde{t}\sigma)^n &= \tilde{t}(\sigma\tilde{t}\sigma^{-1}) \cdots (\sigma^{n-1}\tilde{t}\sigma^{1-n}) \\ &= \tilde{t}(f_b.\sigma(\tilde{t})) \cdots (f_b^{n-1}.\sigma^{n-1}(\tilde{t})) \\ &= \tilde{t}(f_b.\tilde{t}) \cdots (f_b^{n-1}.\tilde{t}) \in \mathcal{E}(\mathrm{SL}_n, c, L). \end{aligned} \tag{1}$$

Notant  $T = \mathrm{Ker}(\mathbb{G}_m^n \rightarrow \mathbb{G}_m)$  le tore maximal standard de  $\mathrm{SL}_n$  et  $T_{ad} = \mathbb{G}_m^n/\mathbb{G}_m$  celui de  $\mathrm{PGL}_n$ , on a alors besoin de l'accouplement

$$h : T_{ad}(L) \times T(L) \rightarrow K_2(L)$$

défini par  $h(x, y) = (x.\tilde{y})\tilde{y}^{-1}$  où  $\tilde{y}$  est un relevé (arbitraire) de  $y$  dans  $\mathcal{E}(\mathrm{SL}_n, c, L)$  [BD, §4.13]. En pratique,  $h$  se calcule avec le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} T_{ad}(L) \times T(L) & \longrightarrow & K_2(L) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (L^\times)^n \times (L^\times)^n & \longrightarrow & K_2(L) \\ (x_i) & (y_i) & \mapsto \sum_{i=1}^n \{x_i, y_i\}. \end{array}$$

Ecrivons  $f_b = \lambda_1(b) f_1$ ,  $f_b^i = (\lambda_1(b) \cdots \lambda_i(b)) f_1^i$ , ( $i = 1, \dots, n-1$ ). Vu que  $f_1$  normalise le tore  $T$ , on a  $f_1^i \tilde{t} \in T(L)$ . Par suite,

$$f_b^i \tilde{t} = (\lambda_1(b) \cdots \lambda_i(b)) \cdot (f_1^i \tilde{t}) = h\left(\lambda_1(b) \cdots \lambda_i(b), f_1^i \tilde{t}\right) f_1^i \tilde{t}.$$

Reportant ceci dans (1), on obtient

$$(\tilde{t}\sigma)^n = \alpha \times \tilde{t}(f_1 \tilde{t}) \cdots (f_1^{n-1} \tilde{t}).$$

où

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} h\left(\lambda_1(b) \cdots \lambda_i(b), f_1^i \tilde{t}\right) \in K_2(L).$$

Le terme de droite  $\tilde{t}(f_1 \tilde{t}) \cdots (f_1^{n-1} \tilde{t})$ , étant celui du cas  $b = 1$ , est inessentiel ; il appartient donc à l'image de  $N : K_2(L) \rightarrow K_2(L)$ . Il reste donc à calculer le premier terme  $\alpha$ . Vu que  $t = \lambda_1(v)^{-1} \lambda_2(v)$ , on a

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} h\left(\lambda_1(b) \cdots \lambda_i(b), \lambda_i(v)^{-1} \lambda_{i+1}(v)\right) \quad (2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \{b, v^{-1}\} \quad (3)$$

$$= -(n-1)\{b, v\}. \quad (4)$$

On conclut que  $[E(z, u)] = \{b, v\} \in K_2(L)^\Gamma / N.K_2(L)$ , d'où la formule voulue par application de la proposition 3.5.  $\square$

## 4.2 Calcul dans un cas particulier

**Lemme 4.2** Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . On suppose que  $k$  admet une racine primitive  $n$ -ième de l'unité  $\zeta_n$ . On pose  $K = k((x))$  et on considère l'extension de Kummer  $L = K(x^{\frac{1}{n}})$ . On note  $\sigma$  le générateur de  $\text{Gal}(L/K)$  défini par  $\sigma(x^{\frac{1}{n}}) = \zeta_n x^{\frac{1}{n}}$  et  $\chi \in H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  le caractère de  $\text{Gal}(L/K) \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  appliquant  $\sigma$  sur 1.

1. On a un isomorphisme

$$K_2(k)/nK_2(k) \xrightarrow{\chi \cup h_n} \text{Ker}(H^3(K) \rightarrow H^3(L))$$

où  $h_n : K_2(k)/nK_2(k) \rightarrow H^2(k, \mu_n^{\otimes 2})$  désigne le symbole galoisien.

2. Le composé

$$K_2(k)/nK_2(k) \xrightarrow{\chi \cdot h_n} \text{Ker}(H^3(K) \rightarrow H^3(L)) \xrightarrow{a_K^L} H^2(\text{Gal}(L/K), K_2(L))$$

est injectif et applique le symbole  $\{x, y\} \in K_2(k)$  sur

$$[\{y, x\}] \in K_2(L)^{\text{Gal}(L/K)}/N.K_2(L) \cong H^2(\text{Gal}(L/K), K_2(L)).$$

3. Soient  $b, v \in k^\times$ . On considère l'algèbre  $A = (L/K, \sigma, b)$ . Alors

$$r_{\text{SL}_1(A)}([v]) = (v) \cup [A] \in H^3(K).$$

*Démonstration.* (1) On observe tout d'abord que

$$\text{Ker}(H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow H^3(L, \mu_n^{\otimes 2})) \cong \text{Ker}(H^3(K) \rightarrow H^3(L)).$$

On a un diagramme commutatif exact de suites exactes de résidus [GMS, (8.4), p.20]

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^3(k, \mu_n^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\partial_K} & H^2(k, \mu_n) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \text{res} \downarrow & & \downarrow \times n & & \\ 0 & \longrightarrow & H^3(k, \mu_n^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(L, \mu_n^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\partial_K} & H^2(k, \mu_n) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ceci produit un isomorphisme

$$\text{Ker}(H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow H^3(L, \mu_n^{\otimes 2})) \xrightarrow{\sim} H^2(k, \mu_n) \xrightarrow{\sim} H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}),$$

avec l'identification  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_n$  envoyant 1 sur  $\zeta_n$ . La réciproque de cette application est donnée par le cup-produit par  $\chi$ . En le combinant avec l'isomorphisme de Merkurjev-Suslin [MS]

$$h_n : K_2(k)/nK_2(k) \xrightarrow{\sim} H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}),$$

on obtient un isomorphisme

$$K_2(k)/nK_2(k) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow H^3(L, \mu_n^{\otimes 2})), \{u, v\} \mapsto \chi \cup h_n(\{u, v\}).$$

(2) Suivant [Gi1, lemme 2], on a

$$a_K^L(\chi \cup h_n(\{u, v\})) = -\{u, v\} \in K_2(L)^{\text{Gal}(L/K)}/N.K_2(L).$$

Il reste à vérifier que le morphisme  $K_2(k)/nK_2(k) \rightarrow K_2(L)^{\text{Gal}(L/K)}/N.K_2(L)$  est injectif. Cela découle du fait qu'il est scindé par la spécialisation

$$s : K_2(L) \rightarrow K_2(k), \alpha \mapsto \partial_L((-x^{\frac{1}{n}}).\alpha),$$

où l'on voit  $(-x^{\frac{1}{n}}).\alpha \in K_3^M(L)$ .

(3) La proposition 4.1 indique que

$$a_K^L(r_{\text{SL}_1(A)}([v])) = [\{v, b\}] \in K_2(L)^\Gamma/N.K_2(L) \cong H^2(\Gamma, K_2(L)).$$

Suivant (2), ceci entraîne

$$r_{\text{SL}_1(A)}([v]) = \chi \cup h_n(\{b, v\}) = \chi \cup (b) \cup (v) = (v) \cup [A] \in H^3(K).$$

□

### 4.3 Démonstration du théorème 1.1

**Lemme 4.3** *Soit  $n$  un entier  $\geq 1$  inversible dans  $k$ . Il existe un entier positif  $m$  tel que pour tout corps  $F/k$  et toute algèbre simple centrale  $A/F$  de degré  $n$ , l'invariant de Rost  $F^\times/\text{Nrd}(A^\times) \rightarrow H^3(F)$  est donné par  $[v] \mapsto m(v) \cup [A]$ .*

La démonstration passe par les toseurs versels [GMS, p.11].

*Démonstration.* Pour tout corps  $F/k$ , on définit

$$\begin{aligned} \alpha_F : H^1(F, \mu_n \times \text{PGL}_n) = F^\times / (F^\times)^n \times H^1(F, \text{PGL}_n) &\longrightarrow H^3(F) \\ ((v), [A]) &\longrightarrow a_F((v), [A]) \end{aligned}$$

où

$$a_F((v), [A]) := \text{Invariant de Rost du } \mathrm{SL}_1(A)\text{-torseur } v = \mathrm{Nrd}_A(y).$$

Les  $a_F$  définissent un invariant cohomologique du groupe  $\mu_n \times \mathrm{PGL}_n$ . Notant  $\mathcal{A}/k(X)$  une algèbre simple centrale “verselle” de degré  $n$ , on sait, selon [GMS, thm 11.5 page 137], qu’il existe un entier  $m$  tel que

$$r([P_{k(X)(t)}]) = m(t) \cup [\mathcal{A}_{k(X)}] \in H^3(k(X)(t)).$$

Le principe de spécialisation [GMS, (3.3), p.109] nous permet de conclure que  $\alpha_F((v), [A]) = m(v) \cup [A]$  pour tout corps  $F/k$ , tout  $c \in F^\times$  et toute  $F$ -algèbre simple centrale  $A$ .  $\square$

Pour établir le théorème 1.1.1, on commence par le cas où  $n$  est inversible dans  $k$ . L’idée est de tester l’entier  $m$  sur un exemple. Plus précisément, il suffit d’exhiber une extension  $F/k$ , une algèbre  $A/F$  de degré  $n$ , et un élément  $v \in F^\times$  tel que  $r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v]) = (v) \cup [A]$  et tel que  $r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v])$  soit d’ordre exactement  $n$ .

