TP n°5 : Méthode du simplexe pour les problèmes de première espèce

TP noté

Objectif : Dans cette séance, on s'intéressera à la sélection des pivots dans la méthode du simplexe, que l'on appliquera aux problèmes de première espèce.

1 Rappel : représentation en tableau et pivot

On s'intéresse au problème d'optimisation linéaire ($\mathscr{P}$) suivant, écrit sous forme standard :

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximiser} & z = x_1 + 2\,x_2 \\
\text{sous les contraintes} & \begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
3\,x_1 &+& 2\,x_2 &+& x_3 & & & & & & &=& 3 \\
5\,x_1 &+& x_2 & & &+& x_4 & & & & &=& 1 \\
x_1 &+& 2\,x_2 & & & & &+& x_5 & & &=& 4 \\
x_1 &+& 4\,x_2 & & & & & & &+& x_6 &=& 5 \\
x_1 &,& x_2 &,& x_3 &,& x_4 &,& x_5 &,& x_6 &\geqslant& 0
\end{array}
\end{array}
$$

On définit la matrice et les vecteurs suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On rappelle que le problème ($\mathscr{P}$) peut être représenté par la matrice augmentée suivante

$$M = \begin{bmatrix} A & b \\ {}^{\mathrm{t}}C & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

On dit que le problème est de *première espèce* si le vecteur b est à composantes positives.

On donne également ci-dessous une implémentation possible de la fonction `pivot` :

```python
# la fonction pivot
def pivot(M,i,j):
    # M est une np.array (2 dimensions)
    # i indice de la ligne
    # indice de la colonne
    N = M.copy()
    l,c = np.shape(N)
    for k in np.arange(l):
        if k==i : # on est sur la ligne de i
            N[k,:] = M[k,:]/M[k,j] # on normalise la ligne pour avoir 1 en (i,j)
        else:
            # on soustrait aux lignes pour annuler au dessus et en dessous du pivot
            N[k,:]=M[k,:] - M[k,j]/M[i,j]*M[i,:]
    return N
```

La méthode du simplexe utilise récursivement cette fonction sur la matrice M. À l'itération courante, elle est de la forme

$$M = \begin{bmatrix} A' & b' \\ {}^{\mathrm{t}}d & -z \end{bmatrix}$$

avec A' de la même taille que A, b' de la même taille que b, d de la même taille que C et z un réel. L'objectif de cette séance est de sélectionner selon les deux critères vus en cours les indices `i` et `j` apparaissant en entrée de la fonction `pivot`.

2 Optimalité d'un sommet

On rappelle qu'étant donné une itération de la méthode du simplexe, on peut toujours extraire de la sous-matrice A' les vecteurs de la base canonique de l'espace dans lequel vit b associés à des prix marginaux nuls. Les indices de ces colonnes correspondent aux variables en base, tandis que les colonnes restantes définissent les variables hors base. Le vecteur X^* définit de sorte que les variables hors base sont nulles et le sous-vecteur X^*_B constitué des variables en base de X^* soit égal à b' définit alors un sommet du polyèdre des contraintes du problème sous forme canonique.
Ce sommet est optimal si et seulement si le vecteur des prix marginaux associé à la base courante est à composantes positives.

Plus précisément, sans reconstruire le sommet X^*, on peut tester son optimalité en vérifiant si les coefficient du sous-vecteur d de la matrice M possède une composante strictement positive ou non. Dans le premier cas, le sommet n'est pas optimal, dans le second, il l'est.

Exercice 1 Construire la matrice M définie dans l'équation (1).

Exercice 2 Écrire une fonction `test_optimalite_sommet` qui prend en entrée une matrice M et qui renvoie 1 si le sommet courant est optimal, 0 sinon. Tester cette fonction sur la matrice M construite à l'exercice précédent.

3 Sélection du pivot par critère naturel

On suppose que le sommet courant n'est pas optimal.

On rappelle que le critère naturel conduit à sélectionner comme variable *entrante* la première variable associée à un prix marginal maximal, puis comme variable sortante la variable apparaissant dans la première ligne pour laquelle le coefficient affecté à la variable soit strictement positive et telle que le rapport entre la constante de cette ligne et ce coefficient soit minimal.

De manière plus formelle, en utilisant la matrice augmentée M, il s'agit de sélectionner

1. la première colonne j telle que le coefficient d_j soit **maximal** ;
2. la première ligne i telle que le coefficient $A'_{i,j}$ soit **strictement positif** et que le rapport $b'_i/A'_{i,j}$ soit **minimal**.