Posons  $F = \bar{k}((t))((y))((x))$ . On note  $A$  l’algèbre cyclique sur  $F$  présentée par  $X^n = x, Y^n = y$  et  $XY = \zeta_n YX$ . Alors  $(t) \cup [A] = (t) \cup (x) \cup (y)$  est d’ordre  $n$  dans  $H^3(F, \mu_n^{\otimes 2}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . On conclut que  $m = 1$  par le lemme 4.2.(3).

#### 4.4 Cas d’une $p$ -algèbre

On suppose ici que  $k$  est de caractéristique  $p > 0$  et que  $A$  est d’indice  $p^h$ . Si  $d \geq 0$ , rappelons la définition du groupe

$$H^{d+1}(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(d)) = \bigcup_{m \geq 1} H^{d+1}(k, (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})(d)).$$

au moyen des différentielles logarithmiques. Pour tout schéma  $X$  de caractéristique  $p$ , on note  $W_m\Omega_X^d$  le faisceau de de Rham-Witt sur  $X_{\text{ét}}$  de degré  $m$  et de poids  $d$  [I, I.1] et on note  $W_m\Omega_{X,\log}^d$  le sous-faisceau de  $W_m\Omega_X^d$  engendré localement pour la topologie étale par les différentielles logarithmiques  $d\log(x_1) \wedge \cdots \wedge d\log(x_q)$ . On note  $\nu_m(d)/X = W_m\Omega_{X,\log}^d$  et  $\nu(d)/X = W_1\Omega_{X,\log}^d$ .

Par définition, on a  $H^{d+1}(k, (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(d)) = H^1(k, \nu_m(d)(k_s))$ . Par ailleurs, le théorème de Bloch-Gabber-Kato [BK] établit un isomorphisme canonique

$$K_d^M(k)/p^m K_d^M(k) \xrightarrow{\sim} \nu_m(d)(k), \quad \{x_1, \dots, x_d\} \mapsto \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_d}{x_d}.$$

On a donc un isomorphisme

$$H^{d+1}(k, (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(d)) \xrightarrow{\sim} H^1(k, K_d^M(k_s)/p^m K_d^M(k_s))$$

Pour tout entier  $r \geq 0$ , le produit

$$K_d^M(k_s)/p^m K_d^M(k_s) \times K_r^M(k_s)/p^m K_r^M(k_s) \rightarrow K_{r+d}^M(k_s)/p^m K_{r+d}^M(k_s)$$

induit le cup-produit

$$\begin{aligned} H^1(k, K_d^M(k_s)/p^m K_d^M(k_s)) \times H^0(k, K_r^M(k_s)/p^m K_r^M(k_s)) \\ \rightarrow H^1(k, K_{d+r}^M(k_s)/p^m K_{d+r}^M(k_s)). \end{aligned}$$

Vu que  $K_r^M(k)/p^m K_r^M(k) = H^0(k, K_r^M(k_s)/p^m K_r^M(k_s))$ , on a donc un cup-produit

$$H^{d+1}(k, (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})(d)) \times K_r^M(k)/p^m K_r^M(k) \rightarrow H^{d+r+1}(k, (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})(d+r)).$$

Rappelons que l'on a un isomorphisme  $H^2(k, (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})(1)) \xrightarrow{\sim} {}_p\text{Br}(k)$  (Kato, voir [GiS, th. 9.2.4] dans le cas  $m = 1$ ). En particulier, cela permet de voir la classe de  $[A]$  dans  $H^2(k, (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1))$ .

Nous allons maintenant montrer que l'argument de relèvement en caractéristique nulle de l'invariant de Rost [Gi1, §5.1] fonctionne ici. Soit  $K$  un corps complet pour une valuation discrète, de caractéristique nulle et de corps résiduel  $k$ . On note  $O$  son anneau des entiers et  $\mathcal{A}$  une  $R$ -algèbre d'Azumaya relevant la  $k$ -algèbre simple centrale  $A$ . On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K^\times/\text{Nrd}(\mathcal{A}_K^\times) \cong H^1(K, \text{SL}_1(\mathcal{A}_K)) & \longrightarrow & H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ O^\times/\text{Nrd}(\mathcal{A}^\times) \cong H^1(O, \text{SL}_1(\mathcal{A})) & & -i_k^K \uparrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ k^\times/\text{Nrd}(A^\times) \cong H^1(k, \text{SL}_1(A)) & \longrightarrow & H^3(k, (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(2)) \end{array} \quad (*)$$

où  $i_k^K$  désigne le morphisme (injectif) de relèvement de Kato qui satisfait aux compatibilités suivantes.

- Lemme 4.4** 1.  $i_k^K(\alpha \cup \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r\}) = i_k^K(\alpha) \cup \{u_1, \dots, u_r\}$  pour tous  $u_1, \dots, u_r \in O^\times$  et  $\alpha \in H^{d+1}(k, (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})(d))$ .
2.  $i_k([A]) = [\mathcal{A}_K] \in H^2(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1)$ .

*Démonstration.* (1) Cela suit de la définition de  $i_k^K$ , voir la preuve de la proposition 2 de [K].

(2) Suivant le théorème d'Albert (voir [GiS, §9.1],  $A$  est semblable à une algèbre cyclique  $B = (L/k, \sigma, \bar{b})$  (conventions du lemme 4.1) où  $k'/k$  est une extension cyclique de corps de groupe  $\langle \sigma \rangle$  d'ordre  $p^s$  et  $\bar{b} \in k^\times$ . Sa classe dans le groupe de Brauer est  $\chi \cup (\bar{b})$  où  $\chi : \text{Gal}(k'/k) \rightarrow \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$  est le caractère appliquant  $\sigma$  sur 1 et  $\bar{b} \in k^\times$  [GiS, 4.7.3]. Soit  $O'/O$  une extension galoisienne cyclique relevant  $k'/k$  et  $b \in O^\times$  un relevé de  $\bar{b}$ . Alors la  $O$ -algèbre d'Azumaya cyclique  $\mathcal{B} = (O'/O, \sigma, b)$  relève  $B$ . On a  $\mathcal{B}_K = (K'/K, \sigma, b)$  où  $K' = \text{Frac}(O')$  et sa classe dans  $\text{Br}(K)$  est  $\Theta \cup (b)$  où  $\Theta : \text{Gal}(K'/K) \rightarrow \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$  est le caractère appliquant  $\sigma$  sur 1. Mais par définition  $i_k^K : H^1(k, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(K, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$  applique  $\chi$  sur  $\Theta$ , donc (1) permet de conclure que  $i_k([B]) = [\mathcal{B}_K]$ .  $\square$

Nous allons montrer le théorème 1.1.2. Etant donné  $u \in O^\times$  de réduction  $\bar{u} \in k$ , on a

$$\begin{aligned} r_K([u]) &= (u) \cup [\mathcal{A}_K] \quad [\text{Cas de car. nulle}] \\ &= (u) \cup i_k^K[A] \quad [\text{Lemme 4.4.2}] \\ &= i_k^K((\bar{u}) \cup [A]) \quad [\text{Lemme 4.4.1}]. \end{aligned}$$

Le diagramme (\*) ci-dessus permet de conclure que  $r_k([\bar{u}]) = -(\bar{u}) \cup [A]$ .

## 5 Restriction au centre de l'invariant de Rost

Soit  $G/k$  un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque  $k$ -simple. On suppose dans cette partie que la caractéristique du corps  $k$  ne divise pas l'exposant du centre  $Z$  de  $G$ , de sorte que  $Z$  est lisse. On s'intéresse à la restriction  $\rho_G$  de l'invariant de Rost aux toseurs issus de  $Z$ , c'est-à-dire à la composée

$$H^1(k, Z) \rightarrow H^1(k, G) \rightarrow H^3(k),$$

où la première application est induite par l'inclusion de  $Z$  dans  $G$  et la seconde est l'invariant de Rost. L'ingrédient majeur pour faire ce calcul est

la description des invariants des tores quasi-triviaux donnée dans [MPT, Thm 1.1], qui montre qu'il existe une classe de cohomologie  $t_{R,G} \in H^2(k, Z)$  telle que  $\rho_G$  est donné par un certain cup-produit avec  $t_{R,G}$ . On sait de plus que cette classe  $t_{R,G}$  est, suivant le type du groupe  $G$ , soit la classe nulle, soit un multiple non trivial de la classe de Tits  $t_G \in H^2(k, Z)$  (cf. [MPT] pour  $G$  de type classique ou [GaQ] pour  $G$  de type exceptionnel). Le théorème 1.1 permet d'énoncer le résultat plus précis suivant :

**Corollaire 5.1** *Si  $G$  est de type  $A$ ,  $C_\ell$  avec  $\ell$  impair,  $D$ ,  $E_6$  ou  $E_7$ , la restriction  $\rho_G$  de l'invariant de Rost aux toseurs issus du centre est le cup-produit avec la classe de Tits du groupe  $G$ ,  $t_G \in H^2(k, Z)$ , le cup-produit étant induit par l'application bilinéaire  $Z(k_s) \times Z(k_s) \rightarrow \mu_n^{\otimes 2}$  spécifiée pour chaque type de groupe dans [GaQ, §2]. Pour les autres groupes,  $\rho_G$  est nulle.*

*Démonstration.* Si le groupe  $G$  est de type  ${}^1A_{\ell-1}$ , il est de la forme  $G = \mathrm{SL}_1(A)$  pour une certaine  $k$ -algèbre centrale simple  $A$  de degré  $\ell$ , et il a pour centre  $Z = \mu_\ell$ . Par [KMRT, (31.7)], avec l'identification que l'on a choisie entre le groupe de Brauer de  $k$  et  $H^2(k)$ , la classe de Tits de  $G$  est alors la classe de Brauer de l'algèbre  $A$ ,  $t_{\mathrm{SL}_1(A)} = [A] \in H^2(k, \mu_n)$ , et le corollaire découle donc dans ce cas de la description de l'invariant de Rost donnée dans le thm 1.1.

Quand la composée  $\rho_G$  est nulle, le résultat est prouvé dans [MPT] ou [GaQ]. Pour les autres types de groupes, on sait (cf. *loc. cit.*) que la restriction à  $H^1(k, Z)$  de l'un des générateurs du groupe des invariants de degré 3 de  $G$  est le cup-produit avec la classe de Tits. De sorte que  $t_{R,G}$  est de la forme  $m t_G$ , où  $m$  est un entier premier à l'indice de Dynkin  $n_G$  du groupe  $G$ . Si  $n_G$  est pair et  $Z$  d'exposant 2, alors  $m$  est impair et  $m t_G = t_G \in H^2(k, Z)$ . Le corollaire est ainsi prouvé pour  $G$  de type  $C_\ell$ ,  $D_\ell$  avec  $\ell$  pair et  $E_7$ .

Si  $G$  est de type  $E_6$ , la preuve de [GaQ, §11] montre que si l'invariant de Rost pour le groupe  $\mathrm{SL}_1(D)$  est le cup-produit avec  $m[D]$ , alors  $t_{R,G} = m t_G$ . En combinant avec le théorème 1.1, on obtient donc le résultat annoncé.

Il reste à prouver le corollaire pour les groupes de type  ${}^2A_{\ell-1}$ , et pour les groupes de type  $D_\ell$  avec  $\ell$  impair. On commence par les formes extérieures de  $A_{\ell-1}$ .

*Groupes de type  ${}^2A_{\ell-1}$ .*

L'argument présenté ici est essentiellement tiré de [MPT]. Le groupe  $G$  est de la forme  $G = \mathrm{SU}(B, \tau)$ , où  $B$  est une algèbre centrale simple de degré  $\ell$  sur une extension quadratique  $K$  de  $k$ , et  $\tau$  est une involution  $K/k$ -semi-

linéaire de  $B$ . Son centre est une forme tordue  $Z = \mu_{\ell[K]}$  du groupe des racines  $\ell$ èmes de l'unité.

Supposons tout d'abord que  $\ell$  est impair. Par [MPT, (6)], le groupe  $\mu_{\ell[K]}$  s'insère dans une suite exacte impliquant des tores quasi-triviaux, et en considérant la suite induite en cohomologie, on observe que  $H^2(k, Z)$  s'injecte dans  $H^2(k, R_{K/k}(\mathbb{G}_m)) = \text{Br}(K)$ . On en déduit que la restriction  $\text{res}_{K/k} : H^2(k, Z) \rightarrow H^2(K, Z)$  est injective. Or, par le cas intérieur, la différence  $t_{R,G} - t_G \in H^2(k, Z)$  est nulle sur  $K$ . On a donc bien  $t_{R,G} = t_G$ .

Supposons maintenant que  $\ell = 2m$  est pair. Dans ce cas, par [MPT, Prop. 5.2], l'application

$$(\lambda_*, \text{res}_{K/k}) : H^2(k, Z) \rightarrow H^2(k, \mu_2) \times H^2(K, \mu_n)$$

est injective, où  $\lambda_*$  est induite par l'élévation à la puissance  $m$ . A nouveau par le cas intérieur,  $\text{res}_{K/k}(t_{R,G}) = \text{res}_{K/k}(t_G)$ . Il reste donc à montrer que  $\lambda_*(t_{R,G}) = \lambda_*(t_G)$ , qui par [KMRT, (31.8)] est la classe de Brauer de l'algèbre discriminante  $\mathcal{D}(B, \tau)$ .

Pour cela rappelons que, par [KMRT, (30.13)], le groupe  $H^1(k, Z)$  est un quotient de  $\{(x, y) \in k^\times \times K^\times \mid x^n = N_{K/k}(y)\}$ . De plus, si on note  $(x, y)_n$  la classe du couple  $(x, y) \in k^\times \times K^\times$ , alors par les calculs de [MPT, p. 819], pour toute classe  $\theta \in H^2(k, Z)$ , le cup produit avec  $(x, y)_n$  est donné par

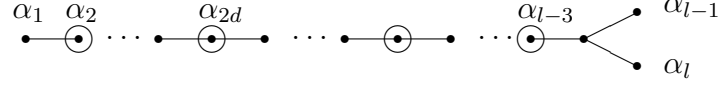
$$(x, y)_n \cdot \theta = x \cdot \lambda_*(\theta) + N_{K/k}(y \cdot \text{res}_{K/k}(\theta)).$$

Ainsi, par [MPT, §4.1], si l'algèbre  $B$  est déployée, alors  $\lambda_*(t_{R,G})$  est la classe de Brauer de l'algèbre discriminante  $\mathcal{D}(B, \tau)$ , ce qui prouve que  $\lambda_*(t_{R,G}) = \lambda_*(t_G)$  dans le cas déployé. Le cas général s'en déduit par extension des scalaires aux corps des fonctions  $E$  du transfert de  $K$  à  $k$  de la variété de Severi-Brauer de  $B$  (cf. *loc. cit.*). En effet,  $E$  déploie  $B$  et la restriction  $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(E)$  est injective.

*Groupes de type  $D_\ell$  avec  $\ell$  impair.*

Supposons maintenant que  $G$  est de type  $D_\ell$  avec  $\ell$  impair. Son centre est  $\mu_4$  dans le cas intérieur, et une forme tordue  $\mu_{4[K]}$  dans le cas extérieur. On sait alors que  $t_{R,G}$  est égal à  $t_G$  ou  $3t_G$ , mais les arguments donnés dans [MPT, §4.2.1, §4.3.1] ne permettent pas de lever l'ambiguïté. On va donc utiliser la méthode développée dans [GaQ], qui s'applique aussi aux groupes classiques. Nous présentons ici une esquisse de la preuve, comprenant les calculs détaillés qui ne sont pas dans [GaQ]. Nous renvoyons le lecteur à l'article d'origine

pour les détails des arguments. Rappelons tout d'abord que l'on peut supposer, pour calculer  $t_{R,G}$ , que le groupe  $G$  a un indice de Tits de la forme suivante [GaQ, §4] :



Le groupe  $G$  contient donc un  $k$ -tore déployé  $S'$  de rang  $\frac{\ell-3}{2}$ . Considérons le sous-groupe dérivé  $G'$  du centralisateur dans  $G$  de  $S'$ . C'est un groupe semi-simple simplement connexe, dont le diagramme de Dynkin est obtenu à partir du diagramme ci-dessus en supprimant les sommets entourés. C'est donc un produit de groupes de type  $A$ . De plus, par [GaQ, Prop 5.5], le centre  $Z$  de  $G$  est contenu dans  $G'$ . On va donc calculer  $\rho_G$  en passant par ce sous-groupe, et en utilisant le théorème 1.1.

Pour cela, il nous faut décrire précisément le groupe  $G'$  et l'inclusion de  $Z$  dans  $G'$ . Pour  $i = 1, 3, \dots, \ell - 4$ , on note  $G'_i$  la composante de  $G'$  correspondant au sommet  $\alpha_i$  du diagramme ; elle est de la forme  $G'_i = \mathrm{SL}_1(Q_i)$ , où  $Q_i$  est l'algèbre de Tits associée au poids fondamental  $\omega_i$ . Or, en consultant les tables de [Bou], on observe que les poids  $\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{\ell-4}$  sont égaux modulo le réseau des racines. Il découle donc de [T1, p. 211] (cf. également [KMRT, (27.7)]) que les algèbres  $Q_i$  sont toutes isomorphes. Ainsi, on a  $G'_i = \mathrm{SL}_1(Q)$  pour une certaine algèbre de quaternions  $Q$ . Notons maintenant  $G'_\ell$  la composante associée au sous-diagramme de sommets  $\alpha_\ell, \alpha_{\ell-2}$  et  $\alpha_{\ell-1}$ . L'algèbre de Tits correspondant au poids  $\omega_\ell$  est une algèbre de degré 4 sur  $k$  dans le cas intérieur et sur  $K$  dans le cas extérieur. Le groupe  $G'_\ell$  est  $G'_\ell = \mathrm{SL}_1(D)$  dans le premier cas et  $G'_\ell = \mathrm{SU}(D, \tau)$  dans le second, où  $\tau$  est une involution  $K/k$  semi-linéaire de  $D$ . De plus, à nouveau par [KMRT, (27.7)], on a  $[Q] = 2[D]$  dans le cas intérieur et  $\mathrm{res}_{K/k}([Q]) = 2[D]$  dans le cas extérieur.