Exercice 3 Écrire une fonction `critere_naturel` qui prend en entrée une matrice M et qui renvoie les indices i et j sélectionnés selon le critère naturel. Tester cette fonction sur la matrice M.

4 Sélection du pivot par critère de Bland

On suppose que le sommet courant n'est pas optimal.

On rappelle que le critère de Bland conduit à sélectionner comme variable *entrante* la première variable associée à un prix marginal strictement positif, puis comme variable sortante la variable apparaissant dans la première ligne pour laquelle le coefficient affecté à la variable soit strictement positive et telle que le rapport entre la constante de cette ligne et ce coefficient soit minimal.

De manière plus formelle, en utilisant la matrice augmentée M, il s'agit de sélectionner

1. la première colonne j telle que le coefficient d_j soit **strictement positif** ;
2. la première ligne i telle que le coefficient $A'_{i,j}$ soit **strictement positif** et que le rapport $b'_i/A'_{i,j}$ soit **minimal**.

Exercice 4 Écrire une fonction `critere_bland` qui prend en entrée une matrice M et qui renvoie les indices i et j sélectionnés selon le critère de Bland. Tester cette fonction sur la matrice M.

5 Résolution d'un problème de première espèce

Exercice 5 Dans cet exercice, on va appliquer les fonctions définies précédemment pour résoudre le problème $(\mathscr{P})$.

1. Tester l'optimalité du sommet associé à la forme initiale du problème $(\mathscr{P})$ telle que représentée par la matrice M définie dans l'équation (1).
2. *Premier pivot par critère naturel* Sélectionner le pivot par le critère naturel, puis le réaliser. Tester l'optimalité du sommet obtenu.
3. *Premier pivot par critère de Bland* Sélectionner le pivot par le critère de Bland, puis le réaliser. Tester l'optimalité du sommet obtenu.

Pour résoudre un problème de première espèce par la méthode du simplexe, il faut appliquer récursivement la fonction `pivot` à la matrice M, en sélectionnant les indices i et j à l'aide de la fonction `critere_naturel` ou `critere_bland`, et ce, tant que le sommet courant n'est pas optimal.

Exercice 6 Écrire une fonction `methode_simplexe_premiere_espece_naturel` qui prend en entrée une matrice M représentant un problème d'optimisation linéaire de première espèce et qui renvoie la matrice correspondant à un sommet optimal. Les pivots seront sélectionnés à l'aide du critère naturel. Tester cette fonction sur le problème $(\mathscr{P})$.

Exercice 7 Écrire une fonction `methode_simplexe_premiere_espece_bland` qui prend en entrée une matrice M représentant un problème d'optimisation linéaire de première espèce et qui renvoie la matrice correspondant à un sommet optimal. Les pivots seront sélectionnés à l'aide du critère de Bland. Tester cette fonction sur le problème $(\mathscr{P})$.

6 Bonus : cas de cyclage

On a vu en TD que l'application de la méthode du simplexe peut conduire à un cyclage si le critère naturel est utilisé pour sélectionner les pivots. Pour éviter ce phénomène, on peut limiter artificiellement le nombre de pivots autorisés.

Exercice 8 Modifier la fonction `methode_simplexe_premiere_espece_naturel` en ajoutant un argument en entrée `niter` qui spécifie le nombre de pivots maximal réalisé dans la méthode du simplexe.

On considère le problème sous forme canonique suivant :

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Maximiser} & z = 10\,x_1 & -57\,x_2 & -9\,x_3 & -24\,x_4 & & \\
\text{sous les contraintes} & x_1/2 & -11\,x_2/2 & -5\,x_3/2 & +\;9\,x_4 & \leqslant & 0 \\
 & x_1/2 & -\;3\,x_2/2 & -\;x_3/2 & +\;x_4 & \leqslant & 0 \\
 & x_1 & & & & \leqslant & 1 \\
 & x_1\;, & x_2\;, & x_3\;, & x_4 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

Exercice 9

1. Écrire ce problème sous forme standard, puis construire la matrice M associée.
2. Résoudre ce problème en utilisant le critère de Bland. Combien d'itérations sont nécessaires pour obtenir un sommet optimal ?
3. Résoudre ce problème en utilisant le critère naturel. On fixera le nombre de pivots maximal au nombre d'itérations déterminé à la question précédente. Que remarque-t-on ?