La description de l'inclusion de  $Z$  dans  $G'$  peut se faire au niveau de la clôture séparable  $k_s$  de  $k$ . Comme dans [GaQ, §8], le poids  $\omega_\ell$  étant d'ordre 4 dans le quotient  $\Lambda/\Lambda_r$ , l'application  $z_{\omega_\ell}$  associée par [GaQ, Prop 6.2] induit un isomorphisme entre  $\mu_4$  et  $Z$ . Avec les notations de [GaQ, §5.1], elle est donnée par

$$z_{\omega_\ell}(\zeta)h_{4\omega_\ell}(\zeta) = h_1(\zeta^2)h_3(\zeta^2)\dots h_{\ell-4}(\zeta^2)h_{\ell-2}(\zeta^2)h_{\ell-1}(\zeta^{\ell-2})h_\ell(\zeta^\ell).$$

On peut décrire de manière analogue le centre de  $\mathrm{SL}_1(D)$ . En comparant les deux formules, on obtient que l'inclusion de  $Z$  dans le produit  $Z'_1 \times Z'_3 \times \dots \times$

$Z'_{\ell-4} \times Z'_\ell$ , où  $Z'_i$  désigne le centre de  $G'_i$ , est donnée par

$$\zeta \mapsto (\zeta^2, \dots, \zeta^2, \zeta^{\ell-2}).$$

Rappelons que le centre  $Z'_i$  est isomorphe à  $\mu_2$  pour  $i = 1, 3, \dots, \ell - 4$ , tandis que  $Z'_\ell$  est isomorphe à  $Z$ . L'application induite au niveau des  $H^1$  est donc

$$\begin{aligned} H^1(k, Z) &\mapsto \prod H^1(k, Z'_i) \\ a &\mapsto (\lambda_\star(a), \dots, \lambda_\star(a), (\ell - 2)a), \end{aligned}$$

où  $\lambda_\star$  désigne comme précédemment l'application induite par l'élévation au carré. Pour conclure, il ne reste plus qu'à appliquer la formule [GaQ, (5.8)].

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas intérieur. Si  $\ell \equiv 3[4]$ , on obtient

$$\rho_G(a) = (\ell - 2)(a) \cdot [D] = (a) \cdot [D].$$

Si maintenant  $\ell \equiv 1[4]$ , on obtient

$$\rho_G(a) = \lambda_\star(a) \cdot [Q] + (3a) \cdot [D].$$

Or  $(2a) \cdot [D] = (a) \cdot [2D] = \lambda_\star(a) \cdot [Q]$ , qui est d'ordre 2 dans  $H^3(k)$ .

On obtient donc dans les deux cas  $\rho_G(a) = (a) \cdot [D]$ . Or, pour faire ce calcul, on a identifié  $\mu_4$  et  $Z$  par l'intermédiaire du poids  $\omega_\ell$ . Par [KMRT, (31.7)], cette identification induit une application  $H^2(k, Z) \rightarrow H^2(k, \mu_4)$  qui envoie la classe de Tits  $t_G$  sur la classe de Brauer de l'algèbre de Tits associée à  $\omega_\ell$  qui est justement  $[D]$ . Le corollaire est donc prouvé dans le cas intérieur.

Notons que l'on aurait aussi pu identifier  $Z$  et  $\mu_4$  en utilisant le poids  $\omega_{\ell-1}$ . Un calcul analogue montre qu'il faudrait alors remplacer  $\ell - 2$  par  $\ell$  dans la formule ci-dessus. Mais il faudrait également remplacer  $D$  par l'algèbre de Tits associée au poids  $\omega_{\ell-1}$ , qui est l'algèbre opposée  $D^{op}$ . Comme prévu, la formule ne dépend donc pas de l'identification choisie.

Dans le cas extérieur, un calcul analogue, conduit à  $\rho_G(a) = a \cdot t_{G'_\ell}$ . Si l'on identifie  $Z$  et  $Z'_\ell$  à  $\mu_{4[K]}$  par le poids  $\omega_\ell$ , en appliquant à nouveau [KMRT, (31.7)], on observe que  $\text{res}_{K/k}(t_G) = \text{res}_{K/k}(t_{G'_\ell}) = [D]$  et  $\lambda_\star(t_G) = \lambda_\star(t_{G'_\ell}) = [Q]$ . Par [MPT, Prop. 5.2], ceci permet d'identifier  $t_G = t_{G'_\ell}$ , et termine la preuve.  $\square$

## 6 Groupes exceptionnels de type $G_2$ , $F_4$ et $E_8$

On note  $G$  le groupe déployé de type  $G_2$  (resp.  $F_4$ ,  $E_8$ ). Il admet un unique (à  $G(k_s)$ -conjugaison près)  $k$ -sous-groupe  $A = \mu_l \times \mu_l \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  avec

$l = 2$  (resp.  $l = 3, l = 5$ ) tel que  $Z_G(A)$  est fini dont on va donner une description précise ci-dessous. On se propose de calculer le composé

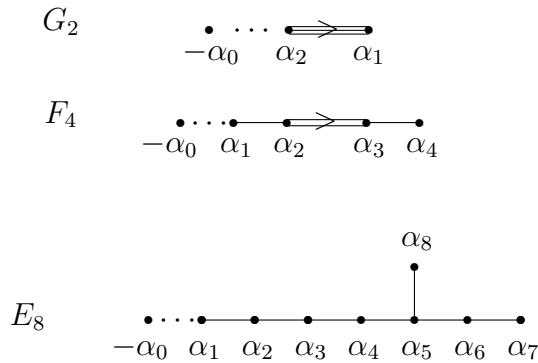
$$H_{fppf}^1(k, A) \rightarrow H_{fppf}^1(k, G) \rightarrow H^3(k),$$

le cas de  $G_2$  étant bien connu des spécialistes. La théorie de la cohomologie plate (cf. [BFT, app. B]) n'est nécessaire que dans le cas de caractéristique  $l$ . Notons que ce type de toseurs intervient dans l'étude de la dimension essentielle de  $G$  [RY] [ChS] [GiR].

Si  $n$  est un entier strictement positif, on note  $C_n$  le groupe cyclique d'ordre  $n$  et  $A_n$  le groupe alterné en  $n$  lettres.

### 6.1 Sous-groupes finis.

On note  $T$  un tore déployé maximal de  $G$  et  $W = N_G(T)/T$  son groupe de Weyl. On considère les diagrammes de Dynkin étendus respectifs



où  $\alpha_0$  désigne la plus grande racine. D'après Borel-de Siebenthal [BS], ceci indique que  $G$  admet un sous-groupe  $H$  de type  $A_1 \times A_1$  (resp.  $A_2 \times A_2$ , resp.  $A_4 \times A_4$ ) dont le premier facteur contient le sommet  $-\alpha_0$ . On a  $H = (\mathrm{SL}_l \times \mathrm{SL}_l)/\mu$  où  $\mu \subset \mu_l \times \mu_l$  désigne le groupe fondamental de  $H$ .

**Lemme 6.1** *Si  $l$  est inversible dans  $k$ , alors  $H = Z_G(Z(H))$ .*

*Démonstration.* Le fait que  $H = Z_G(Z(H))^0$  fait partie du théorème de Borel-de Siebenthal (voir [Gi2]). Il faut montrer la connexité de  $Z_G(Z(H))$  et on peut supposer  $k$  algébriquement clos. Vu que  $Z(H) = (\mu_l \times \mu_l)/\mu$  est cyclique et que  $G$  est simplement connexe, on sait que  $Z_G(Z(H))$  est connexe d'après Springer-Steinberg [SpS, §3.9].  $\square$

De façon plus précise, on va décrire  $H = H'.H''$  au moyen d'un couple de Killing  $(T, B)$  de  $G$ . Celui-ci définit une base  $\Delta$  du système de racines  $\Phi(G, T)$ ; pour chaque  $\alpha \in \Phi(G, T)$ , on note  $U_\alpha \subset G$  le sous-groupe radiciel associé. Dans le cas de  $G_2$  (resp.  $F_4, E_8$ ), on pose

$$U'_\pm = U_{\pm\alpha_0} \quad (\text{resp. } \langle U_{\pm\alpha_0}, U_{\pm\alpha_1} \rangle, \text{ resp. } \langle U_{\pm\alpha_0}, U_{\pm\alpha_1}, U_{\pm\alpha_2}, U_{\pm\alpha_3} \rangle)$$

$$U''_\pm = U_{\pm\alpha_1} \quad (\text{resp. } \langle U_{\pm\alpha_3}, U_{\pm\alpha_4} \rangle, \text{ resp. } \langle U_{\pm\alpha_5}, U_{\pm\alpha_6}, U_{\pm\alpha_7}, U_{\pm\alpha_8} \rangle)$$

$H' = \langle U'_+, U'_- \rangle$ ,  $H'' = \langle U''_+, U''_- \rangle$ . Ainsi le groupe  $H$  est muni du couple de Killing  $(T, T.U'_+.U''_+) = (T, H \cap B)$  définissant les diagrammes de Dynkin  $\Delta'$  et  $\Delta''$ . On a  $\Delta' = \{-\alpha_0\}$ , resp.  $\{-\alpha_0, \alpha_1\}$ , resp.  $\{-\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ; on note  $\omega'_0$ , etc... les poids fondamentaux de  $H'$  et on identifie  $H'$  à  $\text{SL}_2$  (resp.  $\text{SL}_3, \text{SL}_5$ ) par la représentation de plus haut poids  $\omega'_0$ . De même,  $\Delta'' = \{\alpha_1\}$ , resp.  $\{\alpha_3, \alpha_4\}$ , resp.  $\{\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$ ; on note  $\omega''_1$  (resp.  $\omega''_3, \omega''_8$ ) les poids fondamentaux de  $H''$  que l'on identifie à  $\text{SL}_2$  (resp.  $\text{SL}_3, \text{SL}_5$ ) par la représentation de plus haut poids  $\omega''_1$  (resp.  $\omega''_3, \omega''_8$ ). Nous allons déterminer le groupe  $\mu$  en suivant la méthode de Tits [T2, §1.7.1]; il est aussi possible d'utiliser la théorie des représentations, voir [Ga2, page 40] dans le cas  $E_8$

**Lemme 6.2** *Dans le cas de  $G_2$  (resp.  $F_4$ ),  $\mu$  est le  $\mu_2$  (resp.  $\mu_3$ ) diagonal de  $\text{SL}_2 \times \text{SL}_2$  (resp.  $\text{SL}_3 \times \text{SL}_3$ ). Dans le cas de  $E_8$ ,  $\mu$  est le sous-groupe  $\mu_5$  plongé de  $\mu_5 \times \mu_5$  plongé par  $x \mapsto (x, x^2)$ .*

*Démonstration.* On note  $T' = T \cap H'$ ,  $T'' = T \cap H''$  et  $\alpha_* = \alpha_2$  (resp.  $\alpha_2$ , resp.  $\alpha_4$ ). Suivant [T2, §1.7.1], le dual  $\hat{\mu}$  est le quotient de  $\hat{T}' \oplus \hat{T}''$  par  $\hat{T}$ . De façon plus précise, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \hat{T} & \longrightarrow & \hat{T}' \oplus \hat{T}'' & \longrightarrow & \hat{\mu} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \parallel \\ & & & & \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} & \longrightarrow & \hat{\mu} \longrightarrow 0 \end{array}$$

et  $\hat{T}$  est le sous-réseau de  $\hat{T}' \oplus \hat{T}''$  engendré par les  $\alpha_0^\vee(\omega_\alpha)\omega'_0 - \omega'_\alpha$  pour  $\alpha \in \Delta' \setminus \{\alpha_0\}$ ,  $\alpha_0^\vee(\omega_{\alpha_*}) - \omega'_0$  et les  $\alpha_0^\vee(\omega_\alpha) - \omega''_\alpha$  pour  $\alpha \in \Delta''$ . Le fait que le premier facteur  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  soit engendré par  $\omega'_0$  et le second facteur  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  soit engendré par  $\omega''_1$  (resp.  $\omega''_3, \omega''_8$ ) simplifie la présentation du groupe  $\hat{\mu}$ . Pour l'étude cas par cas, on se réfère aux tables de Bourbaki [Bou] renumérotées dans le cas de  $E_8$  par Tits [T2].

*Cas de  $G_2$*  :  $\hat{\mu}$  est le quotient du sous-groupe de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  par la relation

$$\omega'_0 + \alpha_0^\vee(\omega_2)\omega''_2 = \omega'_0 + \frac{(\alpha_0, \omega_2)}{(\alpha_0, \alpha_0)}\omega''_2 = \omega'_0 - \omega''_2$$

puisque  $\alpha_0 = -\omega_2$ . Ainsi  $\mu$  est le noyau de  $\mu_2 \times \mu_2 \rightarrow \mu_2, (x, y) \mapsto xy^{-1}$ .

*Cas de  $F_4$*  :  $\hat{\mu}$  est le quotient du sous-groupe de  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  par la relation

$$\omega'_0 + \alpha_0^\vee(\omega_3)\omega''_3 = \omega'_0 + \frac{(\alpha_0, \omega_3)}{(\alpha_0, \alpha_0)}\omega''_3 = \omega'_0 - 2\omega''_3$$

puisque  $\alpha_0 = -\omega_1$ . Ainsi  $\mu$  est le noyau de  $\mu_3 \times \mu_3 \rightarrow \mu_3, (x, y) \mapsto xy^{-2}$ .

*Cas de  $E_8$*  :  $\hat{\mu}$  est le quotient du sous-groupe de  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  par la relation  $\omega'_0 + \alpha_0^\vee(\omega_8)\omega''_5 = \omega'_0 - 3\omega''_5$ . Ainsi  $\mu$  est le noyau de  $\mu_5 \times \mu_5 \rightarrow \mu_5, (x, y) \mapsto xy^{-3}$  (voir aussi [Ga2, p. 40]).  $\square$

On note  $h$  l'image respective de

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(k) \times \mathrm{SL}_2(k).$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_3(k) \times \mathrm{SL}_3(k).$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_5(k) \times \mathrm{SL}_5(k).$$

dans  $H(k)$ . L'élément  $h$  est d'ordre  $l = 2$  (resp. 3, 5) et agit de façon anisotrope<sup>1</sup> à travers son image  $w \in N_H(T)/T$ . On pose  $A = T^w \times \langle h \rangle$ , il contient l'image  $\mu_l^{(1)} = Z(H')$  du centre du premier facteur ainsi qu'un sous-groupe  $\mu_l^{(2)}$  que l'on définit de la façon suivante. Pour  $G_2$ , c'est le sous-groupe de  $H$

$$\mu_2 = \mu_4/\mu_2, \quad [x] \mapsto \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{bmatrix}$$

---

1. i.e.  $T^w$  est fini.

Pour  $F_4$  et  $E_6$ , c'est l'image du plongement  $\mu_l \rightarrow H$  donné respectivement par

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix}, \\ x \mapsto & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Lemme 6.3** *Dans les trois cas précédents, si  $l$  est inversible dans  $k$ , on a*

1.  $T^w = \mu_l^{(1)} \times \mu_l^{(2)}$  et  $A = \mu_l^{(1)} \times \mu_l^{(2)} \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ .
2.  $Z_G(T^w) = T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  et  $Z_G(A) = A$ .
3.  $N_G(T^w) = N_G(T, T^w)$ .

*Démonstration.* La première assertion est évidente puisque  $T^w$  se calcule dans  $H$ .

(2) On a  $H = Z_G(Z(H))$  suivant le lemme 6.1 et  $Z(H) \subset T^w$ , d'où  $Z_G(T^w) = Z_H(T^w)$ . Il suit que  $Z_G(T^w) = T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  puisque  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} = Z_{S_l}(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ . Vu que  $T^w = T^A \subset A$ , on en déduit  $Z_G(A) = A$ .

(3) Le  $k$ -groupe  $N_G(T^w)$  normalise  $T = Z_G(T^w)^0$ . D'où on déduit  $N_G(T^w) = N_G(T, T^w)$ .  $\square$

On considère le morphisme

$$\phi : N_G(T, T^w) \rightarrow \text{Aut}_{k\text{-gp}}(T^w) = \text{Aut}_{k\text{-gp}}(\mu_l^{(1)} \times \mu_l^{(2)}) = \text{GL}_2(\mathbf{F}_l).$$

Par ailleurs, on note  $N_{\langle w \rangle}$  (resp.  $N_w$ ) la préimage de  $N_W(\langle w \rangle)$  (resp.  $Z_W(w)$ ) dans  $N_G(T)$ .

**Lemme 6.4** *On suppose que  $k$  est de caractéristique  $\neq l$ .*

1. *On a des suites exactes de  $k$ -groupes*

$$1 \rightarrow T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \rightarrow N_G(T, T^w) \xrightarrow{\phi} \text{Aut}(T^w) \rightarrow 1$$

où  $\text{Aut}(T^w) \cong \text{GL}_2(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$  et

$$1 \rightarrow A \rightarrow N_G(T, T^w) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi'} \text{SL}_2(\mathbf{F}_l) \rightarrow 1,$$

où  $\phi'$  est la restriction de  $\phi$  à  $N_G(T, T^w) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ .

2. L'inclusion  $N_G(T, T^w) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \subset N_w$  induit un isomorphisme  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_l) \xrightarrow{\sim} Z_W(w)/\langle w \rangle$ .

3. L'inclusion  $N_G(T, T^w) \rightarrow N_{\langle w \rangle}$  est un isomorphisme et induit un isomorphisme  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l) \xrightarrow{\sim} N_{\langle w \rangle}/\langle w \rangle$ .

4. Le morphisme

$$N_G(T, T^w)(k) \xrightarrow{\phi} \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l).$$

est surjectif.

5. Le morphisme

$$N_G(T, T^w)(k) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})(k) \xrightarrow{\phi'} \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_l).$$

est surjectif.

Pour établir (2), on va procéder cas par cas en utilisant la forme explicite du groupe fini  $Z_W(w)$ . Dans le cas de  $G_2$ ,  $W$  est le groupe diédral d'ordre 12 et  $\langle w \rangle$  est central, ainsi  $Z_W(w) = W$ . Dans les deux autres cas, la forme explicite de  $Z_W(w)$  peut être relevée des tables de Carter [Ca] ou plus rapidement du fait que  $Z_W(w)$  est un groupe de réflexion complexe [Sp]. On a  $Z_W(w) = C_6.A_4$  dans le cas  $F_4$  et  $Z_W(w) = C_{10}.A_5$  dans le cas  $E_8$ .

*Démonstration du lemme 6.4.* (1) On a  $\ker(\phi) = N_G(T, T^w) \cap Z_G(T^w) = N_G(T, T^w) \cap (T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  suivant le lemme 6.3.(2). Pour la surjectivité de  $\phi$ , on peut supposer  $k$  algébriquement clos. Suivant les tables de Griess [Gs], puisque  $A$  est non toral, on a  $N_G(A) = A \rtimes \mathrm{SL}_3(\mathbf{F}_l)$ . L'image de  $N_G(T^w) \cap N_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = N_G(A, T^w, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$  dans  $\mathrm{SL}_3(\mathbf{F}_l)$  est le sous-groupe

$\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$  qui est isomorphe à  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l)$ . Ainsi  $\mathrm{Im}(\phi) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l)$ . La sur-

jectivité de  $\phi'$  résulte du même fait et le noyau de  $\phi'$  est donné par  $\ker(\phi') = \ker(\phi) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = (T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = A$  suivant le lemme 6.3.(2).

(2) Le morphisme  $N_G(T, T^w) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \rightarrow N_w$  produit en effet un plongement  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_l) \hookrightarrow Z_W(w)/\langle w \rangle$ , qui est un isomorphisme puisque ces deux groupes ont même ordre.

(3) De même, le morphisme  $N_G(T, T^w) \rightarrow N_{\langle w \rangle}$  produit un plongement  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l) \hookrightarrow N_{\langle w \rangle}/\langle w \rangle$ . Comme l'on a une suite exacte

$$1 \rightarrow Z_w \rightarrow N_{\langle w \rangle} \rightarrow \mathrm{Aut}(\langle w \rangle) = (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times,$$

on déduit en comptant que  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l) \xrightarrow{\sim} N_{\langle w \rangle} / \langle w \rangle$ . Ainsi

$$N_G(T, T^w) / T \xrightarrow{\sim} N_{\langle w \rangle} / T,$$

d'où l'on conclut que  $N_G(T, T^w) \xrightarrow{\sim} N_{\langle w \rangle}$ .

(4) Le morphisme  $N_G(T)(k) \rightarrow W$  étant surjectif, le morphisme

$$N_{\langle w \rangle}(k) \rightarrow N_W(\langle w \rangle)$$

l'est également. En utilisant (3), on conclut que  $N_G(T, T^w)(k) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l)$  est surjectif.  $\square$

(5) Si  $r \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_l)$ , le (4) produit un relevé  $g \in N_G(T, T^w)(k)$  qui agit trivialement sur  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ .

**Remarque 6.5** L'hypothèse sur la caractéristique est technique et peut probablement être levée dans les lemmes 6.1, 6.3 et 6.4.

## 6.2 Calcul explicite

On a  $H_{fppf}^1(k, A) = k^\times / (k^\times)^l \times k^\times / (k^\times)^l \times H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ , un élément est donc le produit de deux éléments  $(a), (b) \in k^\times / (k^\times)^l$  et d'un caractère  $\chi \in H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ . Il est commode de disposer de  $A$ -torseurs correspondants. On note  $E_a$  le  $\mu_l$ -torseur  $x^l = a$  pour  $a \in k^\times$ ,  $E_\chi$  le  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ -torseur associé au caractère  $\chi$ .

**Théorème 6.1** (1) *Le composé*

$$r_G \circ i_k : H_{fppf}^1(k, A) \rightarrow H_{fppf}^1(k, G) \rightarrow H^3(k),$$

applique  $(a) \times (b) \times \chi$  sur  $-\chi \cup (a) \cup (b)$  si  $l \in k^\times$  et sur  $\chi \cup (a) \cup (b)$  si  $k$  est de caractéristique  $l$ .

(2) Si  $E = E_a \times_k E_b \times_k E_\chi$ , alors on a un isomorphisme

$$Z_{E_G}(\mu_l^{(1)}) \xrightarrow{\sim} \left( \mathrm{SL}_1(B) \times \mathrm{SL}_1(C) \right) / \mu_l$$

où  $B, C$  sont des  $k$ -algèbres cycliques de degré  $l$  de sorte que :

- $[B] = [C] = \chi \cup (b) \in \mathrm{Br}(k)$  pour  $G_2$  (resp.  $F_4$ ) et  $l = 2$  (resp. 3),
- $[B] = 3[C] = \chi \cup (b) \in \mathrm{Br}(k)$  dans le cas  $E_8$  et  $l = 5$ .

La démonstration s'appuie principalement sur la note de Chernousov [Ch].

*Démonstration* : (1) On note  $f = r_G \circ i_k$ . On suppose que  $G = E_8$ , les deux autres cas étant similaires. Comme au §4.4, l'argument de relèvement en caractéristique nulle (i.e. le théorème 2 de [Gi1]) permet le cas échéant de supposer que  $\text{car}(k) \neq l$ . En outre, par restriction-corestriction, il est loisible de supposer que  $k$  contient une racine cinquième de l'unité  $\zeta$ . On regarde d'abord la restriction au facteur  $H^1(k, \mu_5^{(2)} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) = k^\times / (k^\times)^5 \times H^1(k, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ . Celle-ci définit un invariant cohomologique  $f'$  de  $\mu_5^{(2)} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  dans  $H^3(k, \mu_5^{\otimes 2})$ . La description de ces invariants est bien connue [Ga2, prop. §2.1 et §6.7]. On sait alors qu'il existe (de façon unique !) des éléments  $(c_0) \in k^\times / (k^\times)^5$ ,  $\alpha_0 \in H^2(k, \mu_5^{(2)})$  et  $\beta_0 \in H^2(k, \mu_5)$  tels que

$$f'((b) \times \chi) = (c_0) \cup (b) \cup \chi + \alpha_0 \cup \chi + (b) \cup \beta_0.$$

Vu que  $\mu_5^{(2)} \subset T$  et que  $H^1(k, T) = 0$ , cet invariant est nul si  $\chi = 0$ , d'où  $\beta_0 = 0$ . De même,  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  se plonge dans un  $k$ -tore déployé, donc  $\alpha_0 = 0$  et  $f'((b) \times \chi) = (c_0) \cup (b) \cup \chi$ .

On note  $E' = E_b \times E_\chi$ . Suivant [GiS, §2.5, 4.7], on a

$${}^{E'}H = \left( \text{SL}_1(B) \times \text{SL}_1(C) \right) / \mu_l$$

où  $B = (\chi, b)$  et  $C = (\chi, b^2)$  sont des  $k$ -algèbres cycliques de degré 5 (dans le cas de  $F_4$ , on a  ${}^{E'}H = (\text{SL}_1(B) \times \text{SL}_1(B)) / \mu$  avec  $B = (\chi, b)$ ). On considère le diagramme commutatif [Gi1, lemme 7]

$$\begin{array}{ccccc}
 H^1(k, A) & \longrightarrow & H^1(k, {}^{E'}G) & \xrightarrow{r_{{}^{E'}G}} & H^3(k) \\
 (**) \quad ?+(b) \cup \chi \downarrow & & \tau_{{}^{E'}} \downarrow \wr & & \downarrow ?+f([E']) \\
 H^1(k, A) & \longrightarrow & H^1(k, G) & \xrightarrow{r_G} & H^3(k)
 \end{array}$$

où  $\tau_{{}^{E'}}$  désigne la bijection de torsion. Vu que le facteur  $\mu_5^{(1)}$  s'applique sur le centre de  $\text{SL}_1(B)$ , il vient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 k^\times / (k^\times)^5 & \longrightarrow & k^\times / \text{Nrd}(B^\times) & \xrightarrow{\sim} & H^1(k, \text{SL}_1(B)) \\
 \parallel & & & & \downarrow \\
 k^\times / (k^\times)^5 = H^1(k, \mu_5^{(1)}) & \longrightarrow & H^1(k, A) & \longrightarrow & H^1(k, {}^{E'}G).
 \end{array}$$

Nous affirmons que le composé  $H^1(k, \mathrm{SL}_1(B)) \rightarrow H^1(k, {}^{E'}G) \rightarrow H^3(k)$ , la seconde flèche étant  $r_{{}^{E'}G}$ , est l'invariant de Rost de  $\mathrm{SL}_1(B)$ . En effet, on sait par [GMS, (9.11), p.129] que ce composé est  $d \times r_{\mathrm{SL}_1(B)}$  où  $d$  est l'indice de Dynkin (ou multiplicateur de Rost) du morphisme  $\mathrm{SL}_1(B) \rightarrow {}^{E'}G$ . Cet indice correspond au morphisme  $\mathbb{Z} = H^1({}^{E'}G, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(\mathrm{SL}_1(B), \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$  et est donc le même que celui du morphisme  $\mathrm{SL}_5 \rightarrow G$ . Pour voir que ce multiplicateur est 1, on utilise le morphisme

$$\alpha_0^\vee : \mathrm{SL}_2 \rightarrow \mathrm{SL}_5 \rightarrow G$$

attaché à la coracine (courte)  $\alpha_0^\vee$  commune à  $\mathrm{SL}_5$  et  $G$ . On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} = H_{\mathrm{Zar}}^1(G, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{(\alpha_0^\vee)^*} & H_{\mathrm{Zar}}^1(\mathrm{SL}_2, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z} \\ \times d \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{Z} = H_{\mathrm{Zar}}^1(\mathrm{SL}_5, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{(\alpha_0^\vee)^*} & H_{\mathrm{Zar}}^1(\mathrm{SL}_2, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}. \end{array}$$

Suivant [GMS, (7.5), p.121], les flèches horizontales sont  $id_{\mathbb{Z}}$ , d'où  $d = 1$ . Ainsi, l'image de  $(a)$  par le composé

$$k^\times / (k^\times)^5 = H^1(k, \mu_5^{(1)}) \rightarrow H^1(k, A) \rightarrow H^1(k, {}^{E'}G) \rightarrow H^3(k)$$

est  $(a) \cup \chi \cup (b)$  suivant le Théorème 1.1. En remontant avec le diagramme (\*\*), il vient

$$f((a) \times (b) \times \chi) = (a) \cup \chi \cup (b) - (c_0) \cup (b) \cup \chi.$$

On utilise maintenant l'action du groupe  $N_G(T^w)(k) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})(k)$  sur  $G$  et  $A$ . Suivant le lemme 6.4.5, il existe  $g \in N_G(T^w)(k) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})(k)$  qui agit sur  $T^w$  suivant

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_5).$$

Vu que  $G(k)$  agit trivialement sur  $H^1(k, G)$ ,  $(a)$  et  $(b)$  jouent donc des rôles équivalents dans la formule cherchée, d'où la trivialité de  $(c_0)$  et de  $\beta_0$ . On conclut que

$$f((a) \times (b) \times \chi) = -(a) \cup (b) \cup \chi = -\chi \cup (a) \cup (b).$$

(2) Le  $k$ -groupe  $Z_{EG}(\mu_l^{(1)})$  est le tordu par  $E$  du sous-groupe  $H \subset G$ . Il est donc de la forme  $(\mathrm{SL}_1(B) \times \mathrm{SL}_1(C))/\mu_l$  pour des  $k$ -algèbres de degré  $l$ . Pour déterminer ces algèbres, on peut par relèvement en caractéristique nulle supposer que  $l$  est inversible dans  $k$ . De plus, on peut même supposer que  $k$  contient une racine primitive  $l$ -ième de l'unité. C'est donc un avatar de la démonstration du (1).  $\square$

### 6.3 Algèbres d'Albert

La partie modulo 3 de l'invariant de Rost des groupes de type  $F_4$  définit un invariant des algèbres d'Albert. En application du théorème 6.1, nous montrons que c'est exactement l'invariant construit par Rost dans [R1], et décrit également dans [PR].

**Corollaire 6.6** *On suppose que  $\mathrm{car}(k) \neq 3$ . Soient  $A/k$  une algèbre simple centrale de degré 3 et  $\lambda \in k^\times$ . On note  $J(A, \lambda)$  l'algèbre d'Albert de "première construction de Tits" et  $[J(A, \lambda)] \in H^1(k, F_4)$  sa classe d'isomorphisme. Alors la partie modulo 3 de son invariant de Rost est*

$$g_3([J(A, \lambda)]) = [A] \cup (\lambda) \in H^3(k, \mu_3^{\otimes 2}).$$

La preuve passe par le lemme suivant :

**Lemme 6.7** *Soit  $G/k$  un groupe semi-simple déployé. Soit  $T/k$  un tore maximal déployé de  $G$ .*

1. *Soient  $S_1, S_2$  des  $k$ -sous-groupes de  $T$ . Alors  $S_1$  et  $S_2$  sont  $G(k_s)$ -conjugués si et seulement si  $S_1$  et  $S_2$  sont  $G(k)$ -conjugués.*
2. *Soient  $H_1, H_2$  des sous-groupes réductifs déployés de rang maximal. Alors  $H_1$  et  $H_2$  sont  $G(k_s)$ -conjugués si et seulement si  $H_1$  et  $H_2$  sont  $G(k)$ -conjugués.*

Le (1) est bien connu dans le cas des sous-groupes finis constants d'ordre premier à la caractéristique [S2, 1.1.1] qui est d'ailleurs le cas d'application.

*Démonstration.* (1) Les  $k$ -groupes  $G_1 = Z(S_1)^0$  et  $G_2 = Z(S_2)^0$  sont réductifs et admettent  $T$  comme tore maximal. Si  $S_1$  et  $S_2$  sont  $G(k_s)$ -conjugués, il en est de même de  $G_1$  et  $G_2$  et ils sont alors  $N_G(T)(k_s)$ -conjugués. On pose  $W = N_G(T)/T$ , c'est un  $k$ -groupe fini constant et  $N_G(T)(k) \rightarrow W$  est

surjectif. Ainsi quitte à conjuguer par un élément de  $G(k)$ , on est ramené au cas où  $G_1$  et  $G_2$  sont  $T(k_s)$ -conjugués, d'où  $S_1 = S_2$ .

(2) On suppose donc que  $H_1$  et  $H_2$  sont  $G(k_s)$ -conjugués. On peut supposer que  $T \subset H_i$  pour  $i = 1, 2$  suivant le théorème de conjugaison de Borel-Tits. On pose  $S_i = Z(H_i) \subset T$ . A conjugaison de  $G(k)$  près, le (1) montre que  $Z(H_1) = Z(H_2)$ . Par application du théorème de Borel de Siebenthal, il vient  $H_1 = H_2$ .  $\square$

Ainsi les sous-groupes semi-simples de  $F_4$  qui sont déployés de type  $A_2^2$  sont conjugués sous  $F_4(k)$ . On rappelle la présentation de  $F_4$  donnée dans [Ga2, §7.2]. On note  $M = M_3(k)$  et  $V = M \times M \times M$  qui est muni de la forme cubique

$$f(X, Y, Z) = \det(X) + \det(Y) + \det(Z) - \text{Tr}(XYZ).$$

Le sous-groupe de  $\text{GL}(V)$  qui fixe  $(I_3, 0, 0)$  et la forme  $f$  est le groupe  $F_4$ . L'action de  $\text{SL}_3 \times \text{SL}_3$  sur  $V$  suivant

$$(A, C).(X, Y, Z) := (AXA^{-1}, AYC^{-1}, CYA^{-1})$$

fixe  $(I_3, 0, 0)$  et la forme  $f$ ; son noyau est le  $\mu_3$  diagonal. En d'autres mots, on dispose d'un plongement

$$(\text{SL}_3 \times \text{SL}_3)/\mu_3 \rightarrow F_4.$$

Ce groupe est  $F_4(k)$ -conjugué au groupe  $H$  considéré au § 6.1, on peut donc abusivement le noter  $H$  aussi.

On va identifier le sous-groupe  $\text{PGL}_3 \times \mu_3$  de  $F_4$  considéré dans [Ga2, §7.2]. Le sous-groupe  $\text{PGL}_3$  est le groupe diagonal  $\text{SL}_3/\mu_3 \subset H = (\text{SL}_3 \times \text{SL}_3)/\mu_3$  et le  $\mu_3$  noté ici  $\mu_3^{(4)}$  agit selon

$$\zeta.(X, Y, Z) = (X, \zeta Y, \zeta^2 Z).$$

Ainsi  $\mu_3^{(4)}$  est le sous-groupe  $(\text{SL}_3 \times \text{SL}_3)/\mu_3$  donné par

$$\zeta \mapsto \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire le sous-groupe  $\mu_3^{(1)}$ . On dispose par ailleurs du sous-groupe  $\mu_3^{(5)} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  de  $\mathrm{PGL}_3$  donné par les générateurs

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On observe que son image dans  $H$  est le sous-groupe  $\mu_3^{(2)} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Ainsi

$$\mu_3^{(1)} \times \mu_3^{(2)} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mu_3^{(4)} \times \mu_3^{(5)} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

*Démonstration de la proposition 6.6.* Si  $A$  est déployée,  $J(A, \lambda)$  est triviale et la formule également. Si  $A$  est un corps gauche on sait d'après Wedderburn que  $A$  est cyclique, i.e.  $A = (L/k, \sigma, b)$  avec les conventions de la proposition 4.1. Sa classe dans  $H^1(k, \mathrm{PGL}_3)$  est l'image de  $(\chi, (b))$  par la flèche  $H^1(k, \mu_3) \times H^1(k, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(k, \mathrm{PGL}_3)$ . Or l'image de

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, \mu_3^{(1)}) \times H^1(k, \mu_3^{(2)}) \times H^1(k, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(k, \mu_3^{(1)}) \times H^1(k, \mathrm{PGL}_3) \\ & & \downarrow \\ & & H^1(k, F_4) \end{array}$$

applique  $(a) \times (b) \times \chi$  sur  $J(A, a)$  d'après [KMRT, cor. 39.9]. Suivant le théorème 6.1, le composé

$$H^1(k, \mu_3^{(1)}) \times H^1(k, \mu_3^{(2)}) \times H^1(k, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(k, F_4) \xrightarrow{r} H^3(k)$$

applique  $(a) \times (b) \times \chi$  sur  $-\chi \cup (a) \cup (b)$ , ce qui permet de conclure que

$$g_3(J(A, a)) = -\chi \cup (a) \cup (b) = [A] \cup (a).$$

□

## 6.4 Groupes anisotropes possédant des sous-groupes unipotents lisses et connexes

Le théorème 6.1 nous permet de répondre à une question de G. Prasad.

**Proposition 6.8** *On suppose que le corps de base est de caractéristique  $p = 2$  (resp.  $p = 3, 5$ ) et que  $H_p^3(k) \neq 0$ . Alors il existe une  $k$ -forme  $G'$  anisotrope du groupe déployé  $G$  de type  $G_2$  (resp.  $F_4, E_8$ ) qui contient un sous-groupe  $R_{K/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$  où  $K/k$  est une extension de corps (purent) inséparable de degré  $p$ .*

Plaçons nous par exemple sur l'un des corps  $\mathbb{F}_p(T_1, T_2)$  ou  $\mathbb{F}_p((T_1))((T_2))$ , qui satisfont l'hypothèse  $H_p^3(k) \neq 0$ . Comme  $R_{K/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$  est un  $k$ -groupe unipotent lisse et connexe de dimension  $p - 1$  [CGP, 1.1.3], la proposition ci-dessus fournit des exemples de groupes anisotropes possédant des sous-groupes unipotents lisses et connexes non triviaux.

**Lemma 6.9** *Sous les hypothèses de la proposition 6.8, soit  $E/k$  un  $G$ -torseur tel que  $r_p([E]) \neq 0 \in H_p^3(k)$ . Alors le  $k$ -groupe tordu  ${}^E G/k$  est anisotrope.*

*Démonstration.* Comme la condition est préservée par extension finie de degré premier à  $p$ , il est loisible de supposer que  $k$  ne possède pas d'extensions propres de degré premier à  $p$ . Il suffit alors de vérifier qu'une forme isotrope  $G' = {}^E G$  a un invariant de Rost trivial. Si  $G'$  est de type  $G_2$ , un tel groupe  $G'$  est déployé.

Dans le cas de type  $F_4$ , le noyau anisotrope de  $G'$  est trivial ou de type  $B_3$ , donc déployé puisque  $\text{cd}_2(k) = 1$ .

Si  $G'$  est de type  $E_8$ , le noyau anisotrope  $J$  de  $G'$  est trivial ou intérieur de type  $D_4, D_6, E_6, D_7, E_7$ . Mais  $\text{cd}_2(k) = \text{cd}_3(k) = 1$ , ce qui implique que  $J$  est déployé (cf. [S2, §4.4]). On conclut que  $G'$  est déployé.  $\square$

*Démonstration de la proposition 6.8.* Le groupe  $H_p^3(k) \neq 0$  est engendré par les classes décomposables, c'est-à-dire de la forme  $(a).(b).\chi$ . Il existe donc  $a, b \in k^\times$  et  $\chi \in H^1(k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  tel que  $(a).(b).\chi \neq 0 \in H_p^3(k)$ . Avec les notations du théorème 6.1.2, on note  $E/k$  le  $A$ -torseur défini par  $a, b$  et  $\chi$ . On considère le  $k$ -groupe  $G' = {}^E G$ . Son invariant de Rost modulo  $p$  est  $(a).(b).\chi$  donc  $G$  est anisotrope en vertu du lemme 6.9. En outre,  $G'$  contient le  $k$ -groupe

$$H' = \left( \text{SL}_1(B) \times \text{SL}_1(C) \right) / \mu_p.$$

Si  $p = 2$  ou  $3$ , on a  $B \cong C \cong (\chi, b)$  et  $H'$  contient  $\text{PGL}_1((\chi, b))$  par le plongement diagonal. Mais  $K_b := k(\sqrt[p]{b}) \subset (\chi, b)$ , d'où un plongement  $R_{K_b/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m \subset \text{PGL}_1((\chi, b)) \subset H' \subset G'$ .

Le cas  $p = 5$  est légèrement plus compliqué du fait que le sous-groupe maximal  $H = (\text{SL}_5 \times \text{SL}_5) / \mu_5$  ne contient pas  $\text{PGL}_5$  (en effet  $\mu_5$  se plonge dans  $\mu_5 \times \mu_5$  suivant  $x \mapsto (x, x^2)$ ). Cependant comme  $B \cong (\chi, b)$  et  $C \cong (\chi, b^2)$ , on dispose de plongements naturels  $j_B : R_{K_b/k}^1(\mathbb{G}_m) \rightarrow \text{SL}_1(B)$  et  $j_C : R_{K_b/k}^1(\mathbb{G}_m) \rightarrow \text{SL}_1(C)$ . On considère l'homomorphisme

$$R_{K_b/k}^1(\mathbb{G}_m) \rightarrow (\text{SL}_1(B) \times \text{SL}_1(C)) / \mu_5, \quad w \mapsto (j_B(w), j_C(w^2))$$

dont le noyau est  $\mu_5 \subset R_{K_b/k}^1(\mathbb{G}_m)$ . On obtient ainsi un plongement

$$R_{K_b/k}^1(\mathbb{G}_m)/\mu_5 \cong R_{K_b/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m \subset H' \subset G'.$$

□

## Références

- [BFT] G. Berhuy, C. Frings and J.-P. Tignol, *Galois cohomology of the classical groups over imperfect fields*, J. of Pure and Applied Algebra **211** (2007), 307-341.
- [BK] S. Bloch et K. Kato, *p-adic étale cohomology*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **63** (1986), 107-152.
- [Bou] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques*, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6, (1981), Masson.
- [Bro] K.S. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics **87** (1982), Springer.
- [BD] J.-L. Brylinski, P. Deligne, *Central extensions of reductive groups by  $\mathbf{K}_2$* , Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **94** (2001), 5–85.
- [BS] A. Borel, J. de Siebenthal, *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos*, Comment. Math. Helv. **23** (1949), 200–221.
- [Ca] R. W. Carter, *Conjugacy classes in the Weyl group*, Compositio Math. **25** (1972), 1–59.
- [Ch] V. Chernousov, *Remark on the Serre mod 5 invariant for groups of type  $E_8$* , Math. Zametki **56** (1994), 116-121, traduction anglaise : Math Note **56** (1994), 730-733.
- [ChS] V. Chernousov et J.-P. Serre, *Lower Bounds for essential dimensions via orthogonal representations*, Journal of Algebra **305** (2006), 1055-1070.
- [CTR] J.-L. Colliot-Thélène et Wayne Raskind,  *$\mathcal{K}_2$ -cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), 165–199.
- [CGP] B. Conrad, O. Gabber, G. Prasad, *Pseudo-reductive groups*, Cambridge University Press (2010).

- [EM] S. Eilenberg, S. MacLane, *Group Extensions and Homology*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 43 (1942), 757-831.
- [EKL] H. Esnault, B. Kahn, M. Levine, E. Viehweg, *The Arason invariant and mod 2 algebraic cycles*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 73–118.
- [Ga1] S. Garibaldi, *The Rost invariant has trivial kernel for quasi-split groups of low rank*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), 684–711.
- [Ga2] S. Garibaldi, *Cohomological invariants, exceptional groups and Spin groups*, Memoirs of the American Mathematical Society **937** (2009).
- [GaQ] S. Garibaldi et A. Quéguiner-Mathieu, *Restricting the Rost invariant to the center*, Algebra i Analiz **19** (2007), no. 2, 52-73 ; St Petersburg Math. J. **19** (2008), no. 2, 197-213.
- [GMS] S. Garibaldi, A. Merkurjev et J.-P. Serre, *Cohomological invariants in Galois cohomology*, University Lecture Series **28** (2003), American Mathematical Society.
- [Gi1] P. Gille, *Invariants cohomologiques de Rost en caractéristique positive*, K-Theory **21** (2000), 57-100.
- [Gi2] P. Gille, *The Borel-de Siebenthal's theorem*, note on P. Gille's homepage.
- [GiR] P. Gille et Z. Reichstein, *A lower bound on the essential dimension of a connected linear group*, Comment. Math. Helv. **84** (2009), 189-212.
- [GiS] P. Gille et T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **101** (2006), Cambridge University Press.
- [Gs] R. L. Griess, Jr., *Elementary abelian  $p$ -subgroups of algebraic groups*, Geom. Dedicata **39** (1991), 253–305.
- [Gr1] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer. I. Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses*, (1968) Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas pp. 88–188 North-Holland, Amsterdam ; Masson, Paris.
- [Gr2] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer. II. Théories cohomologiques*, (1968) Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas pp. 67-87 North-Holland, Amsterdam ; Masson, Paris.
- [I] L. Illusie, *Complexe de de Rham–Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Sci. ENS **12** (1979), 501–661.

- [K] K. Kato, *Galois cohomology of complete discrete valuation fields*, Algebraic  $K$ -theory, Part II (Oberwolfach, 1980), pp. 215–238, Lecture Notes in Math. **967** (1982), Springer.
- [K1] B. Kahn, *Descente galoisienne et  $K_2$  des corps de nombres*,  $K$ -Theory **7** (1993), 55–100.
- [K2] B. Kahn, *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. Math. **1** (1996), 395–416.
- [KMRT] M.-A. Knus, A.S. Merkurjev, M. Rost, and J.-P. Tignol, *The book of involutions*, Colloquium Publ., **44** (1998), Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [Mc] S. Mac Lane, *Homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **114** (1963), Springer-Verlag.
- [MPT] A.S. Merkurjev, R. Parimala et J.-P. Tignol, *Invariants of quasi-trivial tori and the Rost invariant*, Algebra i Analiz **14** (2002), no. 5, 110-151 ; St Petersburg Math. J. **14** (2003), no. 5, 791-821.
- [Ms] I. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés*, Ann. scient. Éc. norm. sup. **2** (1969), 1–62.
- [MS] A.S. Merkurjev et A.A. Suslin,  *$\mathcal{K}$ -cohomologie des variétés de Severi-Brauer et l'homomorphisme de norme résiduelle (en russe)*, Izv. Akad. Nauk SSSR **46** (1982), 1011–1046, trad. anglaise : Math. USSR Izv. **21** (1983), 307–340.
- [PR] H. Petersson et M. Racine, *An elementary approach to the Serre-Rost invariant of Albert algebras*, Indag. Math. (N.S.) **7** (1996), no. 3, 343–365.
- [RY] Z. Reichstein et B. Youssin, *Essential Dimensions of Algebraic Groups and a Resolution Theorem for  $G$ -varietie*, avec un appendice J. Kollár et E. Szabó, Canadian Journal of Mathematics **52** (2000), 1018-1056.
- [R1] M. Rost, *A (mod 3) invariant for exceptional Jordan algebras*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **313** (1991), 823-827.
- [S1] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, 5-ième édition, Lecture Notes in Math **5**, Springer.
- [S2] J.-P. Serre, *Sous-groupe finis des groupes de Lie*, Séminaire Bourbaki 864 (1998-1999), Astérisque .

- [Sp] T. A. Springer, *Regular elements of finite reflection groups*, Invent. Math. **25** (1974), 159–198.
- [SpS] T. A. Springer, R. Steinberg, *Conjugacy classes*, Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1968/69) pp. 167–266, Lecture Notes in Mathematics **131** (1970), Springer.
- [W] C. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38** (1994).
- [T1] J. Tits, *Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque*, J. reine angew. math. **247** (1971), 196–220.
- [T2] J. Tits, *Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups*, J. Algebra **131** (1990), 648–677